

Milí řešitelé!

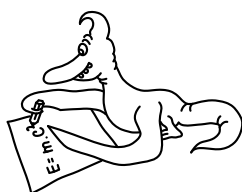
XVIII. ročník FYKOSu je u konce. Doufáme, že se vám seminář líbil, že jste si zasoutěžili, ale hlavně se také něco nového naučili. S maturanty se těšíme na shledání v řadách organizátorů, s ostatními pak v příštím ročníku a s těmi úspěšnějšími také na podzimním soustředění.

V této brožurce najdete řešení 5. a 6. série, výsledkovou listinu po 5. sérii a konečnou výsledkovou listinu. S letošním seriálem se rozloučíte jeho posledním dílem na straně 31. Pokud se účastníte soutěže ve hledání chyb, najdete aktuální pořadí na straně 41, a jestliže si chcete ještě polepšit, hledejte chyby i v tomto čísle.

Vás, kteří se již nedočkavě těšíte na příští 19. ročník FYKOSu, potěší zadání první série a první díl seriálu na konci brožurky.

Za všechny organizátory vám pěkné prázdniny přeje

Honza Prachař

**Řešení V. série****Úloha V.1 ... dáreček od Buffala** (4 body; průměr 3,28; řešilo 32 studentů)

Buffalo Bill se už roky snaží polapit Jessieho Jamese, známého banditu. V městečku Clay County mu konečně přišel na stopu. Strhla se přestřelka. Buffalo si všiml sudu plného petroleje na vozíku mezi sebou a Jessiem. „Jak dostat sud k Jessiemu, abych ho mohl zapálit?“ rozmýšlí Bill.

Jessie prostřelil sud v 9/10 výšky a ze sudu začal stříkat petrolej. Buffalo se trefil přesně do poloviny sudu a střílí znovu. Vyřešte, s jakým počátečním zrychlením se bude pohybovat vozíček v závislosti na tom, kam se Bill trefí podruhé. Předpokládejte, že hybnost kulky je nulová, a tření zanedbejte. Zamyslete se nad dalšími zajímavými okolnostmi tohoto souboje.

Úloha se slovenské Fyzikální olympiády.

Než se začneme zabývat samotným soubojem, vypočítáme, jaký důsledek bude mít zásah jediné střely do sudu. Po výstřelu začne ze sudu vytékat petrolej o hustotě ρ . Dle první impulzové věty je celková hybnost soustavy sud–vytékající petrolej konstantní (neb jediná působící vnější síla je tíhová síla). Vypočítejme hybnost petroleje Δp , který vyteče ze sudu za časový interval Δt . Jeho hmotnost je

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S v \Delta t,$$

kde S je průřez díry, kterou vytvoří střela v sudu, a v je rychlost výtoku petroleje. Hybnost je pak rovna (za předpokladu, že rychlost výtoku je v intervalu Δt konstantní)

$$\Delta p = \Delta m v = \rho S v^2 \Delta t.$$

Z první impulzové věty plyne, že změna hybnosti sudu bude rovna hybnosti vyteklého petroleje, pro sílu působící na sud tedy platí

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S v^2.$$

Teď už nám stačí jen zjistit, jak velká je výtoková rychlost petroleje. Tu určíme například ze zákona zachování energie (je třeba předpokládat, že proudění vody k výtoku je ustálené)

$$v = \sqrt{2gh},$$

kde h je výška kapaliny nad otvorem a g velikost tíhového zrychlení. Celkově pak pro jeden otvor dostáváme

$$F = 2\rho Sgh.$$

Tím jsme vypočítali velikost síly. Směr vektoru síly je zřejmě opačný, než v jakém vytéká petrolej.

Jessie i Buffalo Bill střílejí do sudu tak rychle po sobě, že zasáhnou sud téměř ve stejném okamžiku. Předpokládejme, že vektor výsledné síly působící na sud míří k Jessiemu. Pak souřadnice výsledné síly bude dle zadání rovna

$$F = -2\rho Sg \frac{h}{10} + \rho Sg \frac{h}{2} + 2\rho Sgx = 2\rho Sg \left(\frac{2h}{5} + x \right),$$

kde x je vzdálenost druhého Billova zásahu od hladiny petroleje v sudu. Počáteční souřadnici zrychlení sudu a pak určíme

$$a = \frac{F}{M} = \frac{2\rho Sg (2h/5 + x)}{M}.$$

Vidíme, že v každém případě bude sud zrychlovat směrem k Jessiemu, neboť $a > 0$. Ve skutečnosti by se však sud určitě nepohnul, protože působící síla by nepřekonala statické tření.

Nemalá část z vás chybně určila působící sílu. Tvrdili jste, že velikost síly urychlující sud je rovna hydrostatické síle v místě otvoru. Tato síla ale vychází poloviční oproti vzorovému řešení. Rozdíl lze vysvětlit následovně.

