

Zadání VI. série



Termín odeslání: 16. června 2003

Milí řešitelé FYKOSu!

Máte v rukou poslední sérii, tedy poslední možnost, jak si ve výsledkové listině ještě trochu polepšit. Doufáme, že se vám úlohy budou líbit. Jejich řešení dostanete společně s řešením 5. série a závěrečnou výsledkovou listinou koncem června. Přejeme vám hodně úspěchů v závěrečném období školního roku.

Honza Houštek

Úloha VI. 1 ... záhadný obvod

Ke kondenzátoru o neznámé kapacitě připojíme do série cívku o indukčnosti L , obvod připojíme ke zdroji napětí o frekvenci ω a naměříme na nekalibrovaném ampérmetru nějaký proud. Poté do série připojíme ještě jednu cívku, stejnou jako ta první, a proud v obvodu se nezmění. Jaká je kapacita kondenzátoru?

Úloha VI. 2 ... moucha a netopýr

Netopýr na lovu letí proti mouše rychlostí $3,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, moucha letí desetkrát pomaleji. Netopýr vysílá ultrazvukový signál o frekvenci f_0 , který se odráží od mouchy a vrací k lovcvi. Netopýrova sluchadla jsou nejcitlivější na frekvence blízko $61,3 \text{ kHz}$. Určete f_0 . Zvuk jaké frekvenci by moucha slyšela, kdyby slyšela?

Úloha VI. 3 ... tekoucí sklo

Na starých zámcích bývají originální tabulky skla v oknech u spodního okraje širší než u horního díky tečení. Za sto let se tabulka o rozměru $0,5 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ tlustá 5 mm rozšíří o $0,1 \text{ mm}$. Odhadněte z těchto údajů viskozitu skla a určete, kolikrát těžší by musela být Země, aby toto tečení probíhalo turbulentně.

Úloha VI. 4 ... pevnost nosníku

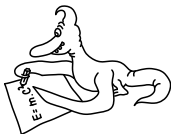
Uvažujte pružný nosník délky l . Energie potřebná k prohnutí jednotky délky tohoto nosníku na poloměr křivosti R je $E = \alpha/R^2$, kde α je známá konstanta. Jakou maximální silou můžeme tlačit na tento nosník, aby se neprohnul do strany?

Úloha VI. P ... elektromagnetický paradox

Na dielektrický disk volně se otáčející kolem své osy přilepíme závit supravodivého drátu v němž teče proud I_0 . Dále kolem tohoto závitu symetricky přilepíme elektricky nabitě kuličky o náboji q . Celý disk poté začneme pomalu zahřívat. V jistém okamžiku přestane být drát supravodivý, takže v něm přestane téct proud a změní se magnetický tok přes závit. V důsledku toho vznikne podle Faradayova zákona okolo tohoto závitu elektrické pole, které bude působit na přilepené náboje, takže se celý disk začne otáčet. Na druhou stranu musí zůstat podle zákona zachování hybnosti v klidu. Tak kde je v předcházejících úvahách chyba?

Úloha VI. E ... sušení prádla

Změřte časovou závislost množství vody v prádle při sušení. Nezapomeňte podrobně popsat všechny důležité podmínky, za kterých jste prováděli měření.



Řešení IV. série

Úloha IV. 1 ... rámus ve vesmíru (4 body; průměr 1,86; řešilo 21 studentů)

- a) Hustota mezihvězdného prostředí je asi 10 až 10 000 částic na metr krychlový. Tvoří ho převážně vodík. Vzdálenost mezi částicemi je tak velká, že se toto prostředí chová jako ideální plyn. Na vás je rozmyslet, zda se v takovém „vakuu“ může šířit zvuk a pokud ano, jaká může být jeho frekvence?
- b) Jaká je maximální frekvence zvuku, který se může šířit ve vzduchu za normálních podmínek?

Zvuk je mechanické vlnění o frekvenci v rozmezí zhruba $20 \div 16000$ Hz, které vyvolává sluchový vjem. Vlnění o frekvenci menší než 20 Hz nazýváme infrazvuk, vlnění s frekvencí větší než 16 kHz pak ultrazvuk.

- a) Šíření zvukové vlny probíhá prostřednictvím změn tlaku v důsledku stlačování vzduchu. Máme-li ve dvou oblastech různé hustoty molekul, pak podle kinetické teorie víme, že by molekuly z oblasti s větší hustotou měly přejít do oblasti s menší hustotou, aby se tento rozdíl vyrovnal. V takovém případě bychom ovšem žádné tlakové oscilace nedostali a neměli bychom ani zvuk. Proto je pro vznik zvuku nezbytné, aby střední volná dráha l_s molekul byla mnohem menší než vzdálenost mezi maximem a minimem tlaku, která představuje polovinu vlnové délky vlnění λ .

Střední volnou dráhu můžeme spočítat ze vztahu:

$$l_s = \frac{1}{\sigma n},$$

kde σ představuje tzv. účinný srážkový průřez a n je hustota molekul vztažená na jednotkový objem. Uvážíme-li jako výplň mezihvězdného prostoru molekulární vodík, pro nějž $\sigma \approx 10^{-19} \text{ m}^2$ a $n \approx 10^1 \div 10^4$, dostáváme pro jeho střední volnou dráhu $l_s \approx 10^{15} \div 10^{19} \text{ m}$.

Pro vlnovou délku λ zvukového vlnění platí vztah

$$\lambda = \frac{v_z}{f},$$

kde f je frekvence zvuku a v_z je jeho rychlost. Tu spočteme ze vztahu

$$v_z^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Uvážíme-li, že změna tlaku s hustotou ve zvukové vlně odpovídá adiabatické změně, tedy $pV^\kappa = \text{konst}$, dostáváme

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\kappa p}{\rho}.$$

Úžitím stavové rovnice pro ideální plyn $pV = nkT$ získáváme

$$v_z = \sqrt{\frac{\kappa kT}{m}}.$$

Teplotu oblaku ve volném prostoru odhadneme podle teploty reliktního záření na $T = 5 \text{ K}$. Pro tuto teplotu má vodík Poissonovu konstantu $\kappa_H = 5/3$ (rotační i vibrační stupně volnosti jsou zamrzlé). Po dosazení $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$, $m = 3,32 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, vychází rychlost zvuku $v_z = 190 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Úvodní podmínka dává

$$l_s \ll \frac{\lambda}{2} \Rightarrow f \ll \frac{v_z}{2l_s} \approx 10^{-16} \div 10^{-13} \text{ Hz}.$$

Jak je vidno, to co se bude vesmírem šířit, lze stěží nazvat zvukem, natožpak rámusem.

- b) Vyjdeme ze stejných úvah jako v první části úlohy. Uvažujme $T = 300 \text{ K}$, při které má vzduch (směs dvou dvouatomových plynů) Poissonovu konstantu $\kappa_{vz} = 7/5$ (tři translační a dva rotační stupně volnosti, vibrační jsou zamrzlé). Dále dosadíme $m = 5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, $\sigma \approx 3 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$, $n \approx 6 \cdot 10^{23}$. Při těchto hodnotách dostáváme $f \approx 60 \text{ MHz}$. Tuto hodnotu ovšem nelze brát příliš dogmaticky, neboť při výpočtu záleží na zvolených hodnotách a výsledek se může i řádově lišit. Nicméně lze říci, že horní mez se pohybuje v řádově desítkách až stovkách MHz.

Lukáš Schmiedt

krysar@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.2 ... galaktický paradox (3 body; průměr 1,74; řešilo 42 studentů)

Ve sluneční soustavě se planety, které jsou ke Slunci blíže, pohybují rychleji než planety vzdálenější. V Galaxii se hvězdy blíže středu pohybují pomaleji než hvězdy vzdálenější. Zdůvodněte tento zdánlivý rozpor.

Najprv sa pozrime na to, ako vyzerá závislosť obežnej rýchlosti na vzdialenosti v Slnčnej sústave (ďalej len SS).

Zanedbajme gravitačné pôsobenie ostatných planét na našu testovaciu planétu a predpokladajme, že jedinou silou pôsobiacou na planétu SS je gravitačná sila Slnka. Pre zjednodušenie tiež predpokladajme, že planéty sa pohybujú okolo Slnka po kružniciach. V rotujúcej sústave na planétu pôsobí odstredivá a gravitačná sila. Z ich rovnosti vyjadríme obežnú rýchlosť (M_\odot je hmotnosť Slnka)

$$G \frac{M_\odot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad \implies \quad v = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}}. \quad (1)$$

Galaxia je na rozdiel od SS vyplnená hviezdami. Hviezdy sa okolo stredu pohybujú akoby v „polievke“ tvorenej ostatnými hviezdami. A toto je kľúč k riešeniu nášho paradoxu.

