16. ročník, úloha III . 3 ... *praktikum* *(4 body; průměr 1,00; řešilo 19 studentů)*

Ve fyzikálním praktiku dostal organizátor FYKOSu za úkol pomocí tří měření zjistit napětí třech různých zdrojů.

K dispozici má jeden voltmetr následujících vlastností: Jeho systematická chyba je nulová. Náhodná chyba je charakterizována střední kvadratickou odchylkou σ (tj. rozptyl je σ^2), která je nezávislá na velikosti měřeného napětí.

Poraďte organizátorovi, zda a popř. jak lze napětí změřit přesněji než změřením každého zdroje zvlášť. Za míru celkové přesnosti považujte součet rozptylu výsledných hodnot.

Před začátkem výpočtu si ujasněme základní pojmy. Hodnota kterou měříme pomocí voltmetru je *náhodná veličina*. Každá náhodná veličina je plně charakterizována takzvanou *distribuční funkcí*. Tato funkce udává, s jakou pravděpodobností naměříme jednotlivé výsledky (přesně řečeno, pokud označíme distribuční funkci f, pak pravděpodobnost toho, že naměřená hodnota (například napětí) bude ležet v úzkém intervalu hodnot $(U, U + \mathrm{d}U)$ bude $p = f(U)\,\mathrm{d}U$). Náhodnou veličinu však můžeme popsat i jednodušeji (na úkor částečné ztráty informace o této veličině) pomocí takzvané *střední hodnoty* a *rozptylu* (takto zjednodušený popis náhodné veličiny můžeme ještě zpřesnit zadáním dalších parametrů, takzvaných *momentů*). Střední hodnota $\bar{x}$ náhodné veličiny x je definována jako aritmetický průměr z velmi mnoha naměřených hodnot x_i

$$\bar{x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i .$$

Pokud bychom si nakreslili graf distribuční funkce, udávala by střední hodnota polohu „středu“ tohoto grafu. Rozptyl je definován jako

$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 .$$

Jedná se tedy o aritmetický průměr druhých mocnin rozdílů naměřených hodnot a střední hodnoty. Graf většiny „rozumných“ distribučních funkcí má tvar jakéhosi „hrbu“. Rozptyl náhodné veličiny pak zhruba udává, jaká je druhá mocnina jeho šířky, což můžeme považovat za míru nepřesnosti měření.

V zadání bylo uvedeno, že voltmetr měří napětí s nulovou systematickou chybou a rozptylem σ^2. To znamená, že distribuční funkce naši náhodné veličiny bude mít střední hodnotu rovnou skutečné hodnotě měřeného napětí a rozptyl σ^2.

Změříme-li napětí na několika sériově zapojených zdrojích, musíme napětí na jednotlivých zdrojích z naměřených hodnot dopočítat. Budeme tedy naměřené hodnoty různě sčítat, odečítat a násobit konstantami (řešíme soustavu lineárních rovnic).

Je zřejmé, že střední hodnota součtu dvou náhodných veličin (násobku náhodné veličiny číslem) je součtem jejich středních hodnot (násobek střední hodnoty). Dále vidíme, že rozptyl c-násobku náhodné veličiny bude c^2-násobkem jejího rozptylu (toto tvrzení plyne například z definice rozptylu, nebo z faktu, že rozptyl je druhou mocninou *šířky* distribuční funkce (distribuční funkce c-násobku náhodné veličiny bude c-krát širší)).

Otázkou však je, jaký bude rozptyl součtu náhodných veličin. V obecném případě o něm bohužel nedokážeme nic říct. Dá se ale ukázat, že pokud je chyba měření daná velkým počtem náhodných vlivů (a to je v praxi splněno, protože naměřené napětí může ovlivnit všechno od vlhkosti vzduchu, přes pracovní úsilí dělníka, který právě o patro výše sbíječkou bourá zeď, až po konstelaci Jupitera se Saturnem), je tvar distribuční funkce měřené veličiny vždy stejný, ať měříme cokoliv a jakýmkoliv způsobem. Je jím takzvaná *Gaussova funkce*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right).$$

O veličině s takovouto distribuční funkcí říkáme, že má *normální* či *Gaussovo* rozdělení. Díky této vlastnosti pak platí, že rozptyl součtu nebo rozdílu dvou naměřených veličin je vždy součet jejich rozptylů (důkaz tohoto tvrzení již není triviální, takže ho neuvádíme). Nyní známe základní pravidla pro počítání s náhodnými veličinami a můžeme tedy přistoupit k vlastnímu výpočtu

Obecné měření si můžeme vyjádřit jako $u = a_1U_1 + a_2U_2 + a_3U_3$, kde a_i nabývá hodnoty -1, 0, 1, podle toho, s jakou polaritou je tam zdroj zapojen, resp. jestli tam vůbec je. Taková měření uděláme tři a dopočteme zadané napětí. Abychom nemuseli rozebírat moc možností, tak si uvědomíme některé symetrie, které dají stejný výsledek.