Rozeberme, jak působí petrolej na sud. Na sud jednak působí hydrostatická síla a jednak reakce od vystřikujícího petroleje. Jelikož je v nádobě otvor, je výslednice hydrostatické síly nulová, její vektor míří opačným směrem, než vytéká voda. Podle zákona akce a reakce působí vystřikující petrolej na sud opačnou silou, než jakou je petrolej urychlován. Vystřikující petrolej ovšem urychluje hydrostatická síla, celková síly urychlující sud je tedy rovna dvojnásobku hydrostatické síly.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.2 ... pád ze schodů (3 body; průměr 2,42; řešilo 26 studentů)

Malý Karlík si hraje s kuličkou. Při cvrnkání je však neopatrný, kulička se mu odkutálí k nakloněné rovině, kterou doma mají místo schodiště, a začne po ní klouzat dolů. Kulička se pohybuje tak, že vektor její rychlosti \mathbf{v} svírá s horní hranou nakloněné roviny úhel φ . Vypočítejte vektor rychlosti \mathbf{v}' kuličky (tj. jeho velikost a také směr) pod nakloněnou rovinou, jejíž výška je h . Tření mezi kuličkou a zemí je malé, proto ho zanedbejte. Předpokládejte, že horní a dolní hrana nakloněné roviny je zaoblená, takže se kulička neodlepí od podlahy.

Jako bonus můžete vypočítat, jak se změní směr rychlosti kuličky, která proletí válcovou jamkou o poloměru R a hloubce h se zkosenými hranami (viz obr. 1). Délku zkosení můžete vzhledem k poloměru jamky zanedbat.

Napadlo Matouše Ringela.

K vyřešení této úlohy nám dopomohou známé mechanické zákony zachování. Zákon zachování energie říká, že pokud měla kulička na začátku kinetickou energii T_1 a na konci kinetickou energii T_2 , potom rozdíl těchto energií je roven změně potenciální energie mgh (neboť kulička klesne o h v gravitačním poli). Zákon zachování hybnosti dále tvrdí, že nepůsobí-li během celého procesu v nějakém směru žádná síla, pak je složka hybnosti kuličky v tomto směru stejná na začátku jako na konci. Toto jsou postačující vstupní informace.

Zákon zachování energie doopravdy platí, poněvadž tření je velmi malé (a zanedbáváme jej) a kulička se neodlepí od země, tedy ani nedopadá, ani se neodráží, v kterýchžto procesech se energie předává podložce a současně se kulička ohřívá. Zákon zachování hybnosti ovšem platí jen v jistém směru. Není jím směr kolmý na hranu schodu, neboť během sjezdu v tomto směru působí urychlující složka gravitační síly. Ve směru rovnoběžném s hranou však během procesu žádná síla nepůsobí, a zachová se tudíž složka hybnosti (i rychlosti, hmotnost kuličky se nemění) v tomto směru. Tímto jsme sestavili dvě rovnice (označení viz obrázek 2)

$$mv_{1\perp} = mv_{2\perp} \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh.$$

Z obrázku rovněž vyčteme platnost vztahů $v_{1\perp} = v_1 \sin \vartheta_1$ a $v_{2\perp} = v_2 \sin \vartheta_2$. Z rovnice zákona zachování energie vyjádříme $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$ a rovnici pro siny upravíme na tvar

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_1^2}} = n.$$

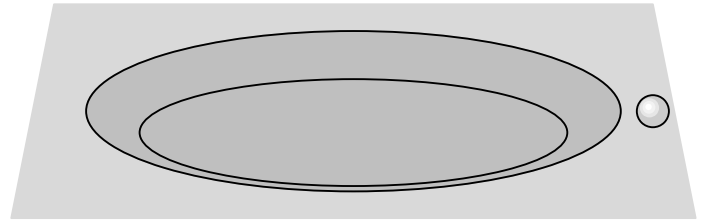
Všem znalým optiky se teď musí rozsvítit: odvodili jsme mechanický Snellův zákon. Roli indexu lomu hraje veličina na pravé straně rovnice, která závisí pouze na velikosti vstupní rychlosti a hloubce jámy.

Když už nyní víme, že kulička se na rozhraní láme jako světelný paprsek, můžeme zkusit „zobrazit“ kuličku čočkou – důlkem. Situace je zachycena na obrázku 3.

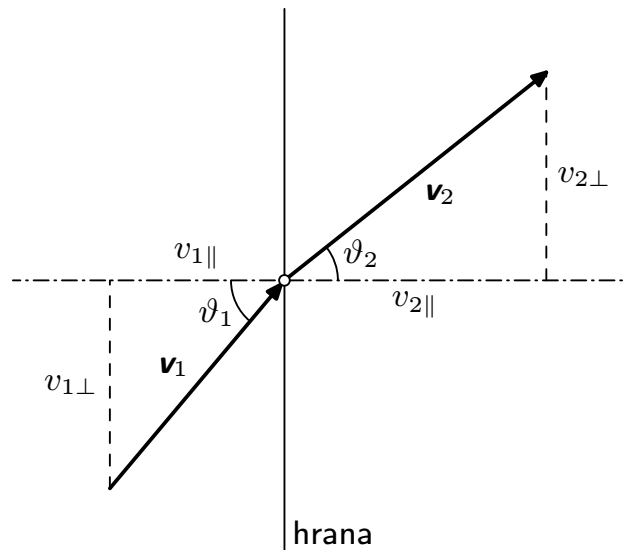
Na prvním i druhém rozhraní použijeme odvozený zákon lomu (stejný jako v optice!), tedy položíme $\sin \alpha = n \sin \beta$, a uvědomíme si, že pro celkovou změnu směru χ platí $\chi = 2(\alpha - \beta)$. Teď stačí jen dosadit za $\beta = \arcsin(\sin \alpha/n)$ a máme hotovo. Platí

$$\chi = 2 \left(\alpha - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) \right).$$

