

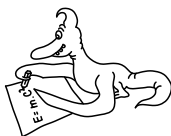
Milí řešitelé!

XVII. ročník FYKOSu je u konce. Doufáme, že se vám seminář líbil, že jste si zasoutěžili, ale hlavně se také něco nového naučili. S maturanty se těšíme na shledání v řadách organizátorů, s ostatními pak v příštím ročníku a s těmi úspěšnějšími také na podzimním soustředění.

V této brožurce najdete řešení 5. a 6. série, výsledkovou listinu po 5. sérii a konečnou výsledkovou listinu.

Za všechny organizátory vám pěkné prázdniny přeje

Honza Prachař

*Řešení V. série***Úloha V. 1 ... maššinka** (4 body; průměr 2,11; řešilo 18 studentů)

Máme rotující desku, která se otáčí úhlovou rychlostí ω kolem své osy a na níž nepůsobí žádné vnější momenty sil. Směrem do jejího středu jede lokomotiva o hmotnosti m po kolejkách připevněných k desce. Deska mění svou rychlost otáčení. Určete původ, velikost a směr momentu síly, který tuto změnu způsobí. Na zkoušce z Fyziky I dostal Honza Prachař.

O tom, že se bude úhlová rychlost otáčení desky zvyšovat, se můžeme přesvědčit ze zákona zachování momentu hybnosti. Součin $L = J\omega$ musí být konstantní, proto se při snížení celkového momentu setrvačnosti soustavy zvětší hodnota úhlové rychlosti. Zákon zachování energie nelze pro vysvětlení jevu použít. Maššinka totiž překonává odstředivou sílu a její motory konají práci. Označme rychlost mašinky z hlediska vnějšího pozorovatele \mathbf{v} a z hlediska pozorovatele v rotující soustavě \mathbf{v}' . Tyto rychlosti se liší o obvodovou rychlost.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (1)$$

Zrychlení, které působí na maššinku, určíme jako časovou derivaci rychlosti \mathbf{v}' v čárkované (rotující) soustavě.

$$\mathbf{a}' = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Za \mathbf{v}' v prvním členu dosadíme z (1) a upravíme

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Nyní dosadíme z (1) za \mathbf{v}' .

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Protože $\boldsymbol{\omega}$ má směr osy otáčení a \mathbf{v}' směr opačný k \mathbf{r} , budou první dva sčítance tvořit normálové zrychlení a druhé dva tečné (můžete si to rozmyslet z vlastností vektorového součinu). Síla, která působí na maššinku kolmo ke kolejkám, má směr stejný jako otáčení desky a velikost

$$F_t = -m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} r + 2m\boldsymbol{\omega}v.$$

Maššinka působí stejně velkou silou na desku, protože jede po kolejkách. Moment, kterým působí na desku je roven derivaci momentu hybnosti desky L_d . Pro jejich velikosti platí

$$M = F_{\tau} r = -m \frac{d\omega}{dt} r^2 + 2m\omega vr,$$

$$M = \frac{dL_d}{dt} = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (2)$$

odtud

$$0 = -2m\omega vr + (J + mr^2) \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} (J + mr^2) \omega = \frac{dL}{dt}.$$

Tato rovnice není nic jiného než zákon zachování momentu hybnosti. Z ní dostaneme

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2mvr\omega}{J + mr^2}.$$

Moment síly, který desku roztáčí, určíme dosazením do (2) za $d\omega/dt$, získáváme

$$M = \frac{J}{J + mr^2} \cdot 2mvr\omega.$$

Směr momentu síly je shodný se směrem vektoru ω .

Jirka Lipovský

jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.2 ... loď duchů (4 body; průměr 2,50; řešilo 10 studentů)

Loď duchů pluje proti proudu, jehož rychlost je u . Duchové jsou líní a slabí na přihazování uhlí do kotlů. Poradte jim, jaká má být rychlost lodi v vůči vodě, aby loď měla minimální spotřebu uhlí. Předpokládejte, že spotřeba paliva je úměrná vykonané práci na danou dráhu. Jak se výsledek změní, pokud místo lodního šroubu bude loď poháněna řetězem uloženým na dně řeky?

Navrhl Jirka Franta.

Zabývejme se nejprve případem, kdy loď duchů pluje na pohon lodního šroubu. Za čas t loď vůči břehu ujede dráhu $s = (v - u)t$. Podle zadání spotřebu paliva Q uvažujeme úměrnou vykonané práci na dráhu s . Práci spočítáme jako působící sílu krát dráhu, na které síla působí. V našem případě působící síla je tak velká, aby překonávala odpor vody, tj. $F = kv^2$, kde v konstantě k jsou zahrnuty všechny ostatní aspekty kromě rychlosti, jako tvar, velikost lodě a hustota vody. Tato síla působí po dráze, kterou loď za čas t ujede vůči vodě! Tedy $W = F \cdot s = kv^2 \cdot vt$. Dosadíme-li za t z prvního vztahu a vydělíme práci uraženou dráhou s , dostáváme, že spotřeba paliva je úměrná funkci

$$Q \sim k \frac{v^3}{v - u}.$$

Zbývá tedy najít rychlost v tak, aby spotřeba byla nejmenší. To uděláme pomocí derivací nebo si nakreslíme funkci pro různé hodnoty rychlosti proudu u a polohu minima „vykoukáme“. Výsledkem je, že nejvýhodnější pro duchy je jet rychlostí

$$v = \frac{3}{2}u.$$

Co se změní v případě, že je loď poháněna řetězem uloženým na dně? Síla, kterou musí řetěz na loď působit je opět $F = kv^2$, touto silou se ovšem působí po dráze s , tj. té vůči břehu. Výsledkem je spotřeba paliva úměrná

$$Q \sim kv^2.$$

Tedy je pro duchy nejmýhodnější jet rychlostí těsně větší než je rychlost proudu.

Rozdíl obou případů je zřetelný, zamyslíme-li se, kolik paliva je potřeba na udržení lodě na místě vzhledem ke břehu. V případě pohonu lodním šroubem to rozhodně nebude nula, kdežto v případě řetězu na dně ano. Podobně např. nekonáme žádnou práci, držíme-li kufr ve vzduchu na místě.

Lenka Zdeborová
fykos@mff.cuni.cz

Úloha V.3 ... slezští havíři reloaded (3 body; průměr 0,79; řešilo 19 studentů)

Havíři z úlohy z minulé série nažhavili opět své krumpáče a prokopali se skrz Zemi, tentokrát ne na Nový Zéland, ale do Tichého oceánu. Do vytvořeného tunelu začne téct voda. Rozhodněte, zda v Petřvaldě v dolu Fučík vystříkne voda do vzduchu. Svou odpověď dostatečně zdůvodněte.

Vymyslel Pavel Augustinský.

Úlohu snadno vyřešíme pomocí zákona zachování energie. V momentě, kdy hladina dosáhne petřvaldského konce štoly, bude potenciální energie veškeré vody ve štole určitě menší než před vykopáním štoly, kdy se všechna tato voda nacházela na povrchu planety. Sloupec vody uzavřený v tunelu tedy musí mít podle zákona zachování energie nenulovou rychlost, takže hladina vody se v tomto bodě určitě nezastaví, ale vytryskne do vzduchu obrovskou rychlostí (i bez jakýchkoliv výpočtů je patrné, že maximální výška, které takto vzniklý gejzír dosáhne, bude řádově srovnatelná s rozměrem Země)!

Někteří řešitelé se nechali zmást tím, že upustíme-li do naší šachty jeden předmět (například horníka), proletí tunelem a na jeho druhém konci se zastaví. V případě, že do tunelu začne téct voda, je však situace odlišná. Na objemový element vody, který již dosáhl bodu, kde by osamocený horník svou pouť k protinožcům završil, totiž ze spoda stále „tlačí“ voda, která tohoto bodu ještě nedosáhla.

Pavel Augustinský
fykos@mff.cuni.cz

Úloha V.4 ... levitace na světle (4 body; průměr 2,29; řešilo 14 studentů)

Skleněná polokoule o poloměru $R = 10$ cm a indexu lomu n je umístěna v gravitačním poli Země rovnou plochu dolů. Úzkým laserovým paprskem svítíme ze spodu ve směru osy polokoule. Jaký musí být výkon laseru, aby polokoule levitovala. Šířka laserového paprsku je $d = 0,5$ mm a jeho vlnová délka je $\lambda = 660$ nm.

Úloha ze 34. MFO na Taiwanu.