1. Je jedno jestli měříme u, nebo $-u$. Protože mají stejný rozptyl.
2. Na výsledku se neprojeví, změníme-li polaritu jednoho zdroje u všech měřených obvodů (např. U_1). Tak se změní jenom celkové znaménko ve vyjádření napětí tohoto zdroje $U_1' = -U_1$, což neovlivní výsledný rozptyl napětí tohoto zdroje.
3. Dále využijeme toho, že záměna jednotlivých měření dá stejný výsledek. Stejně i záměna v označení zdrojů jenom prohodí výsledky, ale celkové hodnoty budou stejné.

Teď se můžeme pustit do samotné analýzy. Rozdělíme si to na možnosti podle počtu zapojených zdrojů. Uvažujeme, že když měříme na jednom zdroji, nedostaneme lepší výsledek. Proto musíme naměřit minimálně dva zdroje.

1. Máme 2 zdroje. Tady ještě musím rozdělit dvě možnosti, podle toho kolikrát se tam zdroje vyskytují
   a) Jeden zdroj je ve všech měřeních BÚNO[1] U_1. Přitom víme, že je tam 2×3 zdrojů, takže ještě tam musí být jeden zdroj 2-krát (búno U_2) a jeden jednou (búno U_3). Jediná možnost lineární nezávislá možnost je (až na změnu znamének u U)

   $$(U_1 + U_2, U_1 - U_2, U_1 + U_3).$$

   b) Každý je tam dvakrát.

   $$(U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_2 + U_3).$$

   Rozmyslete si, že ostatní možnosti jsou ekvivalentní.
2. V prvních dvou měřeních máme 2 a při posledním 3 zdroje. Uvažujme, že při prvním měření máme búno $U_1 + U_2$. Potom na druhém máme 2 možnosti.
   a) Stejné zdroje jako u 1. měření (U_1, U_2). Z lineární nezávislosti dostaneme

   $$(U_1 + U_2, U_1 - U_2, U_1 + U_2 + U_3),$$

   na znaménku U_3 díky symetriím nezávisí.

[1] bez újmy na obecnosti

b) Zdroj U_1 je u obou a ostatní se liší. Tady dostaneme pro 3 měření tři možnosti

$$(U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_1 + U_2 + U_3),$$
$$(U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_1 + U_2 - U_3),$$
$$(U_1 + U_2, U_1 + U_3, U_1 - U_2 - U_3).$$

3. V prvním měření jsou dva zdroje, v ostatních dvou 3. V prvním uvažujme búno $U_1 + U_2$. Potom můžeme rozlišit dvě možnosti podle polarity zdroje U_2 (nás zajímá jenom relativní změna oproti $U_1 + U_2$ a je jedno, který zvolíme, protože celkové znaménko můžeme otočit).
   a) Stejná polarita, potom v druhém měření máme $U_1 + U_2 + U_3$, u třetího potom dostaneme z lineární nezávislosti

$$(U_1 + U_2, U_1 + U_2 + U_3, U_1 - U_2 + U_3),$$
$$(U_1 + U_2, U_1 + U_2 + U_3, U_1 - U_2 + U_3),$$
$$(U_1 + U_2, U_1 + U_2 + U_3, U_1 - U_2 - U_3).$$

   b) Různá polarita (potom už můžeme stejnou polaritu uvažovat u třetího měřáku, protože ostatní možnosti jsme vyloučili v bodě a). Potom zůstane jenom jedna lineárně nezávislá možnost

$$(U_1 + U_2, U_1 - U_2 + U_3, U_1 - U_2 - U_3).$$

4. Ve všech měřeních jsou 3 zdroje. Potom zůstane díky symetriím 1 možnost.

$$(U_1 + U_2 + U_3, U_1 + U_2 - U_3, U_1 - U_2 - U_3).$$

Teď musíme pro každou možnost vyřešit soustavu a najít vyjádření napětí zdrojů. Pro ně spočteme rozptyl $U = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ podle vzorce $\sigma_U^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\sigma^2$. A výsledně sečteme $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$. Nejmenší hodnotu dostaneme pro 3*b*.

$$U_1 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_3,$$
$$U_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4}u_2 - \frac{1}{4}u_3,$$
$$U_3 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3,$$

kde jsme u_i označili i-tém měření. Dostaneme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 3/8$ a $\sigma_3^2 = 1/2$.

Pavel Augustinský
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.