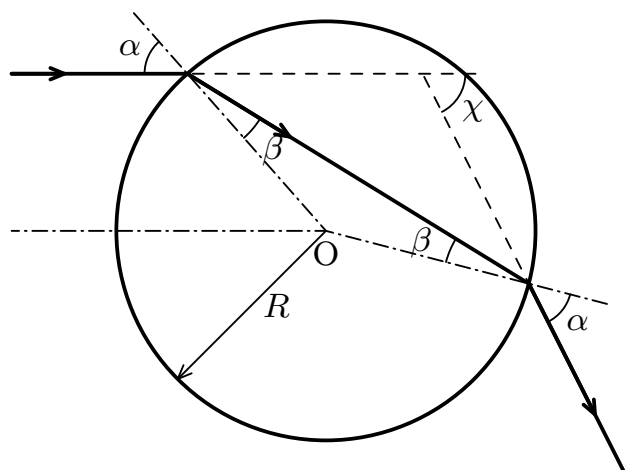
Zájemci mohou vyřešit ještě zobrazení svazku kuliček tenkou jamkou ve tvaru čočky. Neměli bychom zapomenout prodiskutovat vliv okrajů. V tomto případě totiž nebude zákon lomu



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

platit přesně, nýbrž pouze tehdy, budou-li rozměry zkosení hran zanedbatelné proti poloměru důlku – pouze tehdy okraj lokálně vypadá jako rovná hrana, pro kterou odvozený zákon lomu platí.

Ty z vás, kteří poctivě četli seriál anebo jinde slyšeli o lagrangiánech či akcích, nalezené vzorečky jistě nepřekvapily. Mechanika se totiž dá odvodit z jistého variačního principu podobného Fermatovu principu geometrické optiky. Naopak geometrická optika se dá přepsat do parciálních diferenciálních rovnic podobných těm mechanickým. Tato analogie vedla zakladatele kvantové mechaniky k zavedení vlnově-částicového dualismu.

Matouš Ringel

matous@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.3 ... beta rozpad (3 body; průměr 2,70; řešilo 23 studentů)

Při měření rozpadu neutronu na elektron a proton proměřovali čeští vědci energii vylétávajícího elektronu. Jak mohou pouze na základě údajů z tohoto měření poznat, zda nevzniká při tomto rozpadu ještě jiná částice? Uvažujte, že neutron je před rozpadem v klidu.

Úlohu vymyslel Pavel Augustinský.

Pro pořádek nejprve zjistíme, zda se může dvoučásticový rozpad vůbec realizovat a vypočítáme energii elektronu. Uvažujme, že při rozpadu vzniká pouze proton a elektron. Celkovou energii částice můžeme vyjádřit relativistickým vztahem

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2,$$

kde c je rychlost světla, m_0 klidová hmotnost částice a p její hybnost. Protože byl neutron původně v klidu, budou hybnosti elektronu a protonu opačné.

Platí také zákon zachování energie

$$E_{n0} = E_p + E_e,$$

kde E_{n0} je klidová energie neutronu a E_p a E_e jsou energie protonu a elektronu. Po odečtení E_e od obou stran rovnice a jejím následným umocnění dostáváme

$$E_{n0}^2 + E_e^2 - 2E_e E_{n0} = E_p^2.$$

Nyní dosadíme za celkovou energii protonu a za klidovou energii neutronu a vyjádříme celkovou energii elektronu. Využijeme toho, že hybnosti elektronu a protonu jsou stejné, členy $p^2 c^2$ můžeme tedy odečíst.

$$m_n^2 c^4 + m_e^2 c^4 + p^2 c^2 - 2m_n c^2 E_e = m_p^2 c^4 + p^2 c^2,$$

$$E_e = \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m_n} c^2.$$

Vědci by naměřili energii, která je rozdílem celkové a klidové energie elektronu

$$E = \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m_n} c^2 - m_e c^2 = \frac{(m_n - m_e)^2 - m_p^2}{2m_n} c^2.$$

Zde je důležité si všimnout, že neplatilo-li by $m_n > m_e + m_p$, nebyl by takovýto rozpad vůbec kinematically možný! Rozpad je tedy realizovatelný a pro energii elektronu číselně vychází $E = 1,25 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 181 \text{ keV}$.

Vyřešme tuto úlohu pro zajímavost tak, jak ji vyřešila historie. Až když v roce 1932 James Chadwick prokázal existenci neutronu, mohl být hlouběji pochopen beta-rozpad, tj. spontánní emise elektronu jádrem atomu. Jednoduché vysvětlení bylo: původcem beta-radioaktivity je rozpad neutronu na proton a elektron (tato varianta je možná, jak jsme ukázali výše). Podrobnější zkoumání beta-rozpadu však odhalilo zdánlivý paradox. Spektrum energií produkovaného elektronu se totiž naměřilo *spojité*, což je v rozporu představou, že se jedná o dvoučásticový rozpad. V tom případě by měl elektron vždy jednu energii přesně určenou zákonem zachování energie a hybnosti.

