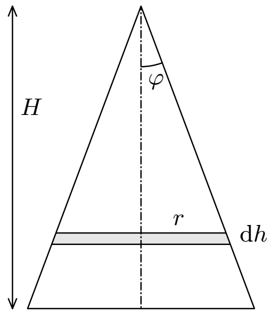
16. ročník, úloha I . P ... *gravitace* *(5 bodů; průměr 1,29; řešilo 52 studentů)*

Odhadněte rozdíl mezi intenzitou gravitačního pole na povrchu Země a na vrcholu hory a pokuste se spočítat, jaké parametry musí mít hora, aby byl tento rozdíl nulový. (Pokuste se alespoň o kvalitativní odhad, tj. rozhodněte, zda je pole na hoře silnější nebo slabší.)

Abychom mohli spočítat gravitační zrychlení na povrchu hory, musíme si zvolit vhodný model a příslušné aproximace. Gravitační pole na hoře bude dáno součtem gravitačního pole Země a hory. Pole g_z, které vytváří Země ve výšce h nad povrchem, je dáno Newtonovým gravitačním zákonem.



Obr. 1

$$g_z(h) = \varkappa \frac{M_z}{(R+h)^2} = \varkappa \frac{4}{3} \frac{\pi \varrho R^3}{(R+h)^2},$$

kde ϱ je hustota Země a R její poloměr. Hora má složitější tvar a její příspěvek ke gravitačnímu zrychlení musíme spočítat obecněji. Zde udělalo nejvíce řešitelů chybu. Pouze sféricky symetrickou kouli můžeme při výpočtu gravitačního pole nahradit hmotným bodem v jejím těžišti. Horu si představíme jako kužel o výšce $H \ll R$, vrcholovém úhlu 2φ a hustotě $k\varrho$. Ze symetrie kužele vyplývá, že gravitační pole na vrcholu hory bude směřovat do středu podstavy. Jeho velikost spočítáme jako součet příspěvků od jednotlivých malých částí kužele, výpočet vede na integrál

$$g_h = \varkappa \int_0^H \int_0^{h \operatorname{tg} \varphi} \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \frac{2\pi k \varrho r}{r^2+h^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}h.$$

Ten si můžete představit jako sčítání polí malinkatých prstýnků poloměru r, šířky $\mathrm{d}r$ a tloušťky $\mathrm{d}h$. Pro integraci ale musíme vzít část, která se promítá na osu kužele (toto spousta řešitelů opomíjela). Prstýnky vytvoří elementární válečky tloušťky $\mathrm{d}h$ a z nich vytvoříme kužel. Gravitační pole hory je tedy $g_h = 2\varkappa\pi k\varrho H(1-\cos\varphi)$.

Rozdíl mezi gravitačním polem na povrchu Země a na vrcholku hory je dán

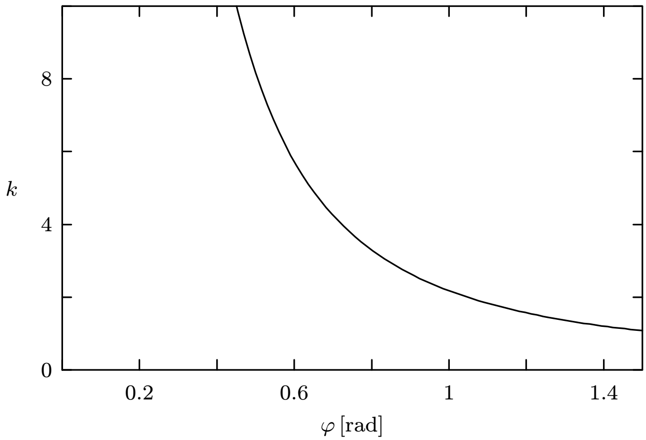
$$\Delta g = g_h + g_z(H) - g_z(0) = \varkappa \frac{4}{3} \frac{\pi \varrho R}{(1+H/R)^2} + 2\varkappa\pi k \varrho H(1-\cos\varphi) - \varkappa \frac{4}{3} \pi \varrho R.$$

Použijeme aproximaci $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x$, která platí pro $x \ll 1$, a získáme

$$\Delta g = -\frac{8}{3} \varkappa \pi \varrho H + 2\pi H \varkappa k \varrho (1-\cos\varphi) = 2\pi \varkappa H \varrho \left(k\,(1-\cos\varphi) - \frac{4}{3} \right).$$

Tedy gravitační pole Země s výškou klesá se stejnou mocninou, jako se kterou jej vytváří hora. Proto, pokud $k = \frac{4}{3(1-\cos\varphi)}$, bude intenzita gravitačního pole Země klesat stejně rychle, jako bude růst gravitační pole hory. Tzn. na takovýchto horách bude gravitační zrychlení stejné, jako na povrchu Země v nížině.

Nyní pojďme diskutovat řešení pomocí grafu 2. V části pod křivkou bude gravitační zrychlení na hoře nižší než u její paty, nad křivkou bude naopak vyšší. Je vidět, že pro běžnou horninu ($k = 0{,}5$) hora, na které by bylo stejné gravitační zrychlení jako na povrchu Země, skutečně neexistuje.



Obr. 2

V úloze jsme v případě výpočtu gravitačního pole na povrchu Země neuvažovali gravitační působení hor – uvažovali jsme, že měření bychom prováděli daleko od námi zkoumaných hor. V případě, že bychom měřili gravitační zrychlení přímo u paty hory, situace by se zkomplikovala. Řešení pro tento případ si můžete zkusit spočítat. Také si můžete rozmyslet, jak by řešení vypadalo, kdybychom nepočítali gravitační nýbrž tíhové zrychlení. Museli bychom uvažovat ještě odstředivou sílu.

Honza Pacák
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.