

17. ročník, úloha VI. S ... metoda zrcadlového náboje (5 bodů; průměr 3,75; řešili 4 studenti)

Bodový náboj o velikosti Q přiblížíme do vzdálenosti r od středu uzemněné vodivé sféry o poloměru R .

- Jak bude vypadat pole uvnitř sféry?
- Dokažte tvrzení, že množinou bodů majících konstantní poměr vzdáleností od dvou bodů je sféra.
- Najděte náboje, jejichž polem lze nahradit pole vně sféry.
- Bonus: Jaký celkový náboj se indukuje na sféře?

a) Kulová sféra je Faradayova klec a tedy elektrické pole uvnitř je nulové. Protože je sféra vodivá, má ve všech svých bodech stejný potenciál, pak pro 2 body na sféře a cestu procházející sférou platí

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Elektrostatické pole je potenciálové, proto zvolíme-li libovolnou uzavřenou křivku l , platí

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Proto také je

$$\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

kde l je ale libovolná křivka, a proto $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

b) Mějme dva body Q a Q' . Jejich souřadnice jsou

$$Q = [0, 0, 0], \quad Q' = [v, 0, 0].$$

Bod X o souřadnicích $[x, y, z]$ je stále vzdálen od bodů Q a Q' v poměru

$$k^2 = \frac{(x-v)^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Roznásobením a další úpravou dostáváme

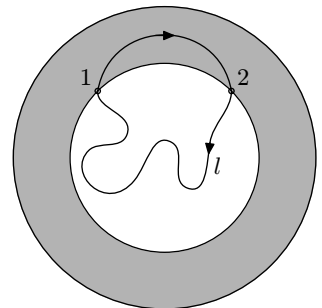
$$\left(x + \frac{v}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{kv}{k^2 - 1}\right)^2.$$

Toto je rovnice popisující kulovou sféru o středu v bodě $[-v/(k^2 - 1), 0, 0]$ a poloměru $(kv)/(k^2 - 1)$.

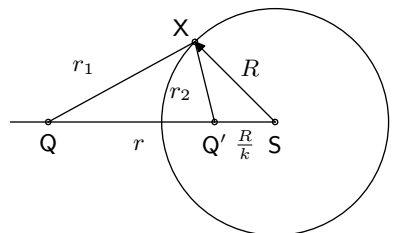
Protože má kulová sféra poloměr R , je vzdálenost bodu Q' od středu kulové sféry rovna R/k . Navíc můžeme dle obrázku určit, čemu je rovno k

$$\frac{r - R}{R - \frac{R}{k}} = k,$$

$$\frac{r}{R} = k.$$



Obr. 1



Obr. 2

c) Protože je sféra vodivá a uzemněná, je její potenciál roven nule. Dle obrázku proto platí

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2} \right) = 0,$$
$$-\frac{Q}{Q'} = \frac{r_1}{r_2} = k = \frac{r}{R}.$$

Tedy náboj Q' bude umístěn ve vzdálenosti $R/k = R^2/r$ od středu koule a bude mít velikost $Q' = -QR/r$. Okrajové podmínky náboje a nabitě sféry jsou stejné jako v případě dvou nábojů. Potenciál v prostoru vně sféry určíme z Laplaceovy rovnice. Z jednoznačnosti jejího řešení plyne, že v obou případech bude potenciál stejný.

Povšimněte si, že náboje Q a Q' splňují podmínku kulové inverze, tedy že součin vzdáleností nábojů od středu koule je roven čtverci poloměru koule

$$\frac{R^2}{r} \cdot r = R^2.$$

d) Zvolíme si plochu S , která bude obsahovat celou sféru, ale ne náboj Q . Pak dle Gaussova zákona je tok přes celou plochu indukovaný jen nábojem Q' a platí

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q'}{\epsilon_0}.$$

Na druhou stranu pokud vezmeme náboje na sféře, musí tyto náboje (a náboj Q) vytvářet vně sféry stejné elektrické pole jako dvojice nábojů Q a Q' . Pro tuto situaci bude levá strana Gaussova zákona ekvivalentní s výše uvedeným a tedy i náboj indukovaný na sféře bude roven $Q' = -QR/r$.

Karel Tůma

`kajinek@fykos.mff.cuni.cz`