Nejdříve je nutné si uvědomit, co všechno se s laserovým paprskem bude dít. Na obou rozhraních dojde k částečnému odrazu a na kulovém rozhraní se bude paprsek lámat. Podle Snellova zákona platí (viz obr. 1)

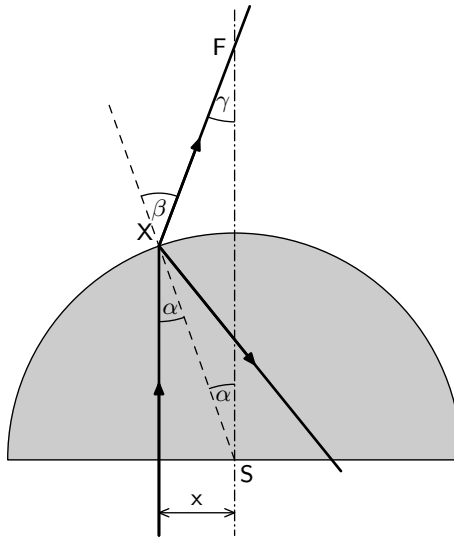
$$n \sin \alpha = \sin \beta.$$

Dle zadaných hodnot je $d/2R \ll 1$, s dostatečnou přesností tedy platí (zkuste ověřit, v Taylorově rozvoji zanedbáme členy řádu tři a výše) $\sin \alpha \approx \alpha$. Můžeme proto napsat

$$n\alpha = \beta.$$

Z trojúhelníku $\triangle FXS$ máme

$$\gamma = \beta - \alpha = (n - 1)\alpha. \quad (3)$$



Obr. 1

Frekvenci laserového světla označme $f = c/\lambda$ a N_0 bude počet fotonů laserového svazku, které dopadnou na jednotkovou plochu za jednotku času. Celkový počet fotonů, které dopadnou na spodní rovnou plochu skleněné polokoule za jednotku času, tedy je $N_0\pi d^2/4$. Celkový výkon těchto fotonů proto je

$$P = \frac{1}{4}N_0\pi d^2 hf,$$

kde h je Planckova konstanta, odtud

$$N_0 = \frac{4P}{\pi d^2 hf}.$$

Počet fotonů na jednotku plochy za jednotku času, které se odrazí od rovné plochy označme N'_0 , které projdou rovnou plochou a dopadnou na kulovou plochu N_1 , od ní se odrazí N'_1 a projde N_2 . Označíme-li propustnost skla τ a zanedbáme-li absorpci, která je u skla malá, potom platí

$$N'_0 = (1 - \tau)N_0, \quad N_1 = \tau N_0, \quad N'_1 = \tau(1 - \tau)N_0, \quad N_2 = \tau^2 N_0.$$

Další odrazy paprsku od kulové plochy zanedbáme.

Vyřešme nejprve odraz od rovné plochy. Hybnost jednoho fotonu je $p = hf/c$. Změna hybnosti všech odražených fotonů tedy bude

$$\Delta p = \frac{2hfN'_0}{c} \frac{\pi d^2}{4} \Delta t,$$

odkud pro sílu, kterou fotony na skleněnou polokouli působí, dostaneme

$$F_0 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\pi hf d^2 N'_0}{2c} = \frac{2P(1 - \tau)}{c}.$$

Dále se zamysleme nad paprsky, které se lámou na kulové ploše. Velikost hybnosti fotonu je před vstupem do polokoule a po výstupu z ní stejná, protože je stejná vlnová délka. Hybnost

ale v důsledku lomu změní směr, proto se změní její průmět do osy symetrie (označme ho p_z). Ze zákona zachování hybnosti tudíž plyne, že rozdíl hybností byl předán skleněné polokouli.

Protože úhel odklonu paprsku závisí na vzdálenosti od osy, budeme muset uvažovat infinitezimálně, paprsky si rozdělíme na tenká mezikruží. Počet fotonů, které projdou kruhovým mezikružím s vnitřím poloměrem r a vnějším poloměrem $r + dr$ za jednotku času, je $N_2 \cdot 2\pi r dr$. Změna z -ové složky hybnosti všech těchto fotonů tedy bude

$$\Delta(dp_z) = \frac{hfN_2}{c} \cdot 2\pi r dr(1 - \cos \gamma)\Delta t,$$

tomu odpovídající síla je

$$dF_2 = \frac{\Delta(dp_z)}{\Delta t} = \frac{2\pi hfN_2}{c} \cdot (1 - \cos \gamma)r dr. \quad (4)$$

Znovu využijeme toho, že úhel α je malý (v Taylorově rozvoji zanedbáme členy řádu tři a výše), a vztahu (3) dostaneme

$$\cos \gamma \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2} = 1 - \frac{(n-1)^2 \alpha^2}{2}.$$

Dále platí

$$r = R \sin \alpha \approx R\alpha.$$

Dosazením do (4) obdržíme

$$dF_2 = \frac{\pi hfN_2}{c} \cdot \frac{(n-1)^2 r^3}{R^2} dr,$$

celková síla je

$$F_2 = \frac{\pi hfN_2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n-1)^2 r^3}{R^2} dr = \frac{\pi hf(n-1)^2 d^4 N_2}{64cR^2} = \frac{P(n-1)^2 d^2 \tau^2}{16cR^2}.$$

Analogicky budeme postupovat pro paprsek odražený od kulové sféry. Změna z -ové složky hybnosti všech odražených fotonů bude

$$\Delta(dp_z) = \frac{hfN'_1}{c} \cdot 2\pi r dr(1 + \cos 2\alpha)\Delta t,$$

tomu odpovídající síla je

$$dF_1 = \frac{\Delta(dp_z)}{\Delta t} = \frac{2\pi hfN'_1}{c} \cdot (1 + \cos 2\alpha)r dr. \quad (5)$$

Opět využijeme toho, že úhel α je malý, a dostaneme

$$\cos 2\alpha \approx 1 - \frac{(2\alpha)^2}{2} = 1 - 2\frac{r^2}{R^2}.$$

Vztah (4) má potom tvar

$$dF_1 = \frac{4\pi hfN'_1}{c} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr,$$

celková síla je

$$F_1 = \frac{4\pi h f N_1'}{c} \int_0^{\frac{d}{2}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \, dr = \frac{\pi h f d^2 N_1'}{2c} \left(1 - \frac{d^2}{8R^2}\right) = \frac{2P\tau(1-\tau)}{c} \left(1 - \frac{d^2}{8R^2}\right). \quad (6)$$

Nyní už jsme schopni určit výslednou sílu, která „nadháší“ skleněnou polokouli

$$F = F_0 + F_1 + F_2 = \frac{P}{c} \left(2(1-\tau^2) + \frac{d^2\tau}{4R^2} \left(\frac{(n-1)^2\tau}{4} - (1-\tau)\right)\right).$$

Z Fresnelových rovnic můžeme pro propustnost dostat

$$\tau = nn' \left(\frac{2}{n+n'}\right)^2,$$

kde n je index lomu prostředí, ze kterého paprsek vystupuje, a n' je index lomu prostředí, do kterého paprsek vstupuje. V našem případě tedy platí

$$\tau = n \left(\frac{2}{1+n}\right)^2,$$

dosazením do (6) po úpravě obdržíme

$$F = \frac{P}{c(n+1)^4} \left(2(n+1)^4 - 32n^2 + \frac{d^2}{R^2} n(n-1)^3\right).$$

Tuto sílu porovnáme s tíhovou a pro hledaný výkon laseru dostaneme

$$P = \frac{mgc(n+1)^4}{2(n+1)^4 - 32n^2 + \frac{d^2}{R^2} n(n-1)^3} \doteq 1,8 \cdot 10^{11} \text{ W} = 180 \text{ GW},$$

kde $m = 2\pi\rho R^3/3$ je hmotnost skleněné polokoule. Vidíme, že potřebujeme obrovský výkon. I malá absorbce skla způsobí, že se polokoule v mžiku vypaří. Hodnoty d a R byly zadané tak, že jsme mohli zanedbávat i člen d^2/R^2 .

Poznámky k došlým řešením. Jedna skupina řešitelů diskutovala pouze lom světla na kulové ploše, druhá skupina zase naopak předpokládala, že bude všechno světlo pohlceno nebo odraženo. Protože se jiná řešení prakticky nevyskytla, nevyřešil úlohu nikdo zcela správně.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V. P ... zpomalující Měsíc (5 bodů; průměr 1,28; řešilo 18 studentů)

Přesnými měřeními je dokázáno, že rychlost oběhu Měsíce kolem Země klesá a jeho vzdálenost od Země se zvětšuje. Zamyslete se nad tím, jaká síla to způsobuje.

Během debaty o měsících Merkuru navrhl Honza Houštěk.

Důvod zpomalování měsíce jsou slapové jevy na Zemi. Při slapových jevech dochází k přesunu velkých mas vody, přičemž tření při těchto přesunech ubírá energii. No a tuto energii ztrácí Země ze své rotační energie, a tím se zpomaluje oběh Země okolo vlastní osy. Aby jsme

zjistili, jaký to má vliv na Měsíc, tak použijeme zákon zachování momentu hybnosti. Pro Měsíc obíhající okolo Země po kruhové dráze platí

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\varkappa M}{r^2},$$

kde M je hmotnost Země. Pro rychlost dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}.$$

Jelikož se Zem zpomalila, tak její moment hybnosti klesl, tím pádem musel stoupnout moment hybnosti Měsíce. (Měsíc rotuje ve stejném směru, jako je směr rotace Země.) No a jelikož moment hybnosti Měsíce je

$$J = mvr = m\sqrt{\varkappa Mr}$$

jeho zvýšení odpovídá zvýšení poloměru a tedy také snížení rychlosti.

Tím bychom odhalili slapové jevy jako zodpovědné za zpomalování a vzdalování, takže nám zbývá už jen vyšetřit problém z pohledu sil. Tedy najít silu, která způsobuje ono snížení hybnosti takto na dálku. Slapové síly způsobí vzdutí oceánů směrem k Měsíci. Třecí síly však toto vydutí chtějí rotovat ve směru rotace Země. Rovnovážná poloha vydutí potom bude vychýlená ze spojnice Země a Měsíce. Tím se vychýlí i celé těžiště Země, přitažlivá síla Měsíc–Zem získá i složku, která není na spojnici Měsíce s bodem, okolo kterého rotuje (těžiště soustavy Země–Měsíc), a která urychluje Měsíc. Jenže toto urychlení posune Měsíc na vyšší oběžnou dráhu (protože není kompenzované odstředivou silou) až na rovnovážnou dráhu. A jak jsme vypočítali, s vyšším poloměrem je rychlost na kruhové orbitě nižší. Tím jsme vysvětlili mechanismus, jakým se realizuje zákon zachování momentu hybnosti v daném případě.

Miro Kladiva
fykos@mff.cuni.cz

Úloha V. E ... bobřík míření (7 bodů; průměr 5,00; řešilo 7 studentů)

Jaro začíná a je pravý čas začít sportovat. Mezi mnohé sportovní aktivity patří mimo jiné tenis. A my vám vycházíme vstříc! Vaším úkolem je zjistit, jakou rychlost musí mít tenisový míček, aby rozbil okno. Nezapomeňte provést dostatek měření, abyste mohli vaše zjištěná data statisticky zpracovat.