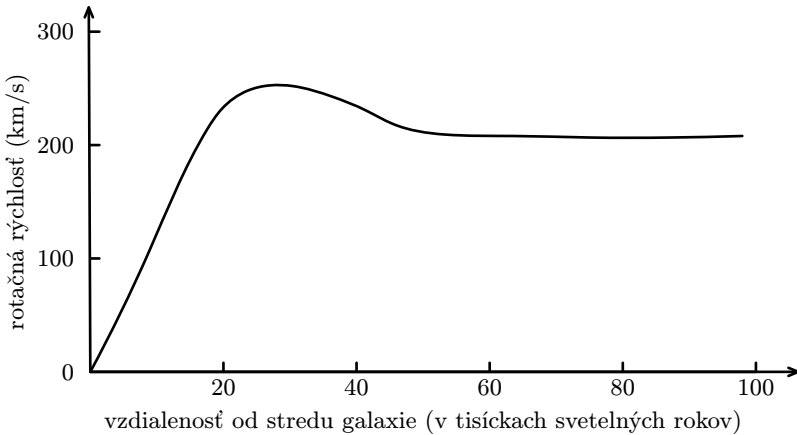
Zavedme hustotu H ako hustotu hmoty v okolí stredu galaxie. Dá sa dokázať, že vo vnútri guľovej vrstvy pôsobí na teleso nulová výsledná sila, lebo všetky príspevky od guľovej vrstvy sa navzájom vyrušia. Preto ďalej môžeme uvažovať iba hmotu, ktorá je bližšie k stredu galaxie ako naša testovacia hviezda. Použijeme ešte jednu myšlienku (opäť bez dôkazu), že guľové homogénne teleso priťahuje našu planétu rovnakou silou ako keby bola všetka hmota umiestnená v jeho strede. Rečou vzorcov:

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{M_g m}{r^2}, \quad v = \sqrt{\frac{GM_g}{r}}, \quad v = r \sqrt{\frac{4}{3} \pi H G},$$

kde $M_g = \frac{4}{3}\pi Hr^3$ je hmotost gule s polomerom rovnakým ako je vzdialenosť našej testovacej hviezdy od stredu Galaxie.

Vidíme, že v okolí stredu galaxie sa hviezdy naozaj pohybujú vo väčších vzdialenostiach rýchlejšie. Toto však platí iba približne, pretože v istej vzdialenosti prestane mať naša Galaxia tvar gule a zmení svoj tvar na šoškovkovitý. Hustota hviezd sa so vzdialenosťou od stredu tiež zmenšuje.

Na obrázku 1 vidíme náčrt obežnej rýchlosti hviezd okolo stredu pre galaxiu M 31. Prečo je vo väčších vzdialenostiach obežná rýchlosť konštantná, si možno povieme v budúcnosti pri inom príklade.



Obr. 1

Pavol Habuda

bzuc@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV. 3 ... *plavajcí ledovec* (4 body; průměr 0,94; řešilo 32 studentů)

Představme si ve vesmíru rotující planetu pokrytou po celém povrchu hlubokým oceánem. Na planetě v určitém místě přistane kosmický mnohoživelník, který volně plove na hladině a není vybaven pohonem použitelným ve vodě. Jakým směrem se začne z klidu pohybovat?

Nejdříve se zamyslíme nad tím jaký bude tvar planety. Protože je planeta tvořena vodou, bude povrch její hladiny vždy kolmý na síly, které na vodu působí. Na vodu působí jak gravitační tak odstředivá síla. Voda se ustálí tak, aby tyto síly byly kolmé na hladinu. Kdyby výslednice nebyla kolmá, voda by se začala pohybovat a tedy by nebyla v rovnováze. Hladina tedy tvoří ekvipotenciální plochu.

Představme si teď na hladině těleso, které je zčásti ponořené. Určitě tam bude působit tíhová (gravitační + odstředivá) síla. Tíhová síla působí v těžišti daného tělesa. Proti ní bude působit vztlaková síla. Zamyslíme se nad tím, kde tato síla působí. Kdyby místo ponořené části tělesa byla voda, tak tíhová a vztlaková síla na vodu budou stejné a budou mít působíště v geometrickém těžišti ponořené části. Takže působíště vztlakové síly na původní těleso bude také v těžišti ponořené části. Vztlaková síla bude působit kolmo na ekvipotenciálu v bodě těžiště ponořené části tělesa. Její velikost bude přesně taková, aby vyrovnala průmět tíhové

síly do svého směru. Zbytek tíhové síly (bude působit kolmo na vztlakovou) zůstane nevyrušený a rozpožhybuje těleso.

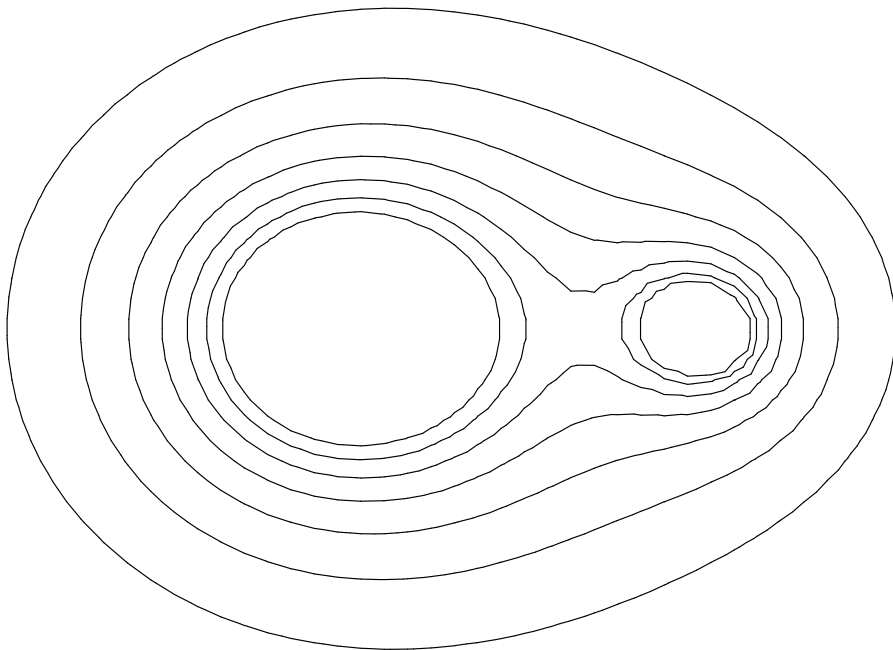
Takže pokud chceme vědět, kterým směrem se těleso pohybuje, musíme vědět, kterým směrem tato síla působí. Vzdálenější ekvipotenciály jsou více zploštělé (gravitační síla se vzdáleností klesá, zatímco odstředivá roste), tedy výslednice vztlakové síly (působí kolmo na spodní ekvipotenciálu směrem nahoru) a tíhové síly (působí kolmo na horní ekvipotenciálu směrem dolů) bude mířit směrem k rovníku.

Nutno ovšem poznamenat, že velikost této síly bude za reálných podmínek velmi malá a měřitelnost tohoto jevu např. na Zemi je diskutabilní.

Miro Kládva
miro@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... ekvipotenciály (4 body; průměr 2,13; řešilo 24 studentů)

Zjistěte poměr velikostí nábojů dvou částic. Ekvipotenciály jejich elektrického pole vidíte na obr. 2 na str. 5. Zkuste také odhadnout přesnost vaší metody.



Obr. 2. Naměřený tvar ekvipotenciál elektrického pole dvou částic

Náboj vlevo označme Q_a , vpravo Q_b . Z obrázku je vidět, že oba náboje musí mít stejné znaménko, jinak by ekvipotenciály byly hustější mezi náboji a ty, které jsou nábojům nejbližší, by byly protaženy nahoru nikoliv do stran.

Potenciál bodového náboje Q ve vzdálenosti r od něj (volíme-li nulovou hladinu v nekonečnu) je $\varphi = kQ/r$, kde k je konstanta závislá pouze na volbě jednotek. Elektromagnetické pole je aditivní, tudíž potenciál od dvou nábojů je roven součtu potenciálů od každého z nich.

