Zadání I. série

Termín odeslání: 21. listopadu 2002

Milí přátelé!

Vítáme vás v XVI. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

S první sérií nám prosím pošlete na zvláštním papíru vaše jméno, příjmení, datum narození, adresu pro korespondenci, e-mail (máte-li), školu, třídu, kategorii (2006 minus rok maturity, což odpovídá ročníku na čtyřletém gymnáziu, mladší řešitelé uvedou kategorii 1). Řešení každé úlohy pište na *zvláštní* papír a *všechny* papíry podepište.

Není třeba posílat řešení všech úloh, řešitelé, kteří spočítají vše, jsou spíše výjimkou.

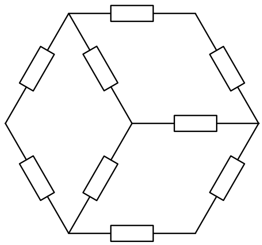
U experimentální úlohy nezapomeňte, že experiment je třeba nejen navrhnout, ale i provést, naměřené hodnoty zpracovat, spočítat z nich výsledek a provést diskuzi chyb. Odměnou vám bude vyšší počet bodů, jímž je experimentální úloha hodnocena.

Podrobnější informace najdete v přiloženém letáku nebo na http://fykos.mff.cuni.cz. Přejeme vám spoustu příjemných chvil strávených s naším seminářem.

Honza Houštěk

Úloha I . 1 ... *odpory*

Pro síť na obr. 1 (všechny odpory jsou stejné, jejich velikost označme R) určete odpor mezi dvěma vrcholy šestiúhelníku (uvažte všechna možná zapojení).



Obr. 1

Úloha I . 2 ... *Archimédes*

Pokuste se bez použití rovnic a vzorců vyřešit následující dvě úlohy. Pozor, vaše řešení musí být i tak naprosto exaktní.

a) V nádobě s vodou plave kus ledu. Co se stane s hladinou, až led roztaje?
b) Na misky rovnoramenných vah jsou položena stejně těžká tělesa. Co se stane, když jednu misku ponoříme do vody?

Úloha I . 3 ... *hračka*

Organizátor Fykosu dostal k narozeninám hračku, která je schématicky vyobrazena na obr.2. Hračka, která slouží také jako záložka, se skládá z malého cínového kalíšku spojeného provázkem délky l s cínovou kuličkou.

Poraďte organizátorovi, jakou rychlost má udělit kuličce, aby spadla do kalíšku. Uvažujte, že kalíšek je v klidu, je velmi malý při porovnání s délkou provázku a ztráty mechanické energie lze zanedbat.

Obr. 2

Úloha I . 4 ... *visící drát*

Odhadněte rozdíl elektrických potenciálů mezi konci drátu délky l visícího v gravitačním poli, který vzniká působením gravitace na volné elektrony. Jak přesný voltmetr bychom potřebovali k jeho změření?

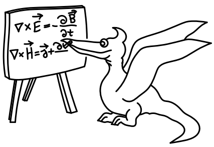
Úloha I . P ... *gravitace*

Odhadněte rozdíl mezi intenzitou gravitačního pole na povrchu Země a na vrcholu hory a pokuste se spočítat, jaké parametry musí mít hora, aby byl tento rozdíl nulový. (Pokuste se alespoň o kvalitativní odhad, tj. rozhodněte, zda je pole na hoře silnější nebo slabší.)

Úloha I . E ... *reakční doba*

Změřte rychlost vedení vzruchu nervu.

Návod: Změřte svou reakční dobu na optický nebo zvukový podnět (v tomto případě můžeme předpokládat, že vzruch dorazí do mozku okamžitě). Poté změřte rychlost své reakce na dotek konce ruky nebo nohy. Porovnáním výsledků pak stanovte rychlost vedení vzruchu. Nezapomeňte, že pro správné statistické zpracování potřebujete naměřit *minimálně* deset hodnot.



Seriál na pokračování

Letošní seriál bude pojednávat o matematickém aparátu fyziky. V prvním díle si povíme něco o komplexních číslech a jejich využití ve fyzice.