Jarda Trnka vyčetl ze sbírky P. Kapicy.

Motivace úlohy

Mnohým se jistě zdálo zadání úlohy přinejmenším podivné. Nešlo však o náhodný rozmar pražských organizátorů. Úloha pochází z vážené sbírky příkladů nositele Nobelovy ceny za fyziku Petra Leonidoviče Kapicy *Fyzikalnyje zadači*. Tolik jen pro ty, co snad pochybují o vysoké kvalitě FYKOSích úloh.

Pravdou je, že s měřením jsou spojeny buď určité investice (pokud si okno zakoupíte), nebo nějaké ty nepříjemnosti (pokud rozbijete stále ještě sloužící okno). To však experimentátora nesmí odradit. Výzkum je na prvním místě!

Metoda měření a teorie

Na webové stránce <http://star.tau.ac.il/QUIZ/> si zájemci mohou nalézt teoretické předpovědi rychlosti. Hledejte tam úlohu *Breaking windows* z roku 1997. Výpočet není jednoduchý, proto ho zde nebudeme uvádět.

Jak vlastně při tomto nestandardním měření postupovat? Tak hlavně musíme nějakým způsobem určit rychlost dopadajícího míčku. To není vůbec tak jednoduché, jak se na první pohled zdá. Pokud bychom na okno míček házeli z nějaké vzdálenosti, tak budeme mít velké problémy s měřením doby letu (z té pak určíme rychlost míčku). Jediný rozumný způsob jak zaručit dostatečně dlouhý let míčku je vrh svislý vzhůru. Vyhodíme tedy míček do vzduchu, budeme měřit čas a budeme doufat, že spadne na přichystané okno. (Nebo můžeme míčkem házet postupně z prvního až n -tého patra vícepodlažního domu na okno na chodníku). Většinou nám sice míček spadne mimo skleněnou plochu, ale pokud se trefíme, budeme mít měření vcelku přesné.

Metoda měření bude tedy následující. Vyhodíme míček do vzduchu a budeme měřit čas t , za který spadne na přichystané okno. Pro rychlost v bude platit

$$v = \frac{gt}{2}.$$

Nezbývá tedy, než se pustit do měření.

Výsledky měření

Měření samotné bylo poznamenáno menším rozměrem skleněné plochy, tudíž velká část vrhů končila úplně mimo danou oblast. No, nakonec přece jenom pár pokusů skončilo tam, kde mělo, a i k rozbití okna došlo. Všechny pokusy, které skončily pádem míčku na skleněnou desku, jsou zaznamenány v tabulce.

čas t [s]	rychlost v [m·s ⁻¹]	rozbití
1,15	5,6	ne
1,87	9,2	ne
2,77	13,6	ne
2,91	14,3	ne
3,41	16,7	ne
3,67	18,0	ano

Výsledek nelze jednoznačně stanovit. Bude to zřejmě někde mezi hodnotami 16,7 m·s⁻¹ a 18,0 m·s⁻¹. Chybu měření času odhaduji na 0,2 s, což dává relativní chybu asi 5%. Ostatní chyby lze těžko stanovit (jako třeba nekolmý dopad míčku na okno). Proto celkovou chybu odhadneme. Výsledek pak můžeme napsat ve tvaru

$$v = (18 \pm 2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Na uvedené internetové adrese odhadují velikost rychlosti mezi 20 a 30 m/s. V zásadě je tedy výsledek tohoto experimentu ve shodě s teoretickou předpovědí. Samozřejmě tato hodnota není vůbec směrodatná pro všechna okna. Nějaké je tenčí, jiné tlustší, takže rozptýl výsledků může být dost velký.

Poznámky k došlým řešením

Řešení nepřišlo mnoho. Všichni, co se pokusili něco naměřit, si zaslouží pochvalu. *Slavo Takáč* bohužel nepřemluvil matku, aby obětovala okno ve prospěch vědy, *Tomáš Bednárik* neměl po ruce tenisák, tak musel házet na okno kameny, *Jendovi Valáškoví* se zase nechtělo utrácet za nové okno, použil tedy místo něho balící papír. Ze dvou dalších řešitelů by měl pan Kapica také radost – z *Martina Konečného* a *Petra Dvořáka*, kteří nelitovali obětovat okna ve prospěch vědy.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V. S ... nabliáda (5 bodů; průměr 3,00; řešilo 6 studentů)

- a) Uvažujte potenciál elektrického pole, pro který platí $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$, kde \mathbf{A} je konstantní vektor. Spočtete vektor elektrické indukce, když víte, že $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$.
 b) Spočtete vektor magnetické indukce \mathbf{B} , pokud pro vektorový potenciál platí

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{G}}{r},$$

kde \mathbf{G} je konstantní vektor. Magnetickou indukci můžeme spočítat ze znalosti vektorového potenciálu pomocí vztahu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

- c) Určete, co je výsledkem působení Laplaceova operátoru na polohový vektor \mathbf{r} . Laplaceův operátor působící na vektor definujeme podle vztahu

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}.$$

- a) Vztah pro $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi(r)$ si rozepíšeme tak, jak je ukázáno v seriálu.

$$\mathbf{E} = -\nabla(r_{\text{D}} \cdot \mathbf{A}) - \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_{\text{D}}).$$

Kolem tečky můžeme prohazovat vektory, tudíž můžeme psát

$$\mathbf{E} = -\nabla r_{\text{D}} \cdot \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A}_{\text{D}} \cdot \mathbf{r}.$$

Jelikož je $\nabla \mathbf{r} = \mathbb{I}$ a $\nabla \mathbf{A} = 0$, protože \mathbf{A} je konstantní vektor, dostáváme

$$\mathbf{E} = -\mathbb{I} \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{A}.$$

- b) K řešení lze použít výsledek úlohy spočtené v seriálu

$$\nabla \times (\mathbf{a} \mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}).$$

Pokud položíme $a = 1/r$, $\mathbf{u} = \mathbf{r}$ a $\mathbf{v} = \mathbf{G}$, vyjde po dosazení a úpravách

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{G}}{r} \right) = (\mathbf{r} \mathbf{G} - \mathbf{r} \mathbf{G}) \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{r} (\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G} \nabla \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{r} (\mathbf{G} \cdot \nabla \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{G}).$$

Pokud si uvědomíme, že $\nabla \frac{1}{r} = -\mathbf{r}/r^3$, $\nabla \mathbf{r} = \mathbb{I}$, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ a jakékoliv derivace \mathbf{G} jsou nula, protože se jedná o konstantní vektor, dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{r} &= (\mathbf{r}\mathbf{G} - \mathbf{r}\mathbf{G}) \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) + \frac{1}{r}(\mathbf{r}\nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G}\nabla \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{r}(\mathbf{G} \cdot \nabla \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{G}), \\ &= -\frac{\mathbf{r}\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{G}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^3} - \frac{3\mathbf{G}}{r} + \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbb{I}}{r}, \\ &= -\frac{\mathbf{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{G}}{r^3} - \frac{\mathbf{G}\mathbf{r}}{r}. \end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme využili vztahu $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ a toho, že kolem tečky můžeme prohazovat.
c) Stačilo pouze dosadit do připraveného vztahu

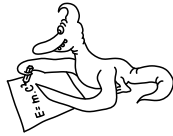
$$\Delta \mathbf{r} = \text{grad div } \mathbf{r} - \text{rot rot } \mathbf{r}.$$

Protože $\text{rot } \mathbf{r} = 0$, $\text{div } \mathbf{r} = 3$ a gradient konstanty je nula, dostáváme

$$\Delta \mathbf{r} = 0.$$

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz



Řešení VI. série

Úloha VI.1 ... třesk (4 body; průměr 0,86; řešilo 21 studentů)

Střelíme střelou s počáteční rychlostí v_0 z výšky h nad povrchem Země na kovovou stěnu ve vzdálenosti L . Pod jakým úhlem α (viz obr. 2) máme střilet, abychom co nejdříve slyšeli náraz? Úloha z archivu (6. ročník, 2. série).

Nejprve vypočítáme čas, za který doletí zvuk z výšky H na desce k pozorovateli vzdálenému L od desky. Uvažujeme, že se ve stěně jde zvuk z výšky H do výšky y a potom putuje vzduchem vzdálenost $s = \sqrt{L^2 + y^2}$. Doba, za jak dlouho to zvládne, je

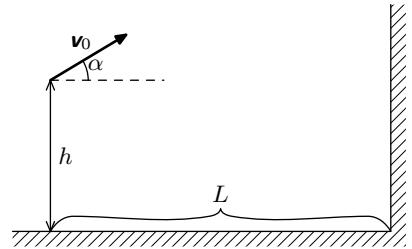
$$t_z = \frac{(H - y)}{c_1} + \frac{\sqrt{L^2 + y^2}}{c_0},$$

kde c_0 je rychlost zvuku ve vzduchu a c_1 je rychlost zvuku ve stěně. Musíme ještě zjistit pro jaké y je tato doba nejmenší

$$\frac{dt_z}{dy} = -\frac{1}{c_1} + \frac{y}{c_0\sqrt{L^2 + y^2}} = 0.$$

Takže řešení je $y = (c_0/c_1)s$, což po úpravách dává

$$\sqrt{s} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2}} L.$$



Obr. 2. Střelnice

z čehož je vidět, že s závisí jen na L , a nezávisí na H .