V našem případě tedy

$$\varphi = k \left(\frac{Q_a}{r_a} + \frac{Q_b}{r_b} \right),$$

kde $r_{a,b}$ je samozřejmě vzdálenost levého resp. pravého náboje od zvoleného bodu. Označíme-li poměr nábojů $q = Q_a/Q_b$, pak pro všechny body jedné ekvipotenciály platí

$$\text{konst} = \frac{q}{r_a} + \frac{1}{r_b}. \quad (2)$$

Při proměřování obrázku se pro jednoduchost omezíme na body na horizontální ose, kterou s dostatečnou přesností získáme např. po přeložení obrázku napůl. Nulu zvolme kdekoliv na této ose. Označíme-li s_a, s_b polohy nábojů, r, r' polohy dvou bodů na jedné ekvipotenciále, např. té vnější, dostaneme ze vztahu (2) pro poměr nábojů q

$$q = \frac{\frac{1}{r' - s_b} - \frac{1}{s_b - r}}{\frac{1}{s_a - r} - \frac{1}{r' - s_a}}. \quad (3)$$

Zásadním problémem úlohy je, že neznáme polohu nábojů. Můžeme ji jen odhadnout jako přibližný střed nejmenších ekvipotenciál. Fyzik se ovšem s takovým odhadem nespokojí. Nejprve přemýšlí nad chytřejší metodou, ke které by středy nábojů nepotřeboval. Napadne ho změřit si rozměr další ekvipotenciály a sestavit tři rovnice pro tři neznámé s_a, s_b a q . Vždy se však dostane k rovnicím, které neumí vyřešit jinak než numericky. Numerické řešení je lepší než odhad, zde i v mnoha jiných případech je to asi nejšikovnější možnost.

My se v řešení ovšem pro ilustraci přikloníme k postupu, jehož schéma se donekonečna opakuje zejména v kvantové mechanice či v teorii pevných látek a říká se mu poruchový počet. Jeho výhodou od čistě numerického výpočtu je alespoň částečná další použitelnost.

Označme $s_a^{(0)}, s_b^{(0)}$ odhadnuté polohy částic a $q^{(0)}$ poměr nábojů z nich vypočtený podle vztahu (3). Dále hledíme první opravu k polohám nábojů $\Delta_{a,b}^{(0)}$. Přesnější polohy nábojů označme

$$s_{a,b}^{(1)} = s_{a,b}^{(0)} + \Delta_{a,b}^{(0)}. \quad (4)$$

Předpokládejme, že $\Delta_{a,b}^{(0)}$ jsou velmi malé oproti $s_{a,b}^{(0)}$. Pak můžeme přibližně psát

$$\frac{1}{s \pm \Delta} = \frac{1}{s} \mp \frac{\Delta}{s^2}. \quad (5)$$

Napišeme nyní rovnici (2) pro dva body r_1, r'_1 první vnější a dva body r_2, r'_2 např. páté vnější ekvipotenciály. Zlomky prepíšeme pomocí přibližného vztahu (5), dejte přitom zvláštní pozor na znaménka

$$\begin{aligned} & q^{(0)} \left(\frac{1}{s_a^{(0)} - r_1} - \frac{\Delta_a^{(0)}}{(s_a^{(0)} - r_1)^2} \right) + \frac{1}{s_b^{(0)} - r_1} - \frac{\Delta_b^{(0)}}{(s_b^{(0)} - r_1)^2} = \\ & = q^{(0)} \left(\frac{1}{r'_1 - s_a^{(0)}} + \frac{\Delta_a^{(0)}}{(r'_1 - s_a^{(0)})^2} \right) + \frac{1}{r'_1 - s_b^{(0)}} + \frac{\Delta_b^{(0)}}{(r'_1 - s_b^{(0)})^2}, \\ & q^{(0)} \left(\frac{1}{s_a^{(0)} - r_2} - \frac{\Delta_a^{(0)}}{(s_a^{(0)} - r_2)^2} \right) + \frac{1}{s_b^{(0)} - r_2} - \frac{\Delta_b^{(0)}}{(s_b^{(0)} - r_2)^2} = \\ & = q^{(0)} \left(\frac{1}{r'_2 - s_a^{(0)}} + \frac{\Delta_a^{(0)}}{(r'_2 - s_a^{(0)})^2} \right) + \frac{1}{r'_2 - s_b^{(0)}} + \frac{\Delta_b^{(0)}}{(r'_2 - s_b^{(0)})^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

To jsou dvě lineární rovnice pro dvě neznámé $\Delta_a^{(0)}$ a $\Delta_b^{(0)}$, které každý umí vyřešit. Podle vztahu (4) spočteme přesnější polohy nábojů, podle (3) pak přesnější poměr nábojů $q^{(1)}$ a tak dále, až se další výsledky nebudou příliš lišit, pak máme důvod se domnívat, že se blížíme přesnému řešení. Poznamenejme ještě, že o konvergenci této metody by šlo napsat mnoho stránek. Zvolíme-li však počáteční polohy nepříliš daleko od skutečných, konverguje uspokojivě.

Následují námi naměřené hodnoty v milimetrech:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,0, & r'_1 &= 117,6; \\ r_2 &= 23,9, & r'_2 &= 100,7; \\ s_a^{(0)} &= 45,0, & s_b^{(0)} &= 92,5. \end{aligned}$$

Podle (3) dostaneme $q^{(0)} = 3,44$ pro r_1, r'_1 a $q^{(0)} = 3,65$ pro r_2, r'_2 , v dalším použijeme průměr $q^{(0)} = 3,54$. Vyřešením rovnic (6) dostaneme pro opravy na polohu nábojů

$$\begin{aligned} \Delta_a^{(0)} &= 0,89, & \Delta_a^{(1)} &= -0,19, & \Delta_a^{(2)} &= +0,0055, \\ \Delta_b^{(0)} &= -0,74, & \Delta_b^{(1)} &= +0,18, & \Delta_b^{(2)} &= -0,0051, \\ q^{(1)} &= 3,47, & q^{(2)} &= 3,47, & q^{(3)} &= 3,47. \end{aligned}$$

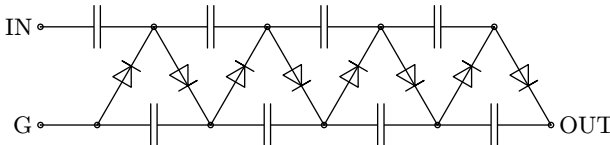
Vzhledem k tomu, že používaný metr měří s přesností asi 0,5 mm, obrázek je hrbatý atd., nechali jsme proběhnout výpočet pro několik nepatrně jiných hodnot r . Z výsledků je možno usoudit, že chyba námi získaného poměru nábojů je asi 4%. Tedy výsledek

$$q = 3,47 \pm 0,13.$$

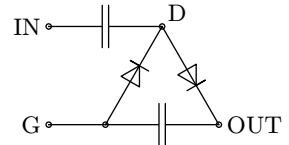
Graf v zadání byl generován pro hodnotu $q = 3,5$, tedy shoda je výborná. K nejpřesnějšímu výsledku se z řešitelů dostal Matouš Ringel $q = 3,49 \pm 0,15$, patří mu za to prémiový bod. Podotkneme, že chyba by bylo možno eliminovat změřením bodů na více ekvipotenciálách.

Lenka Zdeborová
lenka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV. P ... násobič napětí (5 bodů; průměr 3,47; řešilo 17 studentů)



Obr. 3. Násobič napětí



Obr. 4. Miniverze

Na vstup (IN) obvodu na obr. 3 přivedeme vůči zemi (G) harmonické střídavé napětí o amplitudě U a frekvenci f . Jaké napětí naměříme na výstupu (OUT)? Diody považujte za ideální, velikosti kapacit si zvolte nebo řešte úlohu obecně. Nevíte-li si rady, zkuste nejprve jednodušší případ – zapojení pouze se dvěma diodami a kondenzátory (viz obr. 4).

Tato úloha nebyla problémová obtížností, ale nutností uvědomit si, jak vlastně obvod funguje. Navíc předpoklady byly velmi jednoduché. Uvažujeme totiž nezatížený násobič (ve kterém

nedochází k průběžnému odčerpávání náboje z výstupu (OUT), a tedy stačí najít jakýsi rovnovážný stav. V technické praxi se navíc do obvodu řadí rezistor, který slouží k jisté stabilizaci a snižuje energetické ztráty na kondenzátorech způsobené oscilacemi, které nejsou nutné k násobení napětí. V naší idealizaci žádná rezistance zařazena není a tudíž budou kondenzátory reagovat na změny napětí na vstupu (IN) okamžitě.

Zabývejme se nejprve jednoduchým násobičem. V bodě G můžeme předpokládat $\varphi = 0$. Potenciál v bodě mezi diodami (označme D) je pak $U_{in} - U_1$, kde U_1 je napětí na horním kondenzátoru orientované tak, že kladná hodnota odpovídá kladné desce vlevo. Podle orientace diod zjevně platí nerovnost

$$0 \leq U_D \leq U_{out}. \quad (7)$$

V okamžiku, kdyby U_D mělo opustit tento interval, začne příslušnou diodou procházet proud. Předpokládejme, že na počátku není na výstupu žádné napětí, tj. $U_{out} = 0$ a na vstupu je libovolné napětí U_{in} . Podle (7) je $U_D = 0$ a $U_1 = U_{in}$.

