15. ročník, úloha III . 1 ... *obr a trpaslík* *(4 body; průměr ?; řešilo 35 studentů)*

Obr s trpaslíkem se přetahují o lano, které je omotané kolem stromu zakořeněného tak pevně, že ho ani obr nedokáže vytrhnout nebo zlomit. Přetrhnout lano se mu také nepodaří.

Velký zlý obr je přesně 666-krát silnější než trpaslík. Kolikrát musí být lano omotané kolem stromu, aby přetahování nikdo nevyhrál? Koeficient tření mezi lanem a stromem odhadněte.

Napadlo Pavla Augustinského a Honzu Houšťka.

Příklad vyžadoval použití diferenciálního počtu (byť v nejzákladnější míře). Nechť na pravé straně (F_1) drží lano trpaslík a na levé obr (F_2). Jelikož se lano o strom tře (bez tření by musel trpaslík držet lano silou stejnou, jakou jej tahá obr), síla $F(\alpha + \mathrm{d}\alpha)$ je o málo větší než síla $F(\alpha)$, kde $F(\alpha)$ je síla kterou je napnuto lano v místě určeném úhlem $\alpha \in \langle 0, \alpha_{\text{celk}} \rangle$, přičemž $F(0) = F_2$ a $F(\alpha_{\text{celk}}) = F_2$. Jejich rozdíl je roven příspěvku třecí síly $\mathrm{d}F_t$ (viz obr. 1)

$$\mathrm{d}F_t = F(\alpha + \mathrm{d}\alpha) - F(\alpha).$$

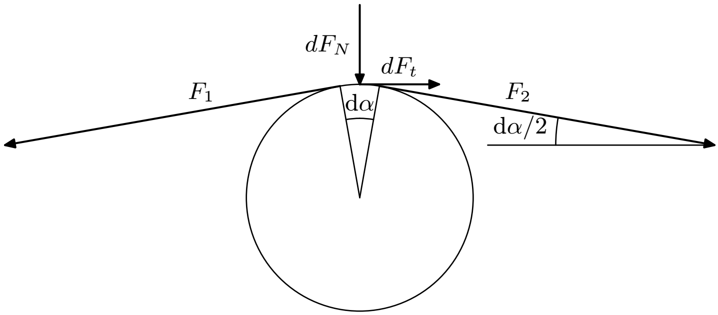
Pro $\mathrm{d}F_N$ platí

$$\mathrm{d}F_N = F(\alpha + \mathrm{d}\alpha) \sin \frac{\mathrm{d}\alpha}{2} + \Big(F(\alpha) + \mathrm{d}F_t\Big) \sin \frac{\mathrm{d}\alpha}{2} = 2F(\alpha) \sin \frac{\mathrm{d}\alpha}{2} = F(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,$$

kde jsme zanedbali $\mathrm{d}F_t$ vůči F (pak $F(\alpha)$ a $F(\alpha + \mathrm{d}\alpha)$ jsou téměř stejně velké) a rovněž využili toho, že pro malé úhly je $\sin\alpha = \alpha$. Pro třecí sílu pak platí

$$\mathrm{d}F_t = f\,\mathrm{d}F_N = \mathrm{d}F, \tag{1}$$

jelikož přírůstek třecí síly $\mathrm{d}F_t$ je také přírůstek síly, kterou tahá trpaslík za provaz.



Obr. 1. Síly působící na lano navinuté na strom

Rovnice (1) je diferenciální rovnice, kterou lze řešit přímou integrací

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = f\,\mathrm{d}\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \int\limits_{F_1}^{F_2} \frac{\mathrm{d}F}{F} = f \int\limits_{0}^{\alpha_{\text{celk}}} \mathrm{d}\alpha. \tag{2}$$

Integrujeme od trpaslíka (u kterého je lano napínáno silou F_1) směrem k obrovi, který jej tahá silou F_2 a u kterého je lano obtočené kolem stromu o úhel α.

Řešením rovnice (2) dostaneme

$$\frac{1}{f} \cdot \ln \frac{F_2}{F_1} = \alpha_{\mathrm{celk}}.$$

A teď přichází kámen úrazu. Většina z vás psala, že koeficient tření mezi lanem a dřevem je kolem 0,5. Nám se to zdá příliš málo, protože tolik má koeficient tření f dřeva na dřevě. Možná pořádně staré lano (myslíme tím lano používané ke šplhu) na hladké kůře buku by mohlo mít koeficient tření podobný. V případě, že si vezmeme nové lano a nalezneme pro obra statný dub (ať se trápí, když je zlý), koeficient tření bude alespoň 1.

Bohužel, ani my ani vy jste neprovedli experiment, a tak nemůžeme prohlásit o koeficientu f více. Navíc, f se musí měřit při velké přítlačné síle, protože když jenom položíme lano na dřevo, naměříme f menší. Svou roli sehraje drsná kůra dubu a drsné lano, které se do kůry zařízne.

Pro $f = 1{,}04$ vyjde $\alpha = 360^\circ$; stačí tedy lano omotat kolem stromu pouze jednou. V případě $f = 0{,}52$ musíme omotat lano dvakrát.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.