Čas, za který dojde k pozorovateli první zvuk, je

$$t_z = \frac{1}{c_1} H + \left(1 - \frac{c_0^2}{c_1^2}\right) \frac{s}{c_0}.$$

Jelikož chceme najít úhel, pro který bude čas minimální, a na úhlu závisí jen H a ne s , tak stačí uvažovat $t_z = (H/c_1) + t_0$, kde t_0 by byla v případě zadaných rychlostí a vzdáleností desky pouze nějaká konstanta.

Ještě musíme vyřešit dobu, za kterou dopadne střela na desku. Tento proces budeme brát jako šikmý vrh. Při počáteční rychlosti v_0 a úhlu α bude doba doletu $t_s = L/(v_0 \cos \alpha)$, přičemž střela doletí do výšky

$$H = L \operatorname{tg} \alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Tady si ještě musíme uvědomit, že nás bude zajímat hloubka a ne výška doletu, neboť v případě výšky bychom museli dát střele větší vertikální rychlost na úkor horizontální oproti případu se stejnou hloubkou, a doba, za jakou zvuk dojde k pozorovateli, nezávisí na tom, jestli to je hloubka nebo výška.

Takže musíme brát předcházející vztah s opačným znaménkem. Teď jsme již schopni určit celkový čas $t = t_z + t_s$, který chceme minimalizovat v závislosti na úhlu α . To provedeme zderivováním podle tohoto úhlu a položením derivace rovné nule

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{L \sin \alpha}{v_0 \cos^2 \alpha} - \frac{L}{c_1 \cos^2 \alpha} + \frac{L^2 g \sin \alpha}{v_0^2 c_1 \cos^3 \alpha} = 0.$$

To sa dá přepsat na rovnici

$$-v_0^2 \cos \alpha + Lg \sin \alpha + c_1 v_0 \cos \alpha \sin \alpha = 0.$$

Tato rovnice se už nedá jednoduše řešit, proto se spokojíme s takovýmto výsledkem. Ještě pro zajímavost, když uvažujeme rychlost střely o hodně nižší než rychlost zvuku ve stěně (což je dost rozumný předpoklad), tak nám budou vycházet malé úhly. Takže můžeme udělat přiblížení $\alpha \ll 1$ a potom jsme schopni tuto rovnici vyřešit jako

$$\alpha = \frac{v_0^2}{Lg + v_0 c_1}.$$

Miro Kladiwa

fykos@mff.cuni.cz

Úloha VI.2 ... meotar (4 body; průměr 1,17; řešilo 6 studentů)

Možná jste si všimli, že pod plochou zpětného projektoru (meotar) je skleněná deska se soustřednými kruhovými vrypy pracující jako čočka. Rozhodněte, jak se změní poloha obrazu, tedy jestli se posune směrem k meotaru nebo od meotaru, pokud tuto čočku odebereme. Jako bonus můžete vymyslet, na jakém principu skleněná deska s vrypy funguje.

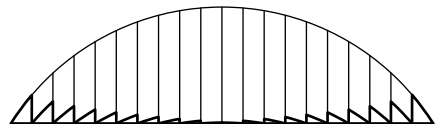
Vymyslel Pavel Augustinský na přednášce QFT.

Nejprve si musíme uvědomit následující elementární fakt: Bod A se zobrazí pomocí nějaké optické soustavy do bodu B, pokud se všechny paprsky, které vycházejí z bodu A a projdou touto optickou soustavou protnou v bodě B (například pokud je na zobrazované fólii jeden červený puntík, musí všechny paprsky červeného světla dopadnout do stejného bodu projekční plátna).

K zodpovězení první otázky si stačí uvědomit pouze to, že dráhu libovolného paprsku, který vychází z nějakého bodu promítané fólie a dopadá na projekční plátno, mohou ovlivnit pouze ty optické prvky (čočky, zrcadla, ...), které mu „stojí v cestě“. A protože diskutovaná čočka leží mezi fólií a zdrojem světla, nemůže nijak ovlivnit polohu, velikost ani orientaci obrazu. Úkolem této čočky je pouze zvýšení jasu obrazu.

Princip funkce této čočky je úplně stejný jako u čočky obyčejné. Čočka v meotaru je však „splácnutá“ tak, jak je naznačeno na obrázku 3. To ale příliš nevádí, protože u tenké čočky není podstatné množství skla mezi rozhraními sklo-vzduch.

Mnoho řešitelů chybně označilo tuto čočku za čočku Fresnelovu, přestože správně pochopili princip její funkce. Dodejme tedy pro objasnění, že Fresnelova čočka soustřeďuje na ní dopadající



Obr. 3. Čočka v meotaru

světlo díky jevu *difrakce* a nikoliv lomu. Tato čočka pracuje správně pouze ve velmi úzkém intervalu vlnových délek (rozhodně ne pro bílé světlo) a navíc musí být vzdálenost vrypů na této čočce řádově srovnatelná s vlnovou délkou dopadajícího světla.

Pavel Augustinský
fykos@mff.cuni.cz

Úloha VI. 3 ... *padající komín* (5 bodů; průměr 1,33; řešilo 6 studentů)

Silný vítr dul do stěn komínu. Přitom vychýlil komín ze svislé polohy. Komín začal padat a v určitém místě se rozlomil. Pokuste se určit, kde ke zlomu došlo.

Životní zkušenost Jarďy Trnky, kdysi jim spadl komín.

Aproximujeme si komín tenkou tyčkou, aby bylo možné úlohu rozumně vyřešit. Označme L délku komínu a m jeho hmotnost. Pokud komín vychýlíme z rovnovážné polohy, začne padat. Úhlové zrychlení ε v závislosti na úhlu φ , který svírá komín s vodorovnou podložkou, vypočteme z 2. impulzové věty $M = J\varepsilon$, kde $M = Fr = mg \cos \varphi L/2$. Pro moment setrvačnosti vůči bodu otáčení platí $J = mL^2/3$. Po dosazení dostaneme

$$\frac{1}{3}mL^2\varepsilon = \frac{mgL \cos \varphi}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{3g \cos \varphi}{2L}.$$

Označme x vzdálenost nějakého bodu od vrcholu komína. Tento bod si můžeme představit jako střed otáčení té části komína, která je nad ním. Potom z druhé impulzové věty dostaneme $M_1 = J_1\varepsilon_1$. Pro moment síly M_1 bude platit

$$M_1 = F_1 r_1 = m_1 g \cos \varphi \frac{x}{2} = \frac{mgx^2 \cos \varphi}{2L},$$

kde $m_1 = mx/L$ je hmotnost té části komína nad bodem x . Moment setrvačnosti bude analogicky

$$J_1 = \frac{1}{3}m_1 x^2 = \frac{mx^3}{3L}.$$

Po dosazení dostaneme pro zrychlení ε_1

$$\varepsilon_1 = \frac{M_1}{J_1} = \frac{3g \cos \varphi}{2x}.$$

Tímto zrychlením by se část komína od bodu x nahoru měla otáčet, ale nemůže, protože jí v tom brání pevnost materiálu.

Co to tedy znamená? V bodě x působí moment síly $M_1 = J_1\varepsilon_1$, ale na otáčení se uplatní pouze moment $M_2 = J_1\varepsilon$ (z druhé impulzové věty – komín se celý otáčí s úhlovým zrychlením ε). Rozdíl těchto momentů je

$$M' = M_1 - M_2 = J_1(\varepsilon_1 - \varepsilon) = \frac{mg \cos \varphi}{2L} \left(x^2 - \frac{x^3}{L} \right).$$

To je tedy moment, který se v bodě x ztrácí do deformací komína. No a kde jinde by měl komín rupnout než v bodě, kde bude tento moment největší. Pro bod maxima funkce $M' = M'(x)$ platí

$$\frac{dM'}{dx} = \frac{mg \cos \varphi}{2L} \left(2x - \frac{3x^2}{L} \right) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Dostáváme dvě řešení: $x = 0$, což je minimum, a $x = 2L/3$, což je hledané maximum. Vzdálenost bodu zlomu od paty komína je potom $L/3$.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.4 ... **potopa na Utodu** (4 body; průměr 3,00; řešili 4 studenti)

Planeta Utod o hustotě ρ je pokryta mořem z kapaliny hustoty ρ' . Výška hladiny je h , poloměr planety R . Vyšetřete stabilitu planety.

Volné pokračování slezských havířů od Pavla Augustinského.

Před vlastním výpočtem nejprve trochu okomentujme zadání. Celý systém planeta–oceán si z pochopitelných důvodů idealizujeme tak, že planeta je dokonale tuhá se sféricky symetricky rozloženou hmotou. Vnější gravitační projevy takového tělesa se nikterak neliší od dokonale tuhé homogenní koule o stejné hmotnosti, proto budeme homogenitu nadále předpokládat. Kapalina tvořící oceán nechť je taktéž ideální, tj. neviskózní a nestlačitelná. Hustotu (homogenizovanou) planety budeme značit ρ , hustotu kapaliny ρ_0 .

Konfigurace hmoty, kdy je planeta obalena konstantně tlustou vrstvou kapaliny, je zcela jistě rovnovážnou polohou (hladina kapaliny splývá s ekvipotenciálou výsledného gravitačního pole). V tomto řešení se budeme zabývat tím, zda a za jakých podmínek je tato konfigurace stabilní.

Co je myšleno stabilní konfigurací? Analogie toho, co znáte z mechaniky soustav tuhých těles; stabilní konfigurace je taková, u které malé fluktuace nezpůsobí nenávratnou změnu stavu systému.