Sledujme nyní, co se děje, měníme-li U_{in} . Začněme jednodušším směrem, což je snižování U_{in} . Pokud by se nezměnilo U_1 , došlo by k porušení levé části nerovnosti. Bude proto procházet proud levou diodou a to tak, že bude udržovat $U_1 = U_{in}$.

Pokud naopak při růstu U_{in} narazí U_D na hranici danou nerovností (7), začne proud procházet pravou diodou, což má za následek nabíjení spodního kondenzátoru a tedy i růst U_{out} . Současně poroste i U_1 tak, že bude platit $U_{in} - U_1 = U_{out}$.

Shrme-li dosavadní poznatky, tak při periodických změnách U_{in} nejprve vždy U_1 klesne na hodnotu $U_1 = U_{in, \min}$ a poté je U_{out} zvětšeno na hodnotu $U_{out} = U_{in, \max} - U_1'$. Čárka u U_1' je z toho důvodu, že při zvětšování U_{out} roste U_1 a tedy $U_1' > U_1$. Pokud se ale děj neustále opakuje, jsou změny U_{out} stále menší a tím i nárůsty U_1 , tedy po hodně opakování U_{out} dosáhne hodnoty

$$U_{out, \max} = U_{in, \max} - U_1 = U_{in, \max} - U_{in, \min}.$$

Dolní kondenzátor se tedy nabije na napětí, které odpovídá rozdílu maximální a minimální hodnoty vstupního napětí. Nezáleží přitom na počáteční hodnotě U_{in} , pouze na jeho změnách. V tom je skrytý princip násobiče.

Nyní je již snadné dokončit řešení úlohy. Uvažovaný mininásobič s harmonickým napětím o amplitudě U_0 na vstupu se nabije na napětí $U_{in, \max} - U_{in, \min} = U_0 - (-U_0) = 2U_0$. Mezi jeho body OUT a D je napětí osciluje mezi 0 a $2U_0$. Připojíme-li nyní další mini-násobič do řady, můžeme napětí mezi G a OUT považovat za jeho vstup, atd.

Zde je menší problém, na který je vhodné upozornit. Výstup násobiče nelze považovat za ideální zdroj, neboť při odběru proudu na něm dojde k poklesu napětí. V našem případě *nezatíženého* násobiče to ale nevádí, protože s časem se jednotlivé násobiče saturují a procházející proud se neustále zmenšuje, až nakonec celý obvod bude nasycený a proudy nebudou procházet žádně.

Každý další mini-násobič přidá k celkovému U_{out} hodnotu $2U_0$, tedy hledaný vztah je

$$U_{out} = nU_0,$$

kde n je počet kondenzátorů. Tím je úloha vyřešená. Na vás už nechávám, abyste se zamysleli nad množstvím nezodpovězených otázek, které se při řešení objevily – jak se bude chovat zatížený násobič, jaký je vhodný poměr kapacit kondenzátorů, jak rychle se násobič saturuje,

jak moc se projevuje to, že ve skutečnosti diody ani kondenzátory nejsou ideální atd.

Honza Houštek

honza@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV. E ... Od medvídky Pú (8 bodů; průměr 4,32; řešilo 19 studentů)

Výzkumný ústav medvídky Pú při AV ČR vypsal grant ve výši osmi (výjimečně více) bodů na změření závislosti viskozity medu na teplotě. Nezapomeňte uvést druh medu, který používáte.

Metody měření

Nejčastějšími postupy bylo měření doby pádu tělíška v medu a průtoku medu kapilárou, ale objevily se i originálnější nápady, jako například měření doby za jakou skápneme med ze lžičky nebo za jak dlouho steče po nakloněné rovině. Bohužel v těchto případech se chování medu nedá popsat jednoduchým modelem a získané výsledky se dají použít jen kvalitativně. Vzhledem k velmi rozdílným naměřeným hodnotám jsme se rozhodli použít úplně jinou metodu měření než všichni řešitelé. Jádrem našeho experimentu byl model rotačního viskozimetru, tj. dva souosé rotační válce, mezi kterými je nalitý med. Vnější válec o poloměru r_1 (v našem případě obyčejná kádinka) je pevně uchycen a ponořen ve vodní lázni. Na vnitřním válci o poloměru r_2 je v horní části natočená nit, která vede na kladku a na jejím konci visí závažíčko o hmotnosti m . Tuto část aparatury nebyl problém sestavit ze stavebnice LEGO. Pokus potom vypadal následovně: pustili jsme závažíčko a to roztočilo vnitřní válec. Díky viskozitě medu tak vznikla odporová síla F_m , která pohyb závažíčka brzdila. Zároveň samozřejmě působila i odporová síla F_o aparatury vzniklá třením v ložiscích. Tu jsme odhadli jako úměrnou rychlosti pohybu závažíčka a koeficient úměrnosti k získali tak, že jsme nechali závažíčko padat, když ještě mezi válci nebyl med.

Teorie

Pro smykové napětí τ v kapalině o viskozitě η mezi válci bude platit vztah

$$\tau = \frac{\eta r \Delta \omega}{\Delta r}.$$

Moment síly M , který působí na válcové ploše s poloměrem r a výškou h lze získat tak, že vynásobíme smykové napětí ramenem síly r a plochou $2\pi r h$

$$M = 2\pi r^2 h \tau = \frac{2\pi \eta r^3 h \Delta \omega}{\Delta r}.$$

Vzhledem k tomu, že je proudění medu ustálené, musí být výsledný moment síly, který působí na vrstvu medu o poloměru r nulový (je v rovnováze se stejně velkým momentem působícím na vrstvu v opačném směru ve vzdálenosti $r + \Delta r$). Uvažovaný moment tedy musí být nezávislý na r a proto

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta r} = \frac{A}{r^3}.$$

Po zintegrování bude úhlová rychlost

$$\omega = -\frac{A}{r^2} + B.$$

Konstanty A a B získáme z počátečních podmínek

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 \quad \text{při} \quad r = r_2, \\ \omega &= 0 \quad \text{při} \quad r = r_1.\end{aligned}$$

Výsledný vztah pro moment síly potom bude

$$M = \frac{4\pi r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \eta h \omega_1,$$

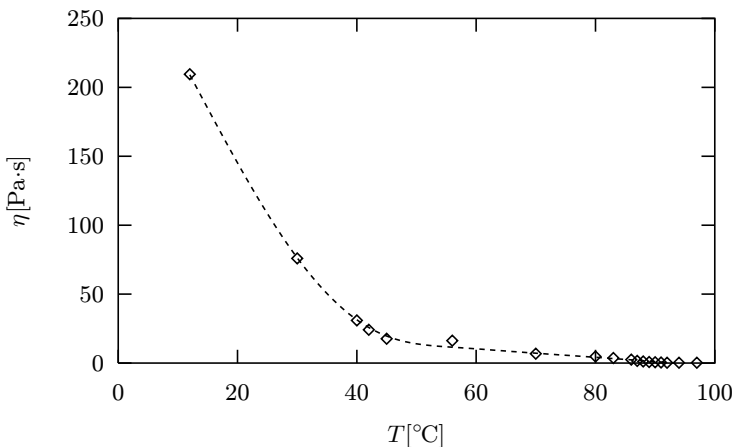
Dosadíme-li za $\omega_1 = L/tr_2$, kde L je délka dráhy, po které se závažíčko pohybovalo, a t čas, za který tuto dráhu urazilo (pohyb se dá považovat za rovnoměrný), a za moment síly $M = r_2 (mg - kL/t)$ vyjde η

$$\eta = \frac{(mgt - kL)(r_1^2 - r_2^2)}{4\pi h r_1^2 L t}.$$

Je třeba dbát na to, aby ω nepřekročila mez laminárního proudění medu. Tato hranice je obvykle charakterizovaná tzv. Reynoldsovým číslem. Pro naše uspořádání bude

$$R = (r_1 - r_2) r_2 \omega \frac{\rho}{\eta} < 1900.$$

T [°C]	12	30	40	42	45	56	70	80	83
η [Pa·s]	209,5	75,9	30,94	24,13	17,62	16,27	6,80	4,78	3,63
σ_η [Pa·s]	2,9	2,0	0,81	0,63	0,46	0,42	0,43	0,18	0,13
T [°C]	86	87	88	89	90	91	92	94	97
η [Pa·s]	2,49	1,557	1,181	0,773	0,575	0,382	0,252	0,237	0,233
σ_η [Pa·s]	0,10	0,071	0,048	0,040	0,032	0,029	0,018	0,015	0,015



Obr. 5. Naměřená závislost viskozity medu na teplotě

Výsledky měření

Snadným výpočtem se přesvědčíme, že jsme opravdu mez laminárnosti nepřekročili a náš fyzikální model je tedy platný. Jak je patrné z grafu, tvar závislost je klesající, největší pokles pozorujeme při teplotách do 40 °C. Teoretické vysvětlení pozorované závislosti se nám nepodařilo nalézt, domníváme se ale, že pokud nějaké existuje, bude značně složité.