Na záchranu zákona zachování energie postuloval Wolfgang Pauli existenci další částice, která při beta-rozpadu vzniká. Tato částice ve mnohem lehčí než elektron a elektricky neutrální, Enrico Fermi ji proto pojmenoval *neutrino*. Tato myšlenka se úspěšně ujala, i když samotné neutrino bylo detekováno až v polovině padesátých let.

Jirka Lipovský

jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.4 ... neposlušná gravitace (4 body; průměr 2,00; řešilo 18 studentů)

Při dlouhodobém pozorování zákrytů Jupiterova měsíce Io bylo zjištěno, že naměřená doba oběhů měsíčku kolem planety (např. od předchozího do následného začátku zákrytu) pravidelně kolísá mezi hodnotami 42 h 28 min 21 s a 42 h 28 min 51 s (s chybou měření 2 s).

Pokuste se jak kvalitativně, tak kvantitativně vysvětlit pozorované změny. Kvantitou rozumíme určení „velikosti této příčiny“ na základě měření samozřejmě s odhadem chyby!

Úlohu vymyslel a zformuloval Pavel Brom.

V zadání jsme záměrně zatajili, že popsání jevu si všiml dánský astronom Olaf Römer již v roce 1676, když se v Jupiterově soustavě měsíců snažil najít přesně jdoucí hodiny sloužící námořníkům k měření času. Sám Römer okamžitě předložil správnou interpretaci svých měření.

Při analýze problému si musíme uvědomit, že vysvětlujeme experimentálně zjištěný údaj, jenž může být ovlivněn nejen vlastním chováním studovaného systému (zde Jupiterovy rodiny měsíců), ale také samotným procesem a okolnostmi měření!

Předpokládejme nyní, že oběžná doba T měsíčku Io kolem Jupitera se nemění, a zamysleme se právě nad okolnostmi měření. Pozorujeme harmonický pohyb s periodou necelé dva dny. Co může být příčinou malých změn této periody mezi zadanými krajními hodnotami? Jako první by nás měla napadnout změna frekvence v důsledku dobře známého Dopplerova jevu, jehož původem by zde měl především být pohyb pozorovatele (tedy planety Země) a předpoklad, že světlo se šíří konečnou rychlostí. Potom „kvantitou“ v zadání bychom rozuměli výpočet rychlosti světla z naměřených hodnot

$$T_1 = 42 \text{ h } 28 \text{ min } 21 \text{ s} = 152\,901 \text{ s}, \quad T_2 = 42 \text{ h } 28 \text{ min } 51 \text{ s} = 152\,931 \text{ s}.$$

Vyšetřeme tedy tento model pro zdroj v klidu a pohybujícího se pozorovatele. Vzájemnou rychlostí bude zřejmě průmět vektoru okamžité rychlosti Země do směru spojnice Země–Jupiter. Máme zadány právě maximální a minimální hodnotu periody, ty budou v našem modelu odpovídat situaci, kdy se Země pohybuje přesně vůči Jupiteru, resp. letí od něj (neboli průmět rychlosti má největší velikost). Potom velikost relativní rychlosti v odpovídá

v případě přibližování i vzdalování právě kruhové rychlosti oběhu Země kolem Slunce, jejíž velikost můžeme snadno vypočítat (např. délka kružnice dělená dobou oběhu, popř. jinak)

$$v = 29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Měřená perioda oběhu T_i , $i = 1, 2$ je z definice doba mezi příchody stejné fáze oběhu měsíce (např. okamžik začátku zákrytu, resp. dobře definovaný okamžik, kdy měsíc vletí do stínu Jupitera). Dvě po sobě jdoucí stejné fáze jsou od sebe vzdáleny o $l = cT$, kde T je skutečná doba oběhu. Za měřenou kratší dobu T_1 jednak Země uletí dráhu vT_1 vůči Jupiteru, jednak světelná informace vzdálenost cT_1 . Součet těchto vzdáleností musí dát nutně dráhu l čili

$$cT = cT_1 + vT_1,$$

odkud dostáváme známý vztah pro klasický Dopplerův jev pro přibližujícího se pozorovatele

$$T_1 = \frac{c}{c+v} T.$$

Pro nejdelší naměřenou periodu T_2 odvodíme analogicky (postačí všude zaměnit znaménko u v)