Nabízí se otázka, zda vůbec může být popsán systém nestabilní. Poměrně snadno to lze nahlédnout, zamyslíme-li se nad dvěma extrémními případy. V tom prvním předpokládejme, že planeta má zanedbatelnou hmotnost a oceán tvoří v porovnání s poloměrem tenkou vrstvu. Není těžké si rozmyslet, že kapalina se v takové situaci vlastní gravitací koncentruje v jednom místě. Ještě lépe je nestabilní chování vidět v případě, kdy je planeta zanedbatelně malá vzhledem k hloubce „oceánu“. Pak můžeme gravitační pole planety zanedbat a představit si ji jen jako kuličku plavající v kapalně planetě. Je-li její hustota nižší než hustota kapaliny, bude dle Archimédova zákona nadnášena k povrchu; rovnovážná poloha ve středu kapalně koule je zjevně labilní.

Předchozí úvaha napovídá, že nestabilita nějak souvisí s poměrem hustot planety a kapaliny a nabízí se hypotéza, že oceán je nestabilní, právě když je jeho hustota vyšší než střední hustota planety. Ověříme to tedy výpočtem.

Využijeme toho, že ve stabilní rovnovážné poloze vede libovolná malá změna konfigurace ke zvýšení celkové energie (a naopak, lze-li nějakou spojitou změnou celkovou energii snížit, nejedná se o stabilní polohu). Změna, která nás bude zajímat, bude vychýlení planety ze středu kapalně koule při zachování kulového tvaru kapaliny. Výslednou změnu energie snadno popíšeme, představíme-li si planetu jako těleso o hustotě $\rho - \rho_0$, které prolíná kapalinou a nijak s ní neinteraguje¹ (kapalinu i těleso si lze představit např. jako náhodně rozmístěné hmotné body).

Pole kapalně koule lze snadno popsat, výpočtem lze ověřit, že intenzita závisí přímo úměrně na vzdálenosti od centra. Nyní je již jasné, že znaménko změny energie při vychýlení planety

¹) Na čtenáři necháváme ověření, že taková abstrakce je legitimní. Rozmyslete si zejména, jak to souvisí s Archimédovým zákonem.

ze středu kapalné koule závisí jen na znaménku $\rho - \rho_0$ konfigurace s planetou ve středu je stabilní, právě když je hustota planety větší než hustota kapaliny.

Jak vypadá stabilní konfigurace v opačném případě není těžké si představit. Planeta „plave“ na hladině kapalného tělesa, ovšem tvar tohoto tělesa i jejich vzájemná poloha závisí na poměru hustot a hmotností a pravděpodobně je nelze analyticky vyjádřit

Honza Houšťek

honza@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. P ... Faradayova klec (5 bodů; průměr 2,00; řešili 4 studenti)

Pokuste se určit největší možnou intenzitu elektrostatického pole, kterou ještě dokáže zastínit Faradayova klec. Zmíněno na přednášce z Fyziky II.

K této úloze jste si našli několik různých způsobů přístupu (jak se ostatně u problémové úlohy dá očekávat). Popíšeme nejčastější dva.

Definující vlastností ideálního vodiče je konstantní potenciál na celém povrchu bez ohledu na vnější pole. V důsledku jednoznačnosti řešení Laplaceovy rovnice je potenciál uvnitř uzavřené oblasti, na které je potenciál konstantní, roven téže konstantě a tedy je pole v celém objemu uvnitř vodiče nulové.

Klec ovšem není ideální vodič, prvním aspektem, na který jste poukázali, je konečná hodnota náboje a tedy i konečné napětí, které může být jeho rozmístěním kompenzováno. To je pravda, ovšem ilustrační výpočet² energie na vzdálení všech elektronů z gramu pevné látky o makroskopickou vzdálenost od jejich původních atomů ukazuje, že síla takto vzniklého pole o mnoho řádů převyšuje intenzitu jakkoliv silného externího pole, kterému by reálně klec mohla čelit. Tato limitace reálného vodiče proti ideálnímu je tedy snadno zanedbatelná.

Druhým rozdílem je fakt, že klecí nemyslíme uzavřenou plochu, ale pouze jakousi mříž tvořenou vodičem. Na samotném vodiči je potenciál konstantní, ale řešení Laplaceovy rovnice není v tomto případě jednoznačně určeno a vnější pole dírami dovnitř klece určitě částečně zasahuje. Pokusme toto kvantifikovat.

Pro jednoduchost si představme pravidelnou rovinnou čtvercovou mříž se vzdáleností uzlů a umístěnou v rovině xy a nulový potenciál volně na mříži. Situaci dále zjednodušíme tím, že budeme hledat separovatelné řešení pro potenciál $V(x, y, z) = V_x(x)V_y(y)V_z(z)$. Vzhledem k periodické okrajové podmínce je intuitivně jasné, že funkce V_x, V_y se vyplatí hledat mezi goniometrickými funkcemi, pomocí těchto řešení lze sestavit libovolné jiné. Hledejme tedy potenciál ve tvaru

$$V(x, y, z) = V_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) V_z(z),$$

kde m, n jsou přirozená čísla (udávající počet půlperiod funkcí V_x, V_y na vzdálenosti a). Dosazením do Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0$ dostáváme pro $V_z(z)$

$$V_z(z) = V_0 \exp\left(\pm \frac{\pi\sqrt{m^2 + n^2}}{a} \cdot z\right).$$

Průběh potenciálu má tedy v ose z exponenciální průběh. Naše řešení pochopitelně funguje jen lokálně, a v blízkosti mříže (kdy lze považovat aproximaci nekonečnou rovinou a oprávněnou). Globální pohled na celou uzavřenou mříž ukazuje, že je třeba vybrat ta řešení, ve kterých je

²⁾ který si laskavý čtenář snadno provede

potenciál tlumen ve směru dovnitř klece. Také je vidět, že síla tlumení roste s m, n , pro náš odhad, jak silné pole může do klece proniknout tedy použijeme hodnoty $m = n = 1$. Je-li v takové situaci do středu nějakého čtverce přiveden potenciál V_0 , je ve vzdálenosti a směrem do středu klece utlumen koeficientem $\exp(-\pi\sqrt{2}) = 0,012$ a nadále exponenciálně klesá.

Klec tedy efektivně odstíní vnější pole, které dovnitř proniká, na vzdálenosti srovnatelné s gridem mřížky.

Honza Houštek

honza@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. E ... do dna (8 bodů; průměr 5,36; řešilo 14 studentů)

Do dna vědra zhotovte malý kruhový otvor a vědro naplňte vodou. Změřte, jak závisí doba výtoku vody na počáteční výšce hladiny. Naměřené hodnoty porovnejte s teorií.

Na schůzce FYKOSu vymyslel Miro.

Do poslední série jsem si pro vás připravil jednoduchou experimentální úlohu. Klíčové na ní bylo srovnání teorie a experimentálních výsledků, proto začněme teorií.

Teorie

Důležité je uvědomit si, jak budeme experiment realizovat, a podle toho formulovat teorii. My jsme použili válcovou nádobu s malým otvorem ve dně. Protože voda bude z nádoby vytékat pomalu a rychlost vytékání se bude také měnit pomalu, můžeme děj považovat za přibližně ustálené. Takže použijeme Bernoulliho rovnici,

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konst.}$$

Tlak kapaliny je nahoře v nádobě a u výtoku stejný (je roven atmosférickému). Pokud označíme v_R rychlost poklesu hladiny a v výtokovou rychlost z otvoru, pak dostáváme

$$v^2 = v_R^2 + 2hg.$$

Potřebujeme získat vztah pro v_R v závislosti na výšce hladiny. Využijeme rovnici kontinuity

$$\pi r^2 v = \pi R^2 v_R^2$$

a dostáváme

$$-\frac{dh}{dt} = v_R = \sqrt{\frac{2hg}{\frac{R^4}{r^4} - 1}}.$$

Tuto rovnici můžeme řešit separací proměnných. Označíme-li H jako počáteční výšku hladiny a t čas, za který voda vytekla, potom integrujeme

$$\int_H^0 \frac{dh}{h} = - \sqrt{\frac{2g}{\frac{R^4}{r^4} - 1}} \cdot \int_0^t dt.$$

Pro dobu výtoku dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{R^4}{r^4} - 1} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx \frac{R^2}{r^2} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (7)$$

Na závěr teoretického úvodu se zamysleme nad možnými odchylkami teorie od skutečnosti. Předpokládali jsme proudění ustálené, které je ve skutečnosti nestacionární. Proto bude teorie dávat menší časy výtoku, než jsou ve skutečnosti. Ve výpočtu jsme také zanedbali viskozitu vody, která se projevuje tak, že rychlost vody není v celém průřezu otvoru stejná, efektivně tedy snižuje poloměr r . Dále má vliv tvar nádoby, v našem případě je „dokonale zúžená“, neboť v rovném dnu máme malý otvor. To má za následek, že elementy vody narážejí do dna a mění směr své hybnosti, tím se tedy také snižuje rychlost výtoku vodu. Experiment by měl proto dávat delší časy výtoku, než předpovídá teorie.

Postup měření

K úspěšnému provedení experimentu je potřeba mít válcovou nádobu s malým otvorem ve dně. Proto není moc vhodné používat kelblík, protože ten nemá konstantní průřez. Vyrobíme si vlastní nádobu například z plastu tak, že k plastové rouři o vnitřním poloměru R přilepíme (například pomocí tavné pistole) rovné dno s dírkou o poloměru r . Celou aparaturu pevně upevníme a plníme ji vodou do různých výšek. Při odměřování času, za který se nádoba vyprázdní, nečekáme do okamžiku, kdy je nádoba zcela prázdná. Lepší je postupovat tak, že si na nádobě uděláme rysku „nulové výšky“ a měříme čas, než hladina klesne na tuto rysku. Přesný okamžik vyprázdnění nádoby nelze totiž určit. Dobu výtoku budeme proměřovat pro dvanáct různých výšek, pro každou výšku provedeme tři měření. Abychom zajistili během všech těchto tří měření stejnou počáteční výšku hladiny, naléváme do nádoby vždy stejný odměřený objem vody.