Pár poznámek k řešení

Každé správné vyhodnocení experimentu by nemělo postrádat výpočet odchylky měření, v opačném případě nevíme jak přesné výsledky jsou a tím v podstatě ztrácejí význam. Dále je vhodné vypracovat graf toho, co bylo v zadání experimentu (hodně řešitelů kreslilo graf závislosti průtoku kapilárou na teplotě). Na závěr bychom chtěli poděkovat nejmenované řešitelce za ochutnávku a několika dalším za tipy na kvalitní med.

Michael Komm

michael@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV. S ... diferenciální rovnice (5 bodů; průměr 3,90; řešilo 10 studentů)

- a) Organizátor FYKOSu vypil velmi rychle láhev tvrdého alkoholu. Alkohol se z žaludku vstřebává do krve rychlostí úměrnou jeho množství (v žaludku) s konstantou úměrnosti α a z krve je odbouráván játry podle stejného vztahu, tentokrát však s konstantou úměrnosti β . Sestavte diferenciální rovnici popisující tyto děje, určete závislost množství alkoholu v krvi na čase, určete čas, ve kterém je koncentrace maximální a vypočítejte ji.
- b) Šnek plazící se rychlostí $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ se v čase t_0 postaví na začátek gumového lana dlouhého 1 m a začne se plazit. Ve stejném okamžiku se lano začne napínat rychlostí $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (je nekonečně pružné takže nikdy nepraskne). Rozhodněte, zda šnek dosáhne konce lana v konečném čase a pokud ano, spočítejte, za jak dlouho se tak stane.
- c) Takzvaná redukovaná Gaussova rovnice má tvar

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0.$$

Předpokládejte řešení ve tvaru Taylorova polynomu, určete vztah pro jeho koeficienty a vyšetřete asymptotické chování řešení (tj. určete jakou funkci by se dalo vystihnout jeho chování pro velká x). Určete pro jaké hodnoty koeficientů γ a α je konečný tento integrál

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} F(\alpha, \gamma, x) dx,$$

kde $F(\alpha, \gamma, x)$ značí řešení Gaussovy rovnice (takzvaná redukovaná hypergeometrická funkce). Poznámka: Pokud označíme $E = -1/\alpha^2$, dostaneme z poslední rovnice pro E zajímavou podmínku. A pokud se vám při pohledu na ni začíná vybavovat vzorec pro možné hodnoty energie elektronu v atomu vodíku, pak vezte, že podobnost s vaším výsledkem není vůbec náhodná.

- a) Množství alkoholu v žaludku (označme A) podle zadání klesá rychlostí úměrnou A , takže se vyvíjí podle diferenciální rovnice

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A.$$

Tuto rovnici vyřešíme metodou separace proměnných

$$\int \frac{dA}{A} = \int -\alpha dt,$$

$$\ln A = -\alpha t + C.$$

V čase $t = 0$ je množství alkoholu v žaludku rovno jeho počátečnímu (vypitému) množství A_0 , takže integrační konstanta má hodnotu $\ln A_0$. Množství alkoholu v žaludku tedy klesá podle vztahu

$$A = A_0 e^{-\alpha t}.$$

Koncentrace alkoholu v krvi (označme B) je zvyšována jeho vstřebáváním z trávicího ústrojí, ale zároveň je snižována odbouráváním játry. Vychází se tedy podle rovnice

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{dA}{dt} - \beta B.$$

Dosazením za dA/dt dostaneme

$$\frac{dB}{dt} + \beta B = \alpha A_0 e^{-\alpha t}. \quad (8)$$

Tuto nehomogenní diferenciální rovnici vyřešíme metodou variace konstant. Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici. Na ni můžeme použít například metodu charakteristického polynomu. Budeme předpokládat, že řešení má tvar $B = Ce^{\lambda t}$. Tím dostaneme

$$\lambda B + \beta B = 0,$$

tedy $\lambda = -\beta$. Řešení homogenní rovnice nyní dosadíme do původní rovnice (8) a budeme předpokládat, že konstanta C která v něm vystupuje není konstantní, ale je závislá na čase. Dostáváme

$$\frac{dC}{dt} e^{-\beta t} - \beta C e^{-\beta t} + \beta C e^{-\beta t} = \alpha A_0 e^{-\alpha t},$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha A_0 e^{(\beta-\alpha)t}.$$

Poslední rovnici vyřešíme integrací podle času

$$C(t) = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha} e^{(\beta-\alpha)t} + K,$$

kte K je integrační konstanta. Řešení (8) má tedy tvar

$$B = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} + K e^{-\beta t}.$$

Jedná se dokonce o obecné řešení, protože v něm vystupuje obecný násobek řešení homogenní rovnice. Hodnotu K určíme z požadavku, aby v čase $t = 0$ bylo $B = 0$ (na začátku je organizátor střízlivý). Závislost B na čase je tedy

$$B = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \right). \quad (9)$$

Z (8) vidíme, že B je maximální, když $\alpha A = \beta B$. Tato rovnost je splněna v čase

$$t = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dosazením do (9) dostáváme pro maximální koncentraci

$$B_{\max} = \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha} \left(\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta - \alpha}} - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}} \right).$$

- b) Polohu šneka popíšeme parametrem x udávajícím jeho relativní polohu vůči konci vlákna (na začátku je $x = 0$ a na konci $x = 1$). Za krátký časový okamžik dt se šnek posune vůči místu na kterém zrovna stojí o malou vzdálenost $ds = v_s dt$ kde v_s je rychlost šneka (protážení úseku ds je zanedbatelné). V čase t je délka lana $l = l_0 + v_l t$, kde v_l je rychlost konce lana. Změna relativní polohy šneka za čas dt je tedy

$$dx = \frac{ds}{l} = \frac{v_s dt}{l_0 + v_l t}.$$

Tím dostáváme rozseparovanou diferenciální rovnici, kterou vyřešíme integrací obou stran

$$\int dx = \int \frac{ds}{l} = \frac{v_s dt}{l_0 + v_l t},$$

$$x = \frac{v_s}{v_l} \ln \left(\frac{l_0}{v_l} + t \right) + C.$$

V čase $t = 0$ je $x = 0$, takže integrační konstanta C má hodnotu

$$C = -\frac{v_s}{v_l} \ln \frac{l_0}{v_l}.$$

Relativní poloha šneka tedy na čase závisí jako

$$x = \frac{v_s}{v_l} \ln \left(1 + \frac{v_l t}{l_0} \right).$$

Na konec lana se šnek dostane v momentě, kdy $x = 1$, což nastane za čas

$$t = \frac{l_0}{v_l} \left(e^{v_l/v_s} - 1 \right) = (e^{1000} - 1) \text{s} \approx 10^{434} \text{s}.$$

- c) Řešení rovnice $zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0$ budeme předpokládat ve tvaru $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Z podmínky nulovosti koeficientů u všech mocnin z dostaneme vztah pro koeficienty a_n

$$n(n+1)a_{n+1} + \gamma(n+1)a_{n+1} - (n+\alpha)a_n = 0,$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+\alpha)a_n}{(n+1)(n+\gamma)}. \quad (10)$$

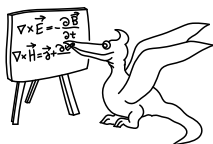
Pro velká n budou α i γ oproti n zanedbatelné, takže (10) přejde na

$$a_{n+1} \approx \frac{a_n}{n}$$

a koeficienty a_n tedy klesají zhruba jako $a_n \approx c/n!$, kde c je nějaká konstanta. Stejný Taylorův rozvoj má funkce e^z a řešení redukované hypergeometrické rovnice se tedy asymptoticky chová jako exponenciála (pokud $c \neq 0$). Zadaný integrál tedy v obecném případě není konečný, protože i po vynásobení klesající exponenciálou $e^{-z/2}$ se řešení stále asymptoticky chová jako $e^{z/2}$. Při pohledu na (10) však zjistíme, že pokud bude α nekladné celé číslo, budou od určitého n ($n = -\alpha$) všechny koeficienty a_n nulové. V tomto případě se tedy řešení Gaussovy rovnice zredukuje na pouhý polynom. A vzhledem k tomu, že $\int_0^\infty x^k e^{-x} dx$ je konečný pro všechna k a že součet konečně mnoha konečných čísel je konečný, bude konečný i zadaný integrál. Podmínka konečnosti tedy zní $\alpha = 0, -1, -2, -3, \dots$

Poznámka nakonec. Pokud ani argumenty uvedené ve čtvrtém díle seriálu náhodou nepodlomily vaši případnou důvěru v to, že každá funkce má Taylorův rozvoj, zamyslete se nad tím, proč jsme naznačeným postupem získali pouze jedno řešení, ačkoliv jsme řešili diferenciální rovnici druhého řádu.