Kapitola 1: Komplexní čísla

V reálných číslech nelze odmocňovat záporná čísla, neboť rovnice $x^2 + a = 0$ nemá pro kladná a řešení. Definujme číslo i, tzv. imaginární jednotku, vztahem

$$\mathrm{i}^2 = -1. \tag{1}$$

Komplexním číslem pak rozumíme číslo, které se skládá z reálné a imaginární části, např. $3+2\mathrm{i}$ (můžeme na něj nahlížet jako na součet reálného a ryze imaginárního čísla, přesto se však jedná o jedno číslo.) Množinu všech komplexních čísel obvykle značíme $\mathbb{C}$.

Hned na tomto místě bychom rádi ujasnili pojem odmocniny v komplexních číslech. Zatímco v reálných číslech obvykle máme na mysli *funkci* definovanou na *nezáporných číslech*, v komplexním oboru odmocninou myslíme *víceznačnou funkci*, jejíž hodnotou je množina všech čísel, která umocněná na příslušnou mocninu dávají odmocňované číslo. V praxi to většinou znamená, že pokud chceme odmocninu z komplexního čísla použít, musíme nějakým způsobem specifikovat, které řešení máme na mysli. Např. pro druhou odmocninu můžeme chtít řešení se zápornou imaginární částí; potom lze psát $\sqrt{-1} = -\mathrm{i}$.

Základní operace s komplexními čísly

Sčítání a odčítání komplexních čísel je definováno po složkách tedy např. $(2+\mathrm{i})+(4-3\mathrm{i}) = 6-2\mathrm{i}$. Při násobení musíme roznásobit všechny členy, tj. $(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i}) = (ac-bd)+(ad+cb)\mathrm{i}$. Číslem komplexně sdruženým k číslu $z = a + b\mathrm{i}$ rozumíme číslo $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$. Někdy se místo značení $\bar{z}$ používá též značení $z^\star$.

Všimněte si, že $z\bar{z} = a^2 + b^2$ je reálné číslo. To dává návod, jak dělit komplexní čísla, platí totiž

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}.$$

Další zajímavé vlastnosti komplexního sdružení už pouze vyjmenujeme, laskavý čtenář si může vše sám ověřit.

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla

Stejně jako můžeme reálné číslo reprezentovat bodem na číselné ose, můžeme komplexní číslo chápat jako bod, který leží v rovině, které se říká *Gaussova rovina.* Kartézské souřadnice (a, b) bodu v Gaussově rovině odpovídají číslům a, b v již zmiňovaném *algebraickém tvaru* komplexního čísla $a + b\mathrm{i}$.

Polohu bodu v rovině však můžeme popsat i pomocí polárních souřadnic, které udávají vzdálenost bodu od počátku souřadného systému (běžně značenou r či ϱ) a úhel, který svírá jeho průvodič s osou x (označme ho φ). Souřadnicím r a φ odpovídá číslo $z = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Mluvíme pak o komplexním čísle v *goniometrickém tvaru.*

Číslu r říkáme *absolutní hodnota* komlpexního čísla a značíme ji $|z|$. Zřejmě platí $|z|^2 = z\bar{z}$. Z vlastností komplexního sdružení přímo plynou následující vlastnosti absolutní hodnoty:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Komplexní exponenciála

Na reálných číslech lze nadefinovat exponenciální funkci $\exp x$ pomocí následujících vlastností:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \exp(x + y) = \exp x \exp y, \qquad (\forall x \in \mathbb{R})\ \exp x \geq 1 + x.$$

Skutečně, lze dokázat, že tyto podmínky splňuje právě jedna funkce, a označíme-li $\mathrm{e} = \exp 1$ tzv. *Eulerovo číslo*, můžeme psát $\exp x = \mathrm{e}^x$.

