16. ročník, úloha II . P ... *basic instinct* *(5 bodů; průměr 1,77; řešilo 13 studentů)*

Sekáček na led – známý vražedný nástroj z tohoto filmu (vy, kdo jste tento výplod kinematografie ještě neshlédli, vězte, že toto náčiní vypadá zhruba jako šroubovák s ostrou špičkou) postavila chladnokrevná vražedkyně z dlouhé chvíle na hrot. Pomocí relací neurčitosti odhadněte maximální dobu, po kterou corpus delicti setrvá v této poloze.

Podle zadání je sekáček umístěn do labilní rovnovážné polohy. V takovém případě sebemenší výchylka z rovnovážné polohy způsobí to, že se sekáček začne pohybovat a dříve nebo později spadne. Jak dlouho to bude trvat v závislosti na velikosti počáteční výchylky, za chvíli vyřešíme.

V této úloze řešíme kvantově-mechanické aspekty setrvání tělesa v labilní poloze. Mnozí z vás uváděli chvění podložky, tepelný pohyb molekul sekáčku a jiné podobné důvody porušení rovnováhy. To je sice pravda, nicméně z Heisenbergova principu neurčitosti plyne, že sekáček nutně spadne i bez přispění těchto vlivů.

Místo polohy a hybnosti potřebujeme v kvantové mechanice znát tzv. vlnovou funkci interpretovanou většinou pomocí kvadrátu její normy, který udává hustotu pravděpodobnosti nalezení systému v daném stavu. Lidsky řečeno – nelze užít dvě veličiny (polohu a hybnost) k popisu stavu sekáčku. Pracujeme s vlnovou funkcí, pomocí které lze počítat statistická rozdělení výsledků opakovaných měření na daném systému. Ano – stejná měření dopadají pokaždé různě a náhodně. Navíc každé měření změní kvantový stav, takže před opakováním musíme znovu nastavit původní podmínky. Celou věc navíc komplikuje to, že neexistuje způsob, jak současně změřit polohu i hybnost. Takže změříme-li jednu z těchto veličin, nemáme už žádnou šanci změřit tu zbývající, protože měřením jsme stav změnili. Kvalitativně je tento fakt obsažen ve vztahu

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}. \qquad (1)$$

Míra exaktnosti vzorce (1) závisí na definici veličin Δx a Δp. V našem příkladě nám bude stačit pouze přibližná představa, že součin chyb (tj. nepřesností, neurčitostí, nejistot, ...) v určení polohy a hybnosti nemůže být menší, než nějaká konstanta.

Vraťme se nyní k problému s padajícím sekáčkem. Úplné kvantově mechanické řešení by znamenalo vyřešení Shrödingerovy rovnice a následné nalezení takové vlnové funkce, která se bude co nejpomaleji „rozplývat“. Takové řešení je sice proveditelné, ale bohužel ne středoškolskými prostředky.

Abychom spočítali alespoň něco, zvolme následující „poloklasický“ postup: Počáteční výchylku vrcholu sekáčku z rovnovážné polohy označme x_0, počáteční rychlost v_0. Dobu pádu maximalizujeme, pokud bude současně co nejmenší x_0 a v_0. Musíme však splnit relace neurčitosti, a proto

$$x_0 m v_0 = \frac{\hbar}{2}. \qquad (2)$$

Znovu připomeňme, že se jedná pouze o odhad. Zmíněná „poloklasičnost“ spočívá v tom, že navzdory relacím neurčitosti připouštíme, že současně známe rychlost i polohu sekáčku a počítáme úlohu klasicky. Pochopitelně stavy, mezi kterými budeme hledat kandidáta na nejpomalejší pád, splňují relace neurčitosti s rovností. Za počáteční hodnoty do klasického řešení dosazujeme přitom kvantové neurčitosti. Lze si to představit tak, že bude-li počáteční kvantový stav sekáčku hodně lokalizovaný v prostoru, bude naměřená hodnota x_0 hodně malá, ale zato hodnota p_0 měřená na stejném stavu bude díky velké neurčitosti naopak pravděpodobně velmi velká. Musíme tedy najít nejlepší „kompromis“.

Tím máme fyzikální úvahu za sebou a zbývající postup už je přímočarý – v závislosti na x_0 a v_0 klasicky spočítáme dobu pádu a pak se při splnění vztahu (2) budeme snažit nalézt takové počáteční podmínky, při kterých bude pád co nejdelší.