Čas měříme na stopkách, výšku hladiny a průměr nádoby svinovacím metrem a průměr otvoru posuvným měřítkem.

Výsledky měření

Po zhotovení aparatury jsme změřili průměr nádoby a otvoru

$$2R = (124 \pm 2) \text{ mm}, \quad 2r = (8,0 \pm 0,5) \text{ mm}.$$

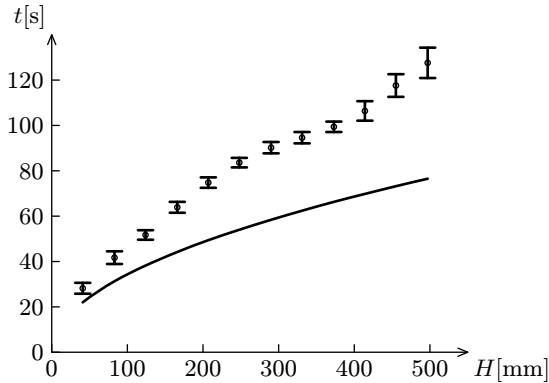
Doby výtoku pro jednotlivé počáteční výšky hladiny jsou uvedeny v následující tabulce.

H [mm]	t_1 [s]	t_2 [s]	t_3 [s]	t [s]	Δt [s]
41	29,1	27,6	27,9	28,2	2,4
83	41,3	43,0	40,8	41,7	2,8
124	52,1	51,4	51,7	51,7	2,1
166	64,6	63,1	64,0	63,9	2,4
207	74,1	75,4	75,0	74,8	2,3
248	83,2	84,1	83,6	83,6	2,1
290	90,8	90,5	89,2	90,2	2,5
331	95,9	94,3	94,4	94,9	2,5
373	100,2	98,9	99,2	99,4	2,3
414	108,7	106,2	104,3	106,4	4,3
455	120,4	115,2	117,1	117,6	5,0
497	131,6	124,3	127,0	127,6	6,7

V posledním sloupci je uvedena chyba hodnot t . Určíme ji ze vztahu

$$\Delta t = \sqrt{(3s_{sm})^2 + s_m^2},$$

kde s_{sm} je směrodatná odchylka a s_m je chyba měření, kterou v našem případě odhadujeme na 2 s (podle toho jak přesně bylo možné určit okamžik, kdy hladina klesla na námi vyznačenou rysku). Tyto hodnoty t spolu s chybovými úsečkami Δt vyneseme do grafu v závislosti na H (viz obr. 4). Hodnoty H považujeme za přesné, neboť jejich chyba je vzhledem k chybě měření času zanedbatelná.



Obr. 4

Do grafu rovněž zakreslíme teoretickou křivku danou vztahem (7). Její hodnoty jsou ovšem také zatíženy chybou, neboť neznáme přesně r a R . Pro relativní chybu teoretických hodnot platí

$$\delta t_{\text{teor}} = 2\delta r + 2\Delta R = 8\%.$$

Diskuse a závěr

Z grafu jasně vidíme, že i když uvážíme chybu teoretických hodnot, tak nám naměřené hodnoty doby výtoku vyjdou větší než teoretické. To potvrzuje naše očekávání, které jsme rozebrali v teoretickém úvodu. Naměřené hodnoty mají i podobný průběh jako teoretická křivka, jenom poslední tři hodnoty uhýbají k větším časům. To je pravděpodobně způsobeno změnou charakteru proudění.

Náš teoretický model tedy neodpovídá skutečnosti. Zmenšováním velikosti otvoru se mu ale můžeme dosti přiblížit. V technické praxi se zavádí rychlostní koeficient, který charakterizuje rychlost výtoku kapaliny z otvoru, a koeficient výtoku, který charakterizuje tvar nádoby. S jejich uvážením by se teoretická křivka a naměřené hodnoty v rámci chyby shodovaly.

Poznámky k došlým řešením

S většinou došlých řešeních jsem byl velice spokojen, relativně hodně řešení bylo ohodnoceno plným počtem bodů. Řešitelé přistoupili k problému dobře a vypořádali se i s teorií. Z důvodu časové tísně jsme si s dovolením vypůjčili naměřené hodnoty *Tomáše Bednářika*, moc mu děkujeme.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. S ... metoda zrcadlového náboje (5 bodů; průměr 3,75; řešili 4 studenti)

Bodový náboj o velikosti Q přibližíme do vzdálenosti r od středu uzemněné vodivé sféry o poloměru R .

- Jak bude vypadat pole uvnitř sféry?
 - Dokažte tvrzení, že množinou bodů majících konstantní poměr vzdáleností od dvou bodů je sféra.
 - Najděte náboje, jejichž polem lze nahradit pole vně sféry.
 - Bonus: Jaký celkový náboj se indukuje na sféře?
- a) Kulová sféra je Faradayova klec a tedy elektrické pole uvnitř je nulové. Protože je sféra vodivá, má ve všech svých bodech stejný potenciál, pak pro 2 body na sféře a cestu procházející sférou platí

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Elektrostatické pole je potenciálové, proto zvolíme-li libovolnou uzavřenou křivku l , platí

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Proto také je

$$\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

kde l je ale libovolná křivka, a proto $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

- b) Mějme dva body Q a Q' . Jejich souřadnice jsou

$$Q = [0, 0, 0], \quad Q' = [v, 0, 0].$$

Bod X o souřadnicích $[x, y, z]$ je stále vzdálen od bodů Q a Q' v poměru

$$k^2 = \frac{(x-v)^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Roznásobením a další úpravou dostáváme

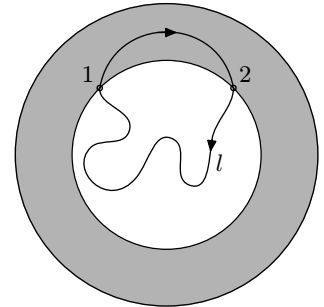
$$\left(x + \frac{v}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{kv}{k^2 - 1}\right)^2.$$

Toto je rovnice popisující kulovou sféru o středu v bodě $[-v/(k^2 - 1), 0, 0]$ a poloměru $(kv)/(k^2 - 1)$.

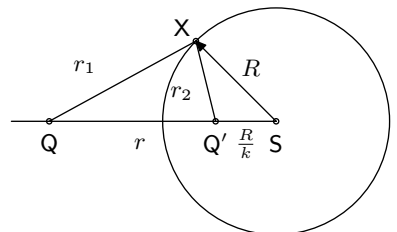
Protože má kulová sféra poloměr R , je vzdálenost bodu Q' od středu kulové sféry rovna R/k . Navíc můžeme dle obrázku určit, čemu je rovno k

$$\frac{r - R}{R - \frac{R}{k}} = k,$$

$$\frac{r}{R} = k.$$



Obr. 5



Obr. 6

c) Protože je sféra vodivá a uzemněná, je její potenciál roven nule. Dle obrázku proto platí

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2} \right) = 0,$$
$$-\frac{Q}{Q'} = \frac{r_1}{r_2} = k = \frac{r}{R}.$$

Tedy náboj Q' bude umístěn ve vzdálenosti $R/k = R^2/r$ od středu koule a bude mít velikost $Q' = -QR/r$. Okrajové podmínky náboje a nabitě sféry jsou stejné jako v případě dvou nábojů. Potenciál v prostoru vně sféry určíme z Laplaceovy rovnice. Z jednoznačnosti jejího řešení plyne, že v obou případech bude potenciál stejný.

Povšimněte si, že náboje Q a Q' splňují podmínku kulové inverze, tedy že součin vzdáleností nábojů od středu koule je roven čtverci poloměru koule

$$\frac{R^2}{r} \cdot r = R^2.$$

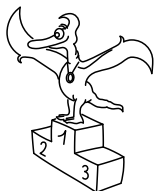
d) Zvolíme si plochu S , která bude obsahovat celou sféru, ale ne náboj Q . Pak dle Gaussova zákona je tok přes celou plochu indukovan jen nábojem Q' a platí

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q'}{\epsilon_0}.$$

Na druhou stranu pokud vezmeme náboje na sféře, musí tyto náboje (a náboj Q) vytvářet vně sféry stejné elektrické pole jako dvojice nábojů Q a Q' . Pro tuto situaci bude levá strana Gaussova zákona ekvivalentní s výše uvedeným a tedy i náboj indukovaný na sféře bude roven $Q' = -QR/r$.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po V. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ	
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	4	5	7	5	32	100	165
1. <i>Matouš Ringel</i>	G Broumov	4	4	3	4	5	–	5	25	99	157	
2. <i>Róbert Sedlák</i>	G Prešov	4	2	0	1	1	–	3	11	62	92	
3. <i>Peter Zalom</i>	G D. Tatarku, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	77	70	
4. <i>Tomáš Mánik</i>	G B. S. Timravý, Lučenec	–	–	–	–	–	–	–	0	60	55	
5. <i>Jan Fazekaš</i>	ISS Sokolov	–	–	–	–	–	–	–	0	58	49	
6. <i>Pavel Daniel</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	65	32	
7. <i>Štěpán Uxa</i>	GSOŠ Jilemnice	–	–	–	–	–	–	–	0	74	31	
8.–9. <i>Hynek Hanke</i>	G Budějovická Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	59	24	
<i>Petra Suková</i>	G Svitavy	–	–	–	–	–	–	–	0	73	24	
10. <i>Jana Ringelová</i>	SPŠ Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	92	22	
11. <i>Vladimír Sommer</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	0	51	20	
12. <i>Jan Moláček</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	85	17	
13. <i>Jana Hrudíková</i>	G J. Škody - Přerov	–	–	–	–	–	–	–	0	72	13	
14. <i>Ilič Ognjen</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	100	12	
15.–16. <i>Lucie Strmisková</i>	G Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10	
<i>Zdeněk Tichý</i>	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	0	77	10	
17. <i>Vojtěch Krejčířík</i>	G Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	0	75	9	
18.–19. <i>Milan Matějka</i>	SPŠ SaD Děčín	–	–	–	–	–	–	–	0	42	8	
<i>Jan Ondruš</i>	G F. M. Pelcla	–	–	–	–	–	–	–	0	40	8	
20. <i>Jan Křivonožka</i>	G M. Koperníka, Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	47	7	
21.–22. <i>Ladislav Peška</i>	G Slaný	–	–	–	–	–	–	–	0	86	6	
<i>Lukáš Voleský</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	60	6	
23.–27. <i>Petr Dostál</i>	G Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	0	71	5	
<i>Milan Kříž</i>	G Arcibiskupské Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	71	5	
<i>Michal Růžek</i>	G Arcibiskupské Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	63	5	
<i>Marta Říhová</i>	SPodŠ Náchod	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5	
<i>Zdeněk Váňa</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	33	5	
28. <i>Pavel Hála</i>	G Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4	
29. <i>Josef Brožek</i>	SOU Přelouč	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0	