Pavel Augustinský
pavel@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Vícerozměrné integrály

Ve třetím díle jsme si ukázali jak počítat integrály funkcí jedné proměnné. Také jsme si řekli, že integrovat musíme vždy, když chceme nějakým způsobem sčítat infinitezimálně malé příspěvky. Například když chceme znát hmotnost salámu, který má v každém místě jiný průřez p , musíme tento salám myšlenkově rozkrájet na velmi (infinitezimálně) tenké plátky tloušťky dx a sečíst (zintegrovat) hmotnosti těchto plátek. Je-li hustota salámu ρ a jeho délka l , bude jeho hmotnost $m = \int_0^l \rho p(x) dx$.

Obdobným způsobem však často musíme sčítat (integrovat) „infinitezimálně malé“ příspěvky rozložené nikoliv jen na přímce, ale v nějakém objemu nebo ploše. V tomto díle si ukážeme jak takovéto integrály počítat.

Pro začátek uvedme jednoduchý příklad. Podobně jako jsme spočítali hmotnost salámu, můžeme spočítat například hmotnost čtvercového plechu, který má v každém bodě jinou tloušťku. V tomto případě ale budeme sčítat hmotnosti malých elementů rozložených po ploše. Zavedme si souřadnice tak, aby jeden roh plechu ležel v bodě $(0, 0)$ a aby byly souřadné osy rovnoběžné s jeho stranami. Délka jeho strany je 1, jeho hustota je ρ a závislost tloušťky na poloze je dána funkcí $d = 10 + x^2 - xy^2$. Plech si můžeme myšlenkově rozdělit na tenké proužky šířky dx rovnoběžné s osou y . Každý z těchto proužků pak můžeme rozdělit na malé čtverečky o délce stran dx a dy . Celkovou hmotnost pak spočítáme tak, že nejprve spočítáme hmotnost jednoho proužku s danou x -ovou souřadnicí (integrací funkce d podle proměnné y , přičemž budeme považovat x za konstantu) a poté sečteme hmotnosti těchto proužků (říkáme, že integrujeme funkci $d(x, y)$ přes čtverec). Hmotnost proužku ležícího v bodě x širokého dx je

$$dm = \rho \left(\int_0^1 10 + x^2 - xy^2 dy \right) dx = \rho \left(10 + x^2 - \frac{1}{3}x \right) dx. \quad (11)$$

Nyní sečteme hmotnosti jednotlivých proužků integrací přes x a dostaneme výslednou hmotnost

$$m = \varrho \int_0^1 10 + x^2 - \frac{1}{3}x \, dx = \varrho \left(10 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \varrho \left(10 + \frac{1}{6} \right). \quad (12)$$

Hmotnost plechu samozřejmě nezávisí na způsobu, jakým jsme si ho myšlenkově „rozkrájeli“. Mohli bychom tedy postupovat také tak, že bychom nejprve spočítali hmotnost proužku rovnoběžného s osu x a poté sečetli hmotnosti těchto proužků. Skutečně, tímto postupem dostaneme

$$m = \varrho \int_0^1 \left(\int_0^1 10 + x^2 - xy^2 \, dx \right) dy = \varrho \int_0^1 10 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}y^2 \, dy = \varrho \left(10 + \frac{1}{6} \right), \quad (13)$$

což je stejný výsledek jako (12).

Obecně pokaždé, když počítáme vícerozměrný integrál, si oblast přes kterou integrujeme (například čtverec z minulého příkladu) vhodným způsobem rozdělíme na elementární „buňky“ a celý integrál pak spočítáme postupně pomocí obyčejných jednorozměrných integrálů. Výsledek přirozeně nezávisí na tom, jak jsme oblast rozdělili a v jakém pořadí počítáme jednotlivé integrály.

Ne vždy je ale situace tak jednoduchá jako v posledním příkladě. V něm jsme totiž integrovali přes čtverec, takže meze jednotlivých integrálů byly pevné (0,1). Pokud ale integrujeme přes složitější oblast, jsou meze jednotlivých integrálů obecně závislé na souřadnicích. Jak řešit takovéto problémy si ukážeme na dalším příkladě. Uvažujme opět plech z prvního příkladu. Tentokrát ho však rozříznem podél uhlopříčky spojující rohy o souřadnicích (1,0) a (0,1) a budeme počítat hmotnost pouze jednoho z takto vzniklých trojúhelníků (například (1,0), (0,0) a (0,1)). Ten si opět myšlenkově rozdělíme na tenké proužky šířky dx rovnoběžné s osou x . Tyto proužky ale nebudou všechny stejně dlouhé. Délka proužku ležícího v pásu $x, x + dx$ je $1 - x$ a jeho hmotnost je tedy dána integrálem. Rozhodně doporučujeme při výpočtu jakéhokoliv vícerozměrného integrálu kreslit obrázky – pomohou vám při rozhodování o tom, jak je výhodné dělit integrační oblast a jak závisí meze jednotlivých integrálů na souřadnicích.

$$dm = \varrho \left(\int_0^{1-x} 10 + x^2 - xy^2 \, dy \right) dx = \left(10(1-x) + x^2(1-x) - \frac{1}{3}x(1-x)^3 \right) \quad (14)$$

Celková hmotnost plechu pak bude součtem hmotností všech těchto proužků

$$m = \varrho \int_0^1 \left(10(1-x) + x^2(1-x) - \frac{1}{3}x(1-x)^3 \right) dx = 4 + \frac{11}{15}. \quad (15)$$

Jako cvičení si můžete spočítat hmotnost tohoto plechu tak, že si ho rozdělíte na proužky rovnoběžné s jeho přeponou a poté sečtete jejich hmotnosti (doporučujeme si v tomto případě natočit souřadné osy kartézských souřadnic tak, aby byla přepona rovnoběžná s jednou z těchto os). Zdůrazněme ještě, že ačkoliv výsledek vícerozměrné integrace nezávisí na pořadí provedení jednotlivých jednorozměrných integrací, dostali bychom například prohozením pořadí integrací (14) a (15) (bez dodatečných úprav) chybný výsledek. Meze integrálu (14) totiž závisí na proměnné x , takže pokud bychom bezmyšlenkovitě provedli nejprve integraci podle x , zůstala by tato proměnná v horní mezi integrálu podle y a dostali bychom tak nesmyslný výraz. Pořadí integrací tedy přehazovat můžeme, ale musíme je provést správným způsobem. Pamatujte si, že pokud integrujete podle nějaké proměnné, pak se tato proměnná nesmí vyskytovat v žádné z mezí, ale pouze ve funkci kterou integrujeme.

Důležitou aplikací vícerozměrných integrálů je výpočet objemů, povrchů a obsahů těles. Objem (povrch, obsah) tělesa spočítáme jednoduše tak, že zintegrujeme funkci 1 přes zkoumaný objem (povrch, obsah, ...). Ověřme například známý vztah pro obsah kruhu o poloměru R . Kruh si rozdělíme na tenké proužky šířky dx rovnoběžné s osou y . Obsah celého kruhu pak spočítáme tak, že nejprve spočítáme obsah jednoho proužku a poté tyto obsahy sečteme. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} S &= \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \, dy \right) dx = \\ &= 2 \int_0^R 2\sqrt{R^2-x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} R^2 \cos^2 t \, dt = \pi R^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Při integraci jsme mohli změnit meze vnějšího integrálu, protože obsah kruhu je dvojnásobkem obsahu půlkruhu, pokud bychom počítali integrál v nezměněné podobě, dostali bychom se do problémů s monotonií substituující funkce, a dále jsme zavedli substituci $x = R \sin t$. Pokud bychom chtěli počítat například objem koule, museli bychom ji rozřezat nejprve na tenké kruhy a tyto kruhy bychom dále rozdělili stejným způsobem jako v předchozím příkladě. Celkový objem by pak byl dán integrálem (počítáme objem pouze jedné osminy koule, který násobíme osmi)

$$V = 8 \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1 \, dz \right) dy \right) dx. \quad (17)$$

Jako cvičení dopočítejte tento integrál. Můžete si také spočítat objem čtyřrozměrné koule zobecněním výše uvedeného postupu. Doporučujeme opět spočítat pouze objem jedné šestnáctiny této koule ležící v prvním kvadrantu. Pokud se doberete k číslu $\pi^2 R^4/2$, postupovali jste správně.