Přirozený způsob, jak rozšířit exponenciálu na $\mathbb{C}$, je požadovat platnost první podmínky pro všechna $\mathbb{C}$. Stačí znát vzorec pro exponenciálu ryze imaginárního čísla. To je tzv. *Eulerův vztah*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi. \qquad (2)$$

Čtenář si může sám ověřit, že toto rozšíření skutečně zachová v platnosti výše zmíněnou vlastnost $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

Uvedený vztah nám v mnoha případech velice zjednoduší práci. Jeho užitečnost tkví v tom, že exponenciála je velmi „pěkná“ funkce, se kterou se snadno počítá. Například goniometrický tvar komplexního čísla se použitím tohoto vztahu redukuje na $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Čísla v tomto tvaru můžeme např. velmi jednoduše násobnit (násobíme absolutní hodnoty a sčítáme úhly.) Vidíme, že např. násobení komplexního čísla faktorem $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ odpovídá jeho otočení o úhel φ v Gaussově rovině. Dosadíme-li $-\varphi$ do (2), dostáváme ze sudosti resp. lichosti cosinu resp. sinu

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Odtud pak můžeme vyjádřit fukce sinus a cosinus takto:

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}.$$

Z těchto vztahů a z vlastností exponenciály můžeme snadno odvodit třeba součtové vzorce pro funkce $\sin x$ a $\cos x$. Podobně např. *Moiverova věta*

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi,$$

se při znalosti komplexní exponenciály redukuje na vztah $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$.

Kmity a vlny

Nejvetší uplatnění ve fyzice však vztah (2) nachází při popisu všelikého vlnění a kmitání. Pokud ke klasickému vztahu pro harmonické kmity $y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ přičteme libovolnou imaginární část, téměř nic se v praxi nezmění, při sčítání a odčítání, derivování a integrování, násobení komplexním číslem se totiž nic nezmění, protože všechny tyto operace fungují na komplexních číslech „po složkách". Stačí si pouze pamatovat, že realitě odpovídá reálná část čísla.

Jednu z možností, jak šikovně přidat imaginární část, ukazuje následující vztah

$$y = A_0\mathrm{e}^{i\omega t+\varphi_0} = \widehat{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{3}$$

kde $\widehat{A}_0$ je komplexní amplituda, do které můžeme zahrnout počáteční fázi ($\widehat{A}_0 = A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$). Podobně vlnění popsané vztahem $u = A_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ můžeme popisovat ve tvaru

$$y = \widehat{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}.$$

Komplexní symbolická metoda pro řešení obvodů RLC

Zřejmě neexistuje lepší příklad než tato metoda pro RLC obvody jako odpověď na otázku, k čemu vlastně je přepsání harmonických kmitů do komplexních čísel dobré.

RLC obvody jsou obvody, ve kterých se kromě rezistorů vyskytují ještě další dvě lineární součástky – kondenzároty a cívky. Pro všechny tři platí analogie Ohmova zákona i pro harmonický střídavý signál, totiž že poměr amplitudy napětí a proudu je pro danou součástku konstatní (u cívky a kondenzátoru tento koeficient závisí ještě na frekvenci).

Fázově jsou ovšem napětí a proud na cívce a kondenzátoru vůči sobě posunuté, a protože Kirchhoffovy zákony neplatí pro amplitudy, ale pro okamžité hodnoty napětí a proudů, musíme se vydat buď cestou poměrně nepřehledných úprav vztahů se siny a cosiny, kde je navíc třeba neusále kontrolovat znaménko fázového posunutí, případně použít metodu tzv. *fázorů*, kde se harmonické kmity reprezentují jako průmět rovnoměrného pohybu po kružnici do jedné přímky.

Na stejném principu jako fázory funguje i komplexní metoda. Její výhoda spočívá v jednoduchosti popisu – je-li proud v cívce $i = \widehat{I}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, pak napětí je $u = \mathrm{i}\omega L\widehat{I}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, podobně kondenzátorem s napětím $u = \widehat{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ prochází proud $i = \mathrm{i}\omega C\widehat{U}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Protože člen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ bude zřejmě u všech veličin společný, stačí napsat Kirchhoffovy zákony pro komplexní amplitudy.