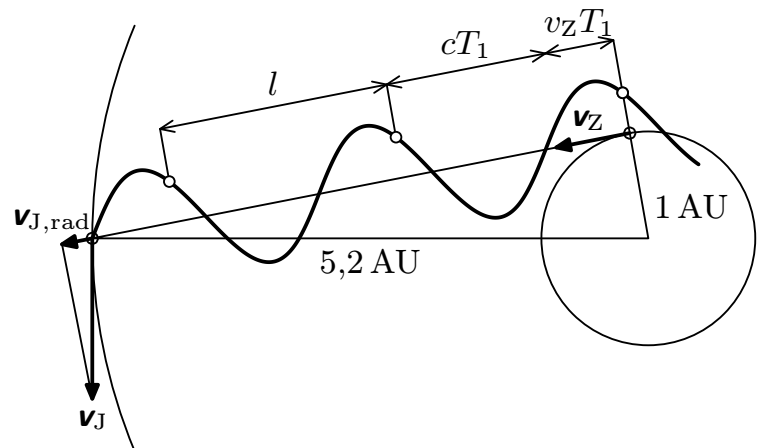
$$T_2 = \frac{c}{c-v} T.$$

Jinými slovy za dobu T_2 mine pomyslná tyč délky l pozorovatele při relativní rychlosti (z klasického skládání) $c - v$. Z obou rovnic vyjádříme T , abychom jej vyloučili, a ze vzniklé rovnice vyjádříme hledanou velikost rychlosti světla

$$c = \frac{T_2 + T_1}{T_2 - T_1} v = 3,04 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Je jasné, že perioda pozorovaných změn oběžné doby bude o něco delší než jeden tropický rok, neboť za tuto dobu se Jupiter již znatelně posune.

K odhadu chyby můžeme efektivně použít zákona o sčítání relativních chyb. Absolutní chyba čitatele i jmenovatele je stejná a je součtem zadané chyby měření period $\Delta T_{1,2} = 2s$, tj. $4s$. Tomu odpovídá relativní chyba čitatele $1,3 \cdot 10^{-3} \%$ (lze zanedbat) a jmenovatele asi $13,3 \%$. Relativní chybu hodnoty vzájemné rychlosti v zahrnující změny v důsledku pohybu Země po eliptické dráze můžeme odhadnout 1% . Uvedené relativní chyby jsou poměrně malé a odpovídají veličinám (resp. celým výrazům) v součinu nebo podílu, proto jejich součet určuje relativní chybu výsledku asi 15% , jež dává absolutní chybu $4,6 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Správně zaokrouhlený výsledek je



Obr. 4. Jupiter a Země na oběžné dráze

Uvedené relativní chyby jsou poměrně malé a odpovídají veličinám (resp. celým výrazům) v součinu nebo podílu, proto jejich součet určuje relativní chybu výsledku asi 15% , jež dává absolutní chybu $4,6 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Správně zaokrouhlený výsledek je

$$c = (3,0 \pm 0,5) \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Při přesném rozboru bychom museli započítat pohyb Jupitera i Země a geometrii včetně analytického nalezení maximální hodnoty relativní rychlosti. Pro radiální složku vektoru oběžné rychlosti Jupitera v našem zjednodušeném modelu vychází velikost přibližně (viz obr. 4)

$$v_{J,\text{rad}} = \frac{r_Z}{r_J} v_J = \frac{1 \text{ AU}}{5,2 \text{ AU}} \cdot 13 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 2,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pokud bychom chtěli tuto chybu, která odpovídá asi 9 % z v , zahrnout do chyby rychlosti v , bylo by již korektnější chybu výsledku určit pomocí zákona o sčítání kvadrátů, kam můžeme dosadit absolutní chyby vypočtené pomocí parciálních derivací nebo pro zjednodušení vypočtené relativní chyby. Potom relativní chyba výsledku bude

$$\delta_c = \sqrt{0,13^2 + 0,09^2} \approx 0,16 = 16 \%.$$

Na závěr uvedme, že Römerovi vyšla velikost rychlosti světla o něco menší, protože přesně neznal rychlost pohybu planety Země, resp. správnou vzdálenost Země od Slunce (Newtonova Principia se zákony mechaniky a všeobecné gravitace vyšla až v roce 1687). Nicméně Olaf Römer získal první přesvědčivý a řádově správný odhad rychlosti světla. Pro úplnost je třeba dodat, že měření dob pomocí zákrytů je mnohem přesnější (na zlomky sekundy) a námi uvedená chyba měření byla z pedagogických důvodů nadsazena. Z úlohy plyne důležité poučení, že mnohá měření prováděná ze Země je nutné správně korigovat o pohyb Země.

Většina řešitelů si vůbec neuvědomila vliv procesu měření a hledala příčinu ve vlastní soustavě Jupiterových měsíců. Nejčastěji uváděné domněnky byly gravitační působení ostatních měsíců, vulkanická činnost na Io, případně geometrie problému pro okamžiky zákrytu zahrnující pohyb Jupitera, Io a Země. Nicméně změny oběžné doby se projeví při každé metodě měření (zákryty měsíce sloužily jen pro názornější představu) a je nutné s nimi počítat vždy. Je málo pravděpodobné, že by gravitační působení vedlo k tak pravidelným změnám; aby soustava byla stabilní, nemohou být dovoleny velké poruchy drah Jupiterových satelitů. Naopak dráhy galileovských měsíců jsou poměrně přesně kružnice (numerická excentricita je řádově 0,004, pro srovnání Země kolem Slunce má velikost 0,017). Ze třetího Keplerova zákona navíc plyne, že oběžná doba závisí na střední vzdálenosti od centrálního tělesa neboli velké poloose, nikoliv na výstřednosti dráhy. Střední vzdálenost souvisí s celkovou mechanickou energií obíhajícího tělesa a její změna by znamenala, že si satelity v Jupiterově soustavě vyměňují energii, čímž by se systém stal značně složitým a spíše nestabilním. Takové chování v Jupiterově rodině nepozorujeme.