Vzdálenost těžiště sekáčku od špičky označme l. Těžiště se bude pohybovat po oblouku kružnice a polohu sekáčku budeme popisovat vzdáleností těžiště od rovnovážné polohy po tomto oblouku (označme ji x). Dále pro jednoduchost předpokládejme, že hmotnost sekáčku m je soustředěná do těžiště. Tím jsme úlohu převedli na problém velmi připomínající matematické kyvadlo. Stejně jako u matematického kyvadla se omezíme na malé úhly[1] a provedeme linearizaci. Pohybová rovnice pak vypadá následovně.

$$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0, \qquad \text{kde } \lambda^2 = \frac{g}{l}.$$

Ty, kdo neví, že $\ddot{x}$ je druhá derivace x podle času, tedy zrychlení, odkazujeme na seriál. Rovnice pro kyvadlo se od této liší jen kladným znaménkem a podobně kosmeticky vypadá i odlišnost řešení[2]

$$x = x_0 \cosh \lambda t + \frac{v_0}{\lambda} \sinh \lambda t$$

(v rovnici pro harmonické kmity nejsou hyperbolické, ale goniometrické funkce). Hyperbolické funkce lze vyjádřit pomocí lineární kombinace klesající a rostoucí exponenciály. Vzhledem k uvažovaným počátečním podmínkám je zřejmé, že klesající část můžeme zanedbat a řešení přepsat do tvaru

$$x = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{3}$$

Nyní je vidět, že maximalizace doby pádu znamená minimalizaci výrazu v závorce. Dosadíme tedy za v_0 ze vztahu (2). Označíme-li $a^2 = \hbar/2m\lambda$, upraví se výraz v závorce do tvaru

$$a\left(\frac{x_0}{a} + \frac{a}{x_0}\right)$$

Tento výraz nabývá minima $2a$ pro $x_0 = a$. Kdo si to nedokáže zdůvodnit pomocí derivací, může ověřit

$$\frac{x_0}{a} + \frac{a}{x_0} = 2 + \left(\sqrt{\frac{x_0}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x_0}}\right)^2,$$

z čehož je uvedený fakt viditelný na první pohled. Po dosazení dostává vztah pro pohyb „nejpomaleji padajícího" sekáčku tvar $x = a\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. Dobu pádu můžeme odhadnout jako čas, ve kterém bude výchylka srovnatelná s l. Po krátkém výpočtu a dosazení hodnot $l = 20\,\mathrm{cm}$, $m = 200\,\mathrm{g}$ dostáváme

$$T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{l}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\, \ln \frac{2ml\sqrt{gl}}{\hbar} = 5\,\mathrm{s}.$$

Diskuse výsledku je snadná. Asi nejpodstatnějším závěrem je to, že přestože jsme uvažovali velmi idealizovaný model a neuvažovali početné vlivy vedoucí k pádu sekáčku (např. různé fluktuace, proudění vzduchu apod.), lze z krátkého času usuzovat, že kvantové vlivy hrají i v tomto případě svou roli.

---

[1] S přesností na dvě platné cifry budou naše vztahy platit v rozmezí pár desítek stupňů, a když už se sekáček dostane tak daleko, spadne již téměř okamžitě.

[2] Pilný čtenář může derivováním a dosazením do pohybové rovnice ověřit správnost tohoto vztahu.

Ještě zajímavější než samotná hodnota T je tvar výsledného vzorce. Před logaritmem stojí čas řádově odpovídající délce periody kmitů kyvadla délky l a v logaritmu je podíl veličiny rozměru momentu hybnosti sestavené z hodnot m, l, g (tedy pro „rozumné“ velikosti a hmotnosti veličina řádu jednotek J·s) a ve jmenovateli redukovaná Planckova konstanta $\hbar \doteq 1 \cdot 10^{-34}$ J·s. Díky vlastnostem logaritmu nebude jeho hodnota extrémní (malá či velká) a hlavně bude velmi málo reagovat na změny parametrů (větší a těžší sekáčky apod.). To je také důvod, proč většině řešitelů vycházely podobné hodnoty, přestože jsme konkrétní čísla nezadali.

Jediným způsobem, jak udržet po delší dobu těleso v labilní poloze, je tedy menší podvod – je třeba systém sestavit tak, aby se nalézal v sice úzké, ale přesto stabilní[3] poloze (což lze zajistit třeba ztupením hrotu sekáčku).

Honza Houštěk
`honza@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[3] Při velké snaze lze stabilní polohu nalézt dokonce i u tzv. Kolumbova vejce aniž by bylo nutné ho nakřápnout.