Oproti stejnosměrným obvodům se tedy změní pouze tolik, že napětí a proudy jsou komplexní čísla (jejichž absolutní hodnota odpovídá amplitudě a argument fázi). Podíl komplexního napětí a proudu na součástce či skupině součástek se nazývá *impedance* (je to vlasně zobecněný odpor), přičemž impedance cívky je $Z_L = \mathrm{i}\omega L$ a impedance kondenzátoru $Z_C = 1/\mathrm{i}\omega C$. Impedance rezistoru je pochopitelně reálná, $Z_R = R$. Vše ostatní je stejné jako u stejnosměrných obvodů.

Příklad: Vyřešme, jaký proud teče sériovým RL obvodem, známe-li amplitudu a frekvenci napětí zdroje. Celková impedance je $Z = R + \mathrm{i}\omega L$. Napětí na zdroji zvolíme $\widehat{U} = U$ ($\widehat{U}$

je komplexní veličina, ve které je obsažena informace o amplitudě i fázi, U je amplituda). Samozřejmě jsme mohli zvolit např. $\widehat{U} = -U$ či $\widehat{U} = \mathrm{i}U$. U první veličiny, kterou zavádíme, máme totiž vždy možnost volby počáteční fáze. Pochopitelně jsme si vybrali nejjednodušší možnost – nulovou fázi. Pro komplexní proud pak platí $\widehat{I} = \widehat{U}/Z = U/(R + \mathrm{i}\omega L)$. Amplituda proudu je tedy $I = |\widehat{I}| = U/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ a fázové posunutí vzhledem k napětí je $\Delta\varphi = -\operatorname{arctg}(\omega L/R)$ (proud se zpožďuje za napětím).

Komplexní analýza

Kdo již umí derivovat, může se zamyslet nad tím, jak je to s derivací komplexní funkce komplexní proměnné. Tato derivace se definuje takto

$$f'(z_0) = \lim_{|z-z_0|\to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Důležité na této definici je to, že tato limita musí být stejná nazávisle na směru, kterým se z přibližuje k z_0. Pokud místo komplexní funkce komplexní proměnné $f(z)$ budeme na chvíli uvažovat dvě reálné funkce dvou reálných proměnných $u(x, y)$ a $v(x, y)$ takové, že platí $f(x+y\mathrm{i}) = u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$, zjistíme, že aby mohla (komplexní) derivace funkce $f(z)$ existovat, musí platit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Toto jsou takzvané *Cauchy-Riemannovy podmínky*. Funkce, která je na nějaké oblasti splňuje a má tedy na této oblasti derivaci, se nazývá *holonomní*. K zajímavým vlastnostem holonomních funkcí patří např. to, že každá taková funkce má na příslušné oblasti derivace libovolného řádu a rovná se své Taylorově řadě. Její reálná i imaginární část jsou díky Cauchy-Riemannovým podmínkám řešením Laplaceovy rovnice ($\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$, $\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 = 0$).

K holonomní funkcím na celé množině $\mathbb{C}$ patří např. libovolné polynomy a mocninné řady, exponenciála a pomocí ní definované funkce sinus a cosinus. Dále např součin dvou holonomních funkcí je holonomní funkce apod. Každopádně se jedná o vlastnost, kterou má (alespoň na určité oblasti) většina běžně užívaných funkcí.

Díky Cauchy-Riemannovým podmínkám lze s užitím Stokesovy věty o křivkovém integrálu dokázat, že křivkový integrál z holonomní funkce přes uzavřenou křivku je nulový. Ve spojení s další důležitou větou – *residuovou větou* – toto dává velmi silný nástroj pro výpočet jistého typu určitých integrálů, ale to už skutečně přesahuje rámec našeho seriálu.

Úloha I . S ... *komplexní čísla*

a) Spočtěte reálnou a imaginární část $\sin(a + b\mathrm{i})$.
b) Pomocí komplexní symbolické metody odvoďte vztah pro rezonanční frekvenci paralelního RLC obvodu, tj. nalezněte frekvenci, pro kterou má při konstatním napětí celkový proud v obvodu maximální amplitudu.
c) Sečtěte pomocí komplexních čísel následující řady. (*Návod:* řada $A + B\mathrm{i}$ je geometrická.)

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\delta} \cos(n\varphi), \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\delta} \sin(n\varphi).$$

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.