Úspěšní řešitelé odvodili jednu z rovnic často pomocí jiných úvah ekvivalentních výše uvedeným, avšak jako druhou rovnici do soustavy použili rovnost aritmetického průměru zadaných dob skutečné době oběhu. To se při poměrech v této úloze velmi dobře blíží přesnému vztahu, který lze získat řešením naší soustavy rovnic

$$T = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} \approx \frac{1}{2}(T_1 + T_2).$$

Dávejte si proto pozor na zbrklé a méně zřejmé úvahy!

Pavel Brom
paja@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V . P ... rychlejší než voda (4 body; průměr 2,14; řešilo 22 studentů)

Zamyslete se nad tím, zda se může lodička bez motoru na řece pohybovat rychleji než samotná voda. Svou odpověď zdůvodněte a předpokládejte, že proudění vody je laminární.

Úloha ze sbírky laureáta Nobelovy ceny – P. L. Kapicy.

Řeku považujeme za stacionární proud vody. Na ní umístíme loďku a sledujme, jak se bude pohybovat. Na loďku působí jediná vnější síla, a to je gravitační síla. Tu můžeme rozložit do směru rovnoběžného se řekou a směru kolmého na řeku. Složka gravitační síly kolmá na řeku se vyruší s reakcí způsobenou vodou v řece. (Jinak by se loďka pohybovala směrem pod hladinu.) Složka rovnoběžná s řekou se takto lehce nevyruší. Proti ní působí odporová síla vody (voda přirozeně klade loďce odpor při pohybu). Ta ovšem závisí na relativní rychlosti loďky vůči řece (lineárně, kvadraticky či nějak jinak). Přirozeně s větší rychlostí se zvětšuje. Proto rovnoběžnou složku gravitační síly vyrovná až při určité nenulové vzájemné rychlosti. V tu chvíli nastane stacionární stav. Výsledek tedy zní: Loďka se skutečně pohybuje rychleji než řeka.

Několik poznámek k došlým řešením. Někteří z vás hledali odpověď ve tvaru koryta řeky a v různých velikostech rychlosti v různých místech řeky. To jistě má na pohyb také vliv, ale v principu to otázku neřeší, protože předpokládá určitý konkrétní tvar řeky.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V . E ... paličův seník (8 bodů; průměr 6,13; řešilo 15 studentů)

Určete teplotu vznícení náplně plynového zapalovače, tj. nejnižší teplotu, na kterou ji musíme zahřát, aby se na vzduchu vznítila. Jako bonus můžete též zjistit teplotu vznícení technického lihu nebo jiné organické látky.

Postupujte například tak, že na odporový drát rozžhavený průchodem elektrického proudu pustíte plyn ze zapalovače. K určení teploty vznícení využijete změřené hodnoty napětí a proudu a známou závislost odporu na teplotě. Vaší vynalézavosti se však meze nekladou.

Varujeme: Oheň způsobuje těžké popáleniny, postupujte proto obezřetně!

S lihem experimentoval Pavel Augustinský.

Teplota vznícení je teplota, při které látka vzplane pouze působením tepla, kdežto zápalná teplota je teplota, při které se látka zapálí po přiblížení plamene. Je si proto potřeba uvědomit, že například teplota jisker, které zapalují plyn unikající ze zapalovače, nemusí dosahovat teploty vznícení, stačí jen přesáhnout teplotu zápalnou, která se pohybuje okolo 10°C.

Teorie

Budeme postupovat tak, jak navrhuje zadání úlohy. K tomu je potřeba znát závislost odporu drátu na teplotě. Pro kovy lze v širokém rozsahu teplot aproximovat tuto závislost lineárním vztahem

$$R(T) = R_0(1 + \alpha(T - T_0)), \quad (1)$$

kde α je teplotní součinitel odporu a R_0 odpor při teplotě T_0 . S dostatečnou přesností v oboru našeho měření také platí Ohmův zákon

$$U = RI, \quad (2)$$

který jistě všichni důvěrně znáte.

Měření

Seženeme si odporový drátek, který budeme zahřívat průchodem elektrického proudu. Zdůrazňuji přívlástek *odporový*, jelikož drátek musí mít výrazně větší odpor než přívodní vodiče.

Odpor drátku budeme měřit podle schématu na obrázku 5. Jelikož je jeho odpor zanedbatelný vůči odporu voltmetru, připojíme přímo k drátku voltmetr a před voltmetr zařadíme ampérmetr.

Nejprve měřením určíme koeficient α ze vztahu (1). To provedeme tak, že změříme odpor drátku při různých teplotách, které měříme například pomocí termistoru v rozsahu do 200°C . Naměřené hodnoty shrnuje následující tabulka.