Kategorie třetích ročníků

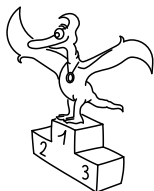
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	5	7	5	32	100	165
1. <i>Anton Repko</i>	G Sv. Mikuláša, Prešov	4	4	0	4	0	-	5	17	80	127
2. <i>Stanislav Vosol SOBĚ</i>	G Jablonec n. Nisou	-	-	-	-	-	-	-	0	55	70
3. <i>Michal Humpula</i>	G Uherský Brod	-	3	2	-	-	-	-	5	70	57
4. <i>Martin Takáč</i>	G Nové Zámky	-	-	-	-	-	-	-	0	61	52
5. <i>Peter Greškovič</i>	G dukl. hrdinov, Svidník	1	-	0	4	2	-	-	7	51	45
6. <i>Roman Fiala</i>	VOŠ a SPŠE Plzeň	2	-	0	1	1	-	-	4	47	37
7. <i>Petr Houštěk</i>	G Pelhřimov	-	-	-	-	-	-	-	0	86	36
8. <i>Daniel Božík</i>	G Jura Hronca	-	-	-	-	-	-	-	0	56	33
9. <i>Pavel Kocourek</i>	SPŠ Panská	-	-	-	-	-	-	-	0	80	28
10. <i>Pavína Böhmová</i>	G Komenského Havířov	-	-	-	-	-	-	-	0	60	26
11. <i>Lukáš Gríšek</i>	G Ostrava - Hrabůvka	-	-	-	-	-	-	-	0	45	25
12. <i>Zdeněk Kučka</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	-	-	-	-	-	-	-	0	52	23
13. <i>Bedřich Roskovec</i>	Masarykovo G, Plzeň	1	3	0	2	2	-	2	10	49	22
14. <i>Ivan Macháček</i>	G Uherský Brod	-	-	-	-	-	-	-	0	62	21
15. <i>Pavel Hron</i>	GOA Sedlčany	-	-	-	-	-	-	-	0	44	18
16. <i>Markéta Kavalírová</i>	G Českolipská Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	35	17
17. <i>Josef Kvasničák</i>	G Trutnov	-	-	-	-	-	-	-	0	26	14
18. <i>Hana Suchomelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	43	12
19.–21. <i>Dalibor Máj</i>	GaSG Vrbno p. Pr.	-	-	-	-	-	-	-	0	52	11
<i>Jan Pavelka</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	-	-	-	-	-	-	-	0	58	11
<i>Ondřej Zapletal</i>	G Křenová Brno	-	-	-	-	-	-	-	0	48	11
22.–23. <i>Jiří Kulda</i>	SPŠ Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	33	9
<i>Markéta Vilimovská</i>	G Českolipská Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	33	9
24. <i>Mária Sedivá</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	31	8
25.–26. <i>Radek Beneš</i>	SPŠ Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	50	7
<i>Lenka Rychtřová</i>	G V. Hlavatého, Louny	-	-	-	-	-	-	-	0	16	7
27.–28. <i>Kateřina Divišová</i>	GOA Sedlčany	-	-	-	-	-	-	-	0	27	4
<i>Richard Gracla</i>	G Nad Štolou Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	25	4
29.–32. <i>Lenka Doubravová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	-	-	-	-	-	-	-	0	43	3
<i>Jiří Kubr</i>	SPŠ Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	43	3
<i>Domínik Schneider</i>	G dr. J. Pekaře, M. Boleslav	-	-	-	-	-	-	-	0	13	3
<i>Jindřich Soukup</i>	G Kladno	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3
33. <i>Jan Komínek</i>	G Chrudim	-	-	-	-	-	-	-	0	13	2
34.–36. <i>Aleš Razým</i>	SpG Tábořská Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	0	33	1
<i>Vladimír Stejskal</i>	G Sladkovského n. Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	25	1
<i>Denis Vald</i>	G Jírovcova, Č. Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	0	14	1
37.–38. <i>Jana Babováková</i>	G Most	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0
<i>Petr Be</i>	Biskupské G, Brno	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	5	7	5	32	<i>100</i>	165
1. Tomáš Bednárik	Masarykovo G Vsetín	1	3	3	2	4	6	1	20	<i>62</i>	77
2. Slavomír Takáč	G Nové Zámky	4	–	0	4	0	4	–	12	<i>63</i>	73
3.–4. Tereza Klimošová	G Lanškroun	2	4	3	–	–	–	–	9	<i>80</i>	52
<i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	1	0	0	2	0	8	–	11	<i>35</i>	52
5. Monika Josieková	G Český Těšín	0	–	0	2	–	–	–	2	<i>63</i>	51
6. Aleš Podolník	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	0	–	–	–	–	0	<i>53</i>	47
7. Marek Scholz	G F. Palackého, Neratovice	2	2	3	–	–	–	–	7	<i>61</i>	46
8. Jenda Valášek	G Broumov	1	–	0	–	1	6	–	8	<i>56</i>	44
9. Petr Smítal	G Kapitána Jaroše, Brno	2	–	0	–	1	2	–	5	<i>55</i>	41
10. Lukáš Severa	G Benešov	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>62</i>	40
11. Peter Perešíni	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>60</i>	37
12.–13. Ondřej Bílka	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>58</i>	28
<i>Michal Sivák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>44</i>	28
14. Vladimír Sivák	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	1	–	–	1	<i>40</i>	27
15. Petra Malá	G Moravský Krumlov	–	–	–	–	1	–	–	1	<i>54</i>	26
16. Štěpán Jeřábek	G Jablonec n. Nisou	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>49</i>	22
17. Petr Bezmozek Dvořák	SPŠ Jihlava	2	–	0	2	2	7	–	13	<i>38</i>	21
18. Jiří Hloska	G Terezy Novákové, Brno	0	–	–	1	0	–	–	1	<i>41</i>	19
19. Jan Bednář	SPŠ Hronov	–	–	–	1	–	–	–	1	<i>32</i>	18
20. Jana Vrabelová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>53</i>	17
21. Ondřej Kudláček	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>56</i>	15
22.–23. Lucie Hympánová	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>25</i>	14
<i>Tomáš Jirotko</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>74</i>	14
24. Jiří Šperka	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>43</i>	12
25. Jakub Nohejl	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>22</i>	11
26. Josef Rubáš	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>14</i>	10
27. Adam Přenosil	G Sladkovského n. Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>64</i>	9
28.–30. David Chval	GOA Vimperk	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>64</i>	7
<i>Martin Slezák</i>	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>25</i>	7
<i>Hana Vítová</i>	G Bystřice n. Pern.	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>35</i>	7
31.–32. Roman Derco	G dukl. hrdinův, Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>50</i>	5
<i>Jan Korbel</i>	G Říčany	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>63</i>	5
33.–34. Pavla Grubhofferová	G Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>100</i>	3
<i>Štěpán Kříž</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>25</i>	3
35.–37. Petr Hanek	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>8</i>	2
<i>Štěpán Kozák</i>	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>10</i>	2
<i>Jiří Václavík</i>	G Dobříš	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>18</i>	2
38.–40. Vendula Exnerová	G Nad Štolou Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>25</i>	1
<i>Martin Hrdlička</i>	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>13</i>	1
<i>Hanka Kronusová</i>	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>13</i>	1

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	5	7	5	32	100	165
1. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	4	–	1	2	0	–	–	7	71	80
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	3	0	–	–	–	–	2	5	69	34
3. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	0	–	1	2	–	3	34	25
4. <i>Katarína Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	1	–	–	1	44	18
5. <i>Miroslav Kaděra</i>	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	73	11
6.–7. <i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	28	10
<i>Juraj Zajac</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	43	10
8. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	0	50	8
9. <i>Jana Przewzková</i>	G Komenského Havířov	–	–	–	–	–	–	–	0	13	6
10.–12. <i>Ján Čuvala</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	38	3
<i>Pavel Irinkov</i>	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	15	3
<i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
13. <i>Libor Skala</i>	G Blovice	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
14. <i>Michael Dvořáček</i>	G Letovice	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0