Vraťme se nyní na chvíli k obyčejným integrálům a ukažme si, jak spočítat délku křivky dané grafem nějaké funkce $y(x)$. K tomu potřebujeme znát délku elementu této křivky ležícího v pásu $x, x + dx$. Tento element můžeme díky malosti dx považovat za přímý a jeho délku spočítat pomocí Pythagorovy věty. Domyslíme si k němu dvě odvěsny rovnoběžné se souřadnými osami, přičemž jedna z těchto odvěsen bude mít délku dx a délka druhé bude odpovídat přírůstku dy funkční hodnoty funkce y na intervalu dx . Tento přírůstek snadno spočítáme jako $dy = y' dx$. Délka elementu naší křivky tedy bude $dl = \sqrt{(dx)^2 + (y' dx)^2} = (\sqrt{1 + (y')^2}) dx$. Délka úseku křivky ležícího mezi body $x = a$ a $x = b$ pak bude

$$l = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx. \quad (18)$$

Analogicky bychom mohli spočítat, že povrch elementární plošky vyřiznutý z plochy dané funkcí $f(x, y)$ ležící nad obdélníčkem dx, dy je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy. \quad (19)$$

Pro demonstraci spočítejme povrch plochy ležící nad čtvercem s vrcholy o souřadnicích $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, která je dána funkcí $f(x, y) = 2(x^{3/2} + y^{3/2})/3$. Parciální derivace f podle x a y jsou $\partial f/\partial x = \sqrt{x}$, $\partial f/\partial y = \sqrt{y}$. Dosazením do (19) dostáváme pro velikost

elementární plošky $dS = \sqrt{1 + |x| + |y|}$ (na absolutní hodnoty můžeme v dalším zapomenout) a celkový povrch je tedy

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1+x+y} \, dx \, dy = \frac{2}{3} \int_0^1 (2+y)^{3/2} - (1+y)^{3/2} \, dy = \\ &= \frac{4}{15} (3^{5/2} - 22^{5/2} + 1) \approx 1,41. \end{aligned} \quad (20)$$

Z předcházejících příkladů je patrné, že použití kartézských souřadnic je při výpočtu některých vícerozměrných integrálů nevýhodné (meze jednotlivých integrálů vyjádřené v těchto souřadnicích jsou složité). Často se proto využívá jiných souřadných systémů. Z nich jsou nejběžnější polární a sférické souřadnice. Polární souřadnice popisují bod v rovině pomocí parametru r a φ . Jejich význam je vzdálenost bodu od počátku souřadné soustavy a úhel, který svírá průvodič (vektor mířící na tento bod) s pevně daným směrem (zpravidla daným osou x). Pomocí sférických souřadnic r, ϑ, φ , po řadě značících vzdálenost bodu od počátku souřadné soustavy, úhel který svírá průvodič s osou z a úhel který svírá projekce průvodiče do roviny xy s osou x , pak popisujeme polohu bodu v prostoru. Při použití jiných, než kartézských souřadnic (označme je q_1, \dots, q_n) však objem oblasti vymezené souřadnicemi $(q_1, q_1 + dq_1), \dots, (q_n, q_n + dq_n)$ není $dV = dq_1 dq_2 \dots dq_n$. Například při použití polárních souřadnic je element plochy dán výrazem $dS = r \, dr \, d\varphi$ a v souřadnicích sférických je element objemu $dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$. Použijeme-li jiné než polární nebo sférické souřadnice, můžeme velikost elementu objemu buďto uhádnout, nebo můžeme postupovat takto: Vyjádříme kartézské souřadnice v závislosti na nových souřadnicích a dostaneme tak vztahy $x_1 = f_1(q_1, \dots, q_n), \dots, x_n = f_n(q_1, \dots, q_n)$ (například ve sférických souřadnicích bychom dostali $x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi, x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi, x_3 = r \cos \vartheta$.) Spočítáme parciální derivace $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ které zapíšeme do matice a spočítáme její determinant $\det \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ (ten bývá označován jako *Jacobiho determinant* či *Jakobián*). Element objemu pak bude mít tvar $dV = \det \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_1 dq_2 \dots dq_n$, pokud si uvědomíte, že geometrický význam absolutní hodnoty determinantu matice je objem rovnoběžnostěny daného vektory tvořící její řádky a rozmyslete si význam parciálních derivací $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, zjistíte, že toto tvrzení je docela přirozené.

Užitečnost sférických souřadnic můžeme demonstrovat na výpočtu objemu koule (srovnejte se složitostí (17)). V těchto souřadnicích je koule daná rovnicemi $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle, r \in \langle 0, R \rangle$, kde R je její poloměr, rozmyslete si proč úhel φ probíhá hodnoty z $\langle 0, 2\pi \rangle$, ale úhel ϑ probíhá jen hodnoty z $\langle 0, \pi \rangle$. Objem koule je tedy dán integrálem

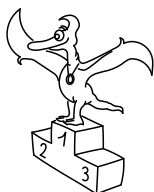
$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 1 \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = 4\pi \int_0^R r^2 \, dr = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (21)$$

Jako cvičení vypočítejte objem elipsoidu daného rovnicí $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1$. K výpočtu použijte takzvané *eliptické souřadnice* r, ϑ, φ (značení je stejné jako u souřadnic sférických díky jejich podobnosti) dané vztahy $x/a = r \sin \vartheta \cos \varphi, y/b = r \sin \vartheta \sin \varphi, z/c = r \cos \vartheta$ (správný výsledek je $V = \frac{4\pi}{3} abc$.)

A na závěr. Pokud vám nebylo něco v tomto nebo v předcházejících dílech seriálu jasné, napište s řešením této série (nejlépe přímo do řešení seriálu), na co byste se chtěli zeptat. V poslední dílu seriálu se pokusíme vaše dotazy zodpovědět.

Úloha VI. S ... vícerozměrné integrály

- a) Spočítejte průměrnou vzdálenost cestovatele náhodně se pohybujícího po severní polokouli od severního pólu a od rovníku (předpokládejte že cestovatel se pohybuje rovnoměrně po celém povrchu polokoule, za vzdálenost berete délku cesty po povrchu Země).
- b) Uvažujte nekonečně vysokou rotačně symetrickou věž, jejíž poloměr ve výšce h nad zemí je $r = a/(1 + (h/a))$, kde $a = 1$ m. K dispozici máme barvu, jejíž krycí schopnost je 10 m^2 na litr. Rozhodněte, zda potřebujeme více barvy na natření nebo naplnění této věže barvou.
- c) Trpaslíci se rozhodli, že pomohou Sněhurce při vaření. Sněhurka tedy rozkrájela jeden (dokonale kulatý) brambor na sedm stejně tlustých plátků a rozdala je trpaslíkům k oškrábání. Rozhodněte, který z trpaslíků bude mít nejvíce práce (trpaslíkem vynaložené usilí je úměrné povrchu oškrávané šlupky).

Pořadí řešitelů
po IV. sérii

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student</i> <i>Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	5	8	5	33	100	130
1. Jaroslav Trnka	G Na Pražačce	4	3	3	4	1	7	5	27	88	114
2. Lukáš Chvátal		3	4	0	4	5	7	5	28	84	95
3. Miroslav Hejna	G F. M. Pelcla	-	-	-	-	-	-	-	0	97	63
4. Tibor Vansa	G Matiční	-	-	-	-	-	-	-	0	67	62
5. Jan Prachař	G F. M. Pelcla	-	-	-	-	-	-	-	0	80	61
6. Karel Tůma	G Matiční	-	-	-	-	-	-	-	0	61	54
7. Jiří Lipovský	G Bystřice n. Pern.	-	-	-	-	-	-	-	0	86	32
8. Lukáš Vozdecký	G Vejrostova, Brno	-	-	-	-	-	-	-	0	52	29
9. Václav Cviček	G Petra Bezruče	-	-	-	-	-	-	-	0	90	26
10. Jan Perný	G Nová Paka	-	0	1	2	1	0	-	4	30	23
11.–12. Michal Bareš	G Mikulášské náměstí	-	-	-	-	-	-	-	0	80	20
<i>Bryan Chen</i>		-	-	-	-	-	-	-	0	61	20
13. Marek Vyšínka	G Matyáše Lercha	-	2	-	-	-	-	-	2	89	17
14. Lukáš Snášel	COP Hronov	-	1	-	-	5	-	-	6	80	16
15. Matěj Týč	G Zastávka	-	-	-	-	-	-	-	0	63	15
16. Tomáš Kozelek	G Kadaň	-	-	-	-	-	-	-	0	62	13
17. Miloslav Havelka	G Zastávka	-	-	-	-	-	-	-	0	73	11
18. Barbora Galaczková		-	-	-	-	-	-	-	0	67	10
19. Marek Pavlů	SOU Litovel	-	-	-	-	5	-	-	5	100	9
20. Kateřina Jelénková	G Staré Město	-	-	-	-	-	-	-	0	100	8
21. Luboš Rabčan	G Trstená	1	2	0	0	-	2	-	5	19	7
22. Miroslav Zgažar	SPŠ Heyrovského, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	0	75	6
23.–26. Vendula Exnerová	G Nad Štolou, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	24	4
<i>Josef Hanuš</i>	G Děčín	-	-	-	-	-	-	-	0	19	4
<i>Radim Kusák</i>	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	100	4