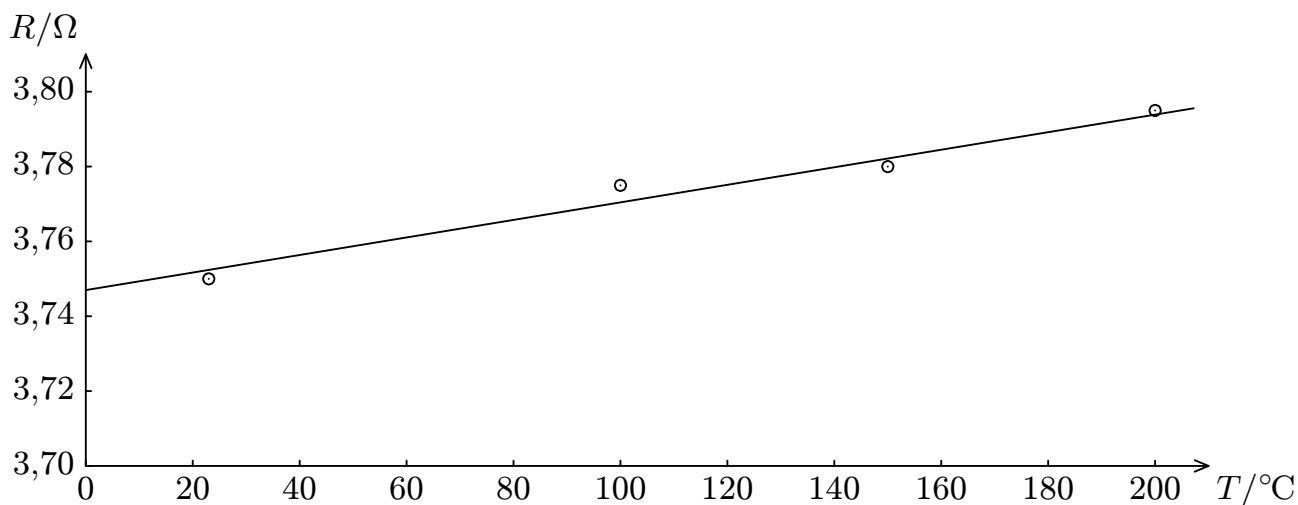
t [$^\circ\text{C}$]	23	100	150	200
R [Ω]	3,750	3,775	3,780	3,795

Hodnoty vyneseme do grafu a provedeme lineární regresi – body proložíme přímkou, ta protne osu y v hodnotě R_0 a její směrnice bude (podle (1)) $R_0\alpha$

$$R_0 = (3,75 \pm 0,04) \Omega, \quad R_0\alpha = (2,3 \pm 0,5) \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{K}^{-1},$$

kde chyby jsme určili ze statistické chyby regrese a chyby měření $\Delta R = 0,04 \Omega$, která je daná třídou přesnosti měřicích přístrojů a vlivem přechodových odporů na kontaktech. Pro teplotní součinitel dostáváme

$$\alpha = (6,1 \pm 1,4) \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}.$$



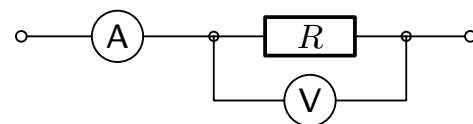
Obr. 6

Nyní se pokusíme změřit teplotu vznícení náplně zapalovače. Odporový drátek budeme zahřívat průchodem elektrického proudu a zároveň budeme měřit proud tekoucí drátkem a napětí na drátku, použijeme regulovatelný zdroj napětí. Napětí zdroje budeme zvyšovat tak dlouho, dokud plyn puštěný na rozžhavený drátek nevzplane. Naměřené hodnoty napětí a proudu při vzplanutí plynu jsou

$$I = (2,92 \pm 0,02) \text{A}, \quad U = (11,33 \pm 0,05) \text{V},$$

odtud odpor drátku při teplotě vznícení je

$$R = (3,88 \pm 0,04) \Omega.$$



Obr. 5. Schéma měření odporu

Teplotu vznícení určíme ze vztahu (1).

$$T_{\text{náplň zapalovače}} = \frac{R - R_0}{R_0 \alpha} + T_0 = (600 \pm 300)^\circ\text{C}.$$

Analogicky budeme postupovat při měření teploty vznícení lihu. Rozžhavený drátek budeme umísťovat do par lihu a napětí budeme zvyšovat, dokud páry nevzplanou. Naměřené hodnoty napětí a proudu jsou

$$I = (2,80 \pm 0,02) \text{ A}, \quad U = (10,77 \pm 0,05) \text{ V},$$

odtud odpor drátku při teplotě vznícení je

$$R = (3,85 \pm 0,04) \Omega.$$

Teplotu vznícení par lihu určíme stejně jako výše.

$$T_{\text{lih}} = \frac{R - R_0}{R_0 \alpha} + T_0 = (400 \pm 200)^\circ\text{C}.$$

Diskuse a závěr

Přesnost určení zápalných teplot není příliš velká, což je důsledek malé velikosti součinitele α . Bohužel většina odporových drátů (tj. drátů s velkým měrným odporem) má málo výraznou závislost na teplotě stejně jako ten, který jsme použili my. Konkrétně náš drátek měl $\alpha \sim 6 \cdot 10^{-5}$ a to způsobilo obrovskou výslednou chybu (50 %). Vhodnější by bylo použít materiál s $\alpha \sim 1 \cdot 10^{-3}$.