Pořadí řešitelů po VI. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	5	4	5	8	5	35	100	200
1. <i>Matouš Ringel</i>	G Broumov	-	-	-	-	-	-	-	0	99	157
2. <i>Róbert Sedlák</i>	G Prešov	-	-	-	-	-	-	-	0	62	92
3. <i>Peter Zalom</i>	G D. Tatarku, Poprad	-	-	-	-	-	-	-	0	77	70
4. <i>Tomáš Mánik</i>	G B. S. Timravý, Lučenec	-	-	-	-	-	-	-	0	60	55
5. <i>Jan Fazekaš</i>	ISS Sokolov	-	-	-	-	-	-	-	0	58	49
6. <i>Pavel Daniel</i>	G Ch. Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	65	32
7. <i>Štěpán Uxa</i>	GSOŠ Jilemnice	-	-	-	-	-	-	-	0	74	31
8.–9. <i>Hynek Hanke</i>	G Budějovická Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	59	24
<i>Petra Suková</i>	G Svitavy	-	-	-	-	-	-	-	0	73	24
10. <i>Jana Ringelová</i>	SPŠ Chrudim	-	-	-	-	-	-	-	0	92	22
11. <i>Vladimír Sommer</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	-	-	-	-	-	-	-	0	51	20
12. <i>Jan Moláček</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	-	-	-	-	-	-	-	0	85	17
13. <i>Jana Hrudíková</i>	G J. Škody - Přerov	-	-	-	-	-	-	-	0	72	13
14. <i>Ilič Ognjen</i>		-	-	-	-	-	-	-	0	100	12
15.–16. <i>Lucie Strmisková</i>	G Kyjov	-	-	-	-	-	-	-	0	63	10
<i>Zdeněk Tichý</i>	G Pelhřimov	-	-	-	-	-	-	-	0	77	10
17. <i>Vojtěch Krejčířík</i>	G Kroměříž	-	-	-	-	-	-	-	0	75	9
18.–19. <i>Milan Matějka</i>	SPŠ SaD Děčín	-	-	-	-	-	-	-	0	42	8
<i>Jan Ondruš</i>	G F. M. Pelcla	-	-	-	-	-	-	-	0	40	8
20. <i>Jan Křivonožka</i>	G M. Koperníka, Bílovec	-	-	-	-	-	-	-	0	47	7
21.–22. <i>Ladislav Peška</i>	G Slaný	-	-	-	-	-	-	-	0	86	6
<i>Lukáš Voleský</i>	SPŠ Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	60	6
23.–27. <i>Petr Dostál</i>	G Žamberk	-	-	-	-	-	-	-	0	71	5
<i>Milan Kříž</i>	G Arcibiskupské Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	71	5
<i>Michal Růžek</i>	G Arcibiskupské Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	63	5
<i>Marta Říhová</i>	SPodŠ Náchod	-	-	-	-	-	-	-	0	45	5
<i>Zdeněk Váňa</i>	SPŠ Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	33	5
28. <i>Pavel Hála</i>	G Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	0	50	4
29. <i>Josef Brožek</i>	SOU Přelouč	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	5	4	5	8	5	35	100	200
1. <i>Anton Repko</i>	G Sv. Mikuláša, Prešov	3	4	2	4	5	–	5	23	81	150
2. <i>Stanislav Vosol SOBĚ</i>	G Jablonec n. Nisou	3	1	–	–	–	2	–	6	53	76
3. <i>Michal Humpula</i>	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	70	57
4. <i>Martin Takáč</i>	G Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	0	61	52
5. <i>Peter Greškovič</i>	G dukl. hrdinov, Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	51	45
6. <i>Roman Fiala</i>	VOŠ a SPŠE Plzeň	0	–	0	–	–	1	–	1	40	38
7. <i>Petr Houštěk</i>	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	0	86	36
8. <i>Daniel Božík</i>	G Jura Hronca	–	–	–	–	–	–	–	0	56	33
9. <i>Pavína Böhmová</i>	G Komenského Havířov	1	–	–	–	–	4	–	5	56	31
10. <i>Pavel Kocovrek</i>	SPŠ Panská	–	–	–	–	–	–	–	0	80	28
11. <i>Lukáš Gříšek</i>	G Ostrava - Hrabůvka	–	–	–	–	–	–	–	0	45	25
12. <i>Zdeněk Kučka</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	0	52	23
13.–14. <i>Markéta Kavalířová</i>	G Českolipská Praha	0	1	–	–	–	4	–	5	34	22
<i>Bedřich Roskovec</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	49	22
15. <i>Ivan Macháček</i>	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	62	21
16. <i>Pavel Hron</i>	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	44	18
17. <i>Markéta Vilimovská</i>	G Českolipská Praha	0	1	–	–	–	5	–	6	35	15
18. <i>Josef Kvasničák</i>	G Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	0	26	14
19. <i>Hana Suchomelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	43	12
20.–22. <i>Dalibor Máj</i>	GaSG Vrbno p. Pr.	–	–	–	–	–	–	–	0	52	11
<i>Jan Pavelka</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	58	11
<i>Ondřej Zapletal</i>	G Křenova Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	48	11
23. <i>Jiří Kulda</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	33	9
24. <i>Mária Sedivá</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	31	8
25.–26. <i>Radek Beneš</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	7
<i>Lenka Rychtřová</i>	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	0	16	7
27. <i>Jindřich Soukup</i>	G Kladno	1	–	–	–	–	–	2	3	35	6
28. <i>Denis Vald</i>	G Jírovce, Č. Budějovice	1	–	1	2	–	–	–	4	25	5
29.–30. <i>Kateřina Divišová</i>	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	27	4
<i>Richard Gracla</i>	G Nad Štolou Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	4
31.–33. <i>Lenka Doubravová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	43	3
<i>Jiří Kubr</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	43	3
<i>Dominik Schneider</i>	G dr. J. Pekaře, M. Boleslav	–	–	–	–	–	–	–	0	13	3
34. <i>Jan Komínek</i>	G Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	13	2
35.–36. <i>Aleš Razým</i>	SpG Tábořská Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	33	1
<i>Vladimír Stejskal</i>	G Sladkovského n. Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
37.–38. <i>Jana Babováková</i>	G Most	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
<i>Petr Be</i>	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	5	4	5	8	5	35	100	200
1. <i>Slavomír Takáč</i>	G Nové Zámky	4	1	0	4	1	7	–	17	62	90
2. <i>Tomáš Bednářík</i>	Masarykovo G Vsetín	0	0	0	2	1	8	–	11	57	88
3.–4. <i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	1	0	0	–	1	8	–	10	36	62
<i>Aleš Podolník</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	1	1	5	–	–	8	–	15	57	62
5. <i>Monika Josieková</i>	G Český Těšín	2	–	–	–	–	8	–	10	66	61
6. <i>Tereza Klímošová</i>	G Lanškroun	–	–	–	–	–	–	–	0	80	52
7. <i>Jenda Valášek</i>	G Broumov	0	–	–	–	–	6	–	6	56	50
8. <i>Petr Smítal</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	–	4	–	4	–	8	57	49
9. <i>Marek Scholz</i>	G F. Palackého, Neratovice	1	–	–	–	–	1	–	2	55	48
10. <i>Lukáš Severa</i>	G Benešov	–	–	–	–	–	–	–	0	62	40
11. <i>Peter Perešíni</i>	G Tajovského, B. Bystrica	1	–	–	–	–	–	–	1	58	38
12. <i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	0	–	–	–	–	5	–	5	52	31
13.–15. <i>Ondřej Bílka</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	58	28
<i>Michal Sívák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	44	28
<i>Jana Vrabelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	1	5	–	–	5	–	11	57	28
16. <i>Vladimír Sívák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	40	27
17. <i>Štěpán Jeřábek</i>	G Jablonec n. Nisou	–	–	–	–	–	–	–	0	49	22
18. <i>Petr Bezmozek Dvořák</i>	SPŠ Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	38	21
19.–20. <i>Jan Bednář</i>	SPŠ Hronov	1	–	–	–	–	–	–	1	31	19
<i>Jiří Hloska</i>	G Terezy Novákové, Brno	0	–	–	–	–	–	–	0	38	19
21. <i>Ondřej Kudláček</i>	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	56	15
22.–23. <i>Lucie Hympánová</i>	G Kladno	0	–	–	–	–	–	–	0	23	14
<i>Tomáš Jirotko</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	74	14
24. <i>Jiří Šperka</i>	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	43	12
25. <i>Jakub Nohejl</i>	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	22	11
26. <i>Josef Rubáš</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	14	10
27. <i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského n. Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	64	9
28.–30. <i>David Chval</i>	GOA Vimperk	–	–	–	–	–	–	–	0	64	7
<i>Martin Slezák</i>	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	25	7
<i>Hana Vítová</i>	G Bystřice n. Pern.	–	–	–	–	–	–	–	0	35	7
31. <i>Jiří Václavík</i>	G Dobříš	–	–	–	–	–	4	–	4	32	6
32.–33. <i>Roman Derco</i>	G dukl. hrdinův, Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	50	5
<i>Jan Korbel</i>	G Říčany	–	–	–	–	–	–	–	0	63	5
34.–35. <i>Pavla Grubhofferová</i>	G Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
<i>Štěpán Kříž</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	3
36.–37. <i>Petr Hanek</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	8	2
<i>Štěpán Kozák</i>	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	0	10	2
38.–40. <i>Vendula Exnerová</i>	G Nad Štolou Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
<i>Martin Hrdlička</i>	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1
<i>Hanka Kronusová</i>	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	5	4	5	8	5	35	100	200
1. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	2	-	-	-	-	-	4	6	70	86
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	1	0	-	-	1	8	4	14	64	48
3. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	5	-	-	4	-	9	39	34
4. <i>Katarína Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	44	18
5. <i>Miroslav Kaděra</i>	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	73	11
6.-7. <i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	0	-	-	-	-	-	-	0	25	10
<i>Juraj Zajac</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	43	10
8. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	-	-	-	-	-	-	-	0	50	8
9. <i>Jana Przewczková</i>	G Komenského Havířov	-	-	-	-	-	-	-	0	13	6
10.-12. <i>Ján Čuwala</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3
<i>Pavel Irinkov</i>	G Ústavní, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	15	3
<i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	-	-	-	-	-	-	-	0	100	3
13. <i>Libor Skala</i>	G Blovice	-	-	-	-	-	-	-	0	25	1
14. <i>Michael Dvořáček</i>	G Letovice	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.