	<i>Martin Szablatura</i>		--	--	--	--	--	--	0	<i>100</i>	4
27.–29.	<i>Veronika Chromčíková</i>	G Přerov	--	--	--	--	--	--	0	<i>25</i>	1
	<i>Petr Navrátil</i>	G Přerov	--	--	--	--	--	--	0	<i>25</i>	1
	<i>Zuzana Svobodová</i>	G Zlaté Moravce	--	--	--	--	--	--	0	<i>25</i>	1

Kategorie třetích ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK						33	<i>100</i>	130
1.	<i>Matouš Ringel</i>	G Broumov	4	4	3	5	5	8	5	34	<i>92</i>	119
2.	<i>Jana Matějová</i>	SPŠ Chrudim	--	--	4	4	5	8	2	23	<i>82</i>	87
3.	<i>Alexandr Kazda</i>	G Nad Alejí, Praha	4	1	3	1	2	--	5	16	<i>68</i>	78
4.	<i>Jan Moláček</i>	G J. K. Tyla	--	3	--	4	--	--	5	12	<i>90</i>	69
5.–6.	<i>Petr Dostál</i>	G Žamberk	--	2	1	0	--	--	--	3	<i>46</i>	38
	<i>Pavel Hála</i>	G Český Krumlov	3	2	--	1	--	--	--	6	<i>50</i>	38
7.	<i>Martin Rybář</i>	GOA Blansko	--	1	--	3	--	--	--	4	<i>56</i>	35
8.	<i>Lucie Strmisková</i>	G Kyjov	--	--	--	--	--	8	--	8	<i>79</i>	34
9.	<i>Hynek Hanke</i>	G Budějovická, Praha	--	2	0	3	--	--	2	7	<i>45</i>	33
10.–11.	<i>Vojtěch Krejčířík</i>		--	--	--	--	--	--	--	0	<i>65</i>	31
	<i>Jan Ondruš</i>	G F. M. Pelcla	1	3	0	2	--	--	--	6	<i>46</i>	31
12.	<i>Jakub Závodný</i>	G Bratislava, Grösslingova	--	1	--	--	--	--	--	1	<i>69</i>	27
13.	<i>Zuzana Rozlúvková</i>	G Boženy Němcové	1	0	0	1	--	--	--	2	<i>44</i>	24
14.	<i>Jana Hrudíková</i>	G Přerov	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>82</i>	23
15.–16.	<i>Jan Olšina</i>	G Kroměříž	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>72</i>	21
	<i>Vladimír Sommer</i>	G Žďár nad Sázavou	--	3	--	--	--	8	2	13	<i>88</i>	21
17.	<i>Jan Fazekaš</i>	ISŠ Sokolov	1	3	1	2	4	--	--	11	<i>56</i>	20
18.	<i>Michal Růžek</i>	G Arcibiskupské	--	2	--	2	--	--	--	4	<i>68</i>	19
19.	<i>Zdeněk Váňa</i>	COP Hronov	--	--	--	--	5	--	--	5	<i>56</i>	14
20.	<i>Petr Bílý</i>	G Slaný	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>76</i>	13
21.–22.	<i>Jan Skalický</i>	G J. Heyrovského, Praha	0	--	--	2	5	--	--	7	<i>46</i>	12
	<i>Radoslav Sopoliga</i>	G Svidník	--	1	--	--	--	--	--	1	<i>31</i>	12
23.	<i>Jan Švarecbach</i>	G Louny	--	--	0	1	--	--	--	1	<i>20</i>	10
24.–26.	<i>Tomáš Gavenčíak</i>	G Bílovec	--	--	--	--	--	3	--	3	<i>38</i>	9
	<i>Pavol Lakatoš</i>	G Velké Kapušany	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>25</i>	9
	<i>Michal Witiska</i>	G Jihlava	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>31</i>	9
27.	<i>Jan Křetínský</i>	G Matyáše Lercha	--	--	0	--	--	--	--	0	<i>67</i>	8
28.–29.	<i>Jan Křivonožka</i>	G Bílovec	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>29</i>	7
	<i>Libor Kukačka</i>	GOA Vrchlabí	--	1	--	1	--	--	--	2	<i>37</i>	7
30.	<i>Pavína Karníková</i>	G Dobruška	--	0	0	--	--	3	--	3	<i>22</i>	6
31.	<i>Kateřina Balcarová</i>	G Dobruška	0	3	0	--	--	--	--	3	<i>21</i>	5
32.–34.	<i>Markéta Novotná</i>	G Hranice	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>100</i>	4
	<i>Martina Smolová</i>	G Písek	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>24</i>	4
	<i>Petra Suková</i>	G Svitavy	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>100</i>	4
35.	<i>Eva Lovišková</i>	G V. Makovského	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>25</i>	3
36.–37.	<i>Michal Havel</i>	COP Hronov	0	0	--	0	0	--	--	0	<i>8</i>	2
	<i>Ivan Patáčík</i>	G Partizánské	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>17</i>	2
38.–39.	<i>Jana Pechková</i>	G Trutnov	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>11</i>	1
	<i>Stanislav Plánička</i>	G Klatovy	--	--	--	--	--	--	--	0	<i>25</i>	1
40.	<i>Jana Babováková</i>	G Most	--	0	0	--	--	--	--	0	<i>0</i>	0

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	5	8	5	33	100	130
1. Anton Repko	G Sv. Mikuláša, Prešov	-	2	3	4	5	-	5	19	86	80
2. Petr Houštěk	G Pelhřimov	2	-	3	3	1	-	3	12	66	54
3. Peter Greškovič	G Svidník	2	3	0	2	-	2	-	9	39	41
4. Lenka Rychtrová	G Louny	2	3	1	0	-	1	-	7	28	28
5.-6. Michal Humpula	G Uherský Brod	2	3	0	-	-	-	-	5	60	25
Martin Takáč	G Nové Zámky	-	-	-	-	-	-	-	0	51	25
7.-8. Jiří Kulda	COP Hronov	-	2	0	-	4	6	-	12	46	16
Hana Suchomelová	G Ludovíta Štúra	-	-	-	-	-	-	-	0	43	16
9. Mária Šedivá	G Ludovíta Štúra	-	-	-	-	-	-	-	0	44	14
10.-12. Pavel Kocovrek	SPŠ Panská	-	-	-	-	-	-	-	0	91	10
Ondřej Sedláček	G Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	0	34	10
Markéta Vilimovská	G Českolipská, Praha	-	1	-	-	-	2	-	3	37	10
13. Jiří Kubr	COP Hronov	0	1	0	-	3	-	-	4	38	9
14.-15. Zdeněk Kučka	G Žďár nad Sázavou	-	-	-	-	-	-	-	0	12	8
Rostislav Kváš	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	0	100	8
16. Markéta Kavalírová	G Českolipská, Praha	-	0	1	-	-	-	-	1	30	7
17. Richard Gracla	G Nad Štolou, Praha	-	3	0	-	-	-	-	3	30	6
18. Aleš Razým		-	-	-	-	-	-	-	0	24	4
19. Karel Hofman	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3
20.-21. Kateřina Divišová	GOA Sedlčany	-	-	-	-	-	-	-	0	8	2
Monika Martinisková		-	-	-	-	-	-	-	0	15	2
22.-23. Štěpánka Mohylová	G Čs. exilu	-	-	-	-	-	-	-	0	13	1
Vladimíra Sečkárová	G J. G. Tajovského	-	-	-	-	-	-	-	0	8	1
24. Jan Vrba	G Arabská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	5	8	5	33	100	130
1. Jan Valášek	G Broumov	-	2	2	-	-	7	-	11	62	29
2. Tereza Klímošová	G Lanškroun	-	2	1	-	-	-	-	3	69	27
3. Jana Vrabelová	G Ludovíta Štúra	2	2	1	-	-	2	-	7	38	24
4.-5. Michal Sivák	G Ludovíta Štúra	2	1	1	-	-	2	-	6	39	20
Vladimír Sivák	G Ludovíta Štúra	2	1	1	-	-	2	-	6	39	20
6. Ondřej Bogár	ZŠ Trenčín	-	1	-	-	-	4	-	5	44	16
7. Jan Bednář	COP Hronov	-	-	-	-	3	-	-	3	62	13
8. Petra Malá		-	1	0	-	-	-	-	1	33	8
9. Daniela Svobodová		3	1	-	-	-	-	-	4	37	7
10. Tomáš Bednárik	G Vsetín	-	-	-	-	-	-	-	0	50	4
11. Marek Jansa	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	13	2
12.-13. Radek Škuta	G Čs. exilu	-	-	-	-	-	-	-	0	13	1
Zuzana Urbancová	G Vlašim	-	-	-	-	-	-	-	0	25	1
14. David Chval	GOA Vimperk	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.