Další chyba (až 10 %) je způsobena tím, že závislost odporu na teplotě není přesně lineární.

Pokud porovnáme naše výsledky s tabulkovými hodnotami (předpokládáme, že náplň zapalovačů je směs propanu a butanu)

$$T_{\text{propan-bután}} = 480^\circ\text{C} - 605^\circ\text{C}, \quad T_{\text{ethanol}} = 425^\circ\text{C},$$

zjistíme, že se v rámci chyb shodují, což však nijak nezhodnocuje naše měření.

Poznámky k došlým měřením

Nejprve chci poděkovat *Petrovi Vaškovi* a *Bedřichovi Roskovcovi*, protože měření, které jsem vydával za „naše“, ve skutečnosti provedli oni. Stejně tak oni ručí za jeho věrohodnost.

Naměřené teploty vznícení náplně zapalovačů se řešitelům vešly do intervalu 300 – 2900°C. Někteří udělali tu chybu, že zvolili příliš malý odpor odporového drátku nebo hodnotu R_0 počítali ze vztahu $R_0 = \rho l / S$, což může znehodnotit měření, jelikož parametry drátku těžko přesně změříme. Vzhledem k obtížnosti úlohy se jistě objevilo i několik protokolů k neprovedeným měřením, například jedna nejmenovaná řešitelka disponuje 9V zdrojem, který na výstupu dává 270 A. Něktěrym řešitelům se bohužel zapálit plyn nepovedlo vůbec.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V . S ... Merkur, jáma a kyvadlo (6 bodů; průměr 3,92; řešilo 13 studentů)

V následujících úlohách ověříme vaši znalost všech dosud probraných kapitol mechaniky, tj. Newtonova formalismu, D'Alembertova principu a Lagrangeova formalismu.

- a) Představte si planetu Merkur obíhající kolem Slunce. Jak známo, jeho eliptická trajektorie se stáčí (posouvá se poloha perihélia), což nemůže být způsobeno gravitační silou

$$\mathbf{F} = \varkappa \frac{mM\mathbf{r}}{r^3}.$$

Dokažte, že když k této síle přidáme dodatečnou centrální sílu

$$\mathbf{F} = C \frac{\mathbf{r}}{r^4}, \quad (3)$$

kde C je vhodná konstanta, celá trajektorie (elipsa) se bude otáčet konstantní úhlovou rychlostí (čili existuje vztažná soustava otáčející se konstantní úhlovou rychlostí taková, že trajektorie v ní bude elipsa). Znáte-li tuto úhlovou rychlost Ω , určete konstantu C . Stačí takováto oprava k záchraně Newtonovy teorie gravitace?

- b) Určete rovnovážné polohy homogenní tenké tyčky délky l opřené o vnitřní stěny jamky ve tvaru písmene „V“ (viz obr. 7) v závislosti na vrcholovém úhlu jamky α .
- c) Pomocí Lagrangeových rovnic vypočítejte periodu malých kmitů dvojjzvatného kyvadla na obrázku 8. Závaží na koncích nehmotné tyčky délky l mají hmotnosti m_1 a m_2 , vzdálenost bodu závěsu od závaží o hmotnosti m_1 je l_0 .

Na úlohu a) narazil Matouš v jedné pěkné ruské knize.

Úlohu b) zadali Honza Prachař a Jarda Trnka.

Úloha c) zazněla na cvičeních z teoretické mechaniky doc. Podolského.

- a) Vyřešme úlohu nejprve za pomoci Newtonova formalismu. Pohybová rovnice Merkuru v inerciální vztažné soustavě spojené se Sluncem bude

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\varkappa \frac{mM\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4)$$

Nyní přidáme dodatečnou sílu (3), která je úměrná $1/r^3$, a přejdeme do neinerciální soustavy, která se otáčí *nekonstantní* úhlovou rychlostí Ω vůči té předchozí. Pohybová rovnice bude mít tvar

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\varkappa \frac{mM\mathbf{r}}{r^3} - m\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) - m\dot{\Omega} \times \mathbf{r} - 2m\Omega \times \dot{\mathbf{r}} - C \frac{\mathbf{r}}{r^4}, \quad (5)$$

kde druhý člen na pravé straně je odstředivá síla, třetí člen Eulerova síla a čtvrtý člen Coriolisova síla (viz druhý díl seriálu).

Jedním z integrálů pohybové rovnice (4) je moment hybnosti $l = m\omega r^2 = \text{konst}$ (ω je úhlová rychlost rotace Merkuru kolem Slunce). Po přidání dodatečné centrální síly zůstane zákon zachování momentu v platnosti

$$m\omega r^2 + m\Omega r^2 = l + m\Omega r^2 = \text{konst},$$

to znamená, že i výraz $L = m\Omega r^2$ je podél trajektorie konstantní. Odtud pro $\dot{\Omega}$ dostaneme

$$\dot{\Omega} = -\frac{2L}{mr^3} \dot{r} = -\frac{2\Omega}{r} \dot{r},$$

pro vektor platí (vektory $\boldsymbol{\Omega}$ a $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ jsou rovnoběžné, protože pohyb Merkuru je rovinný)

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \boldsymbol{\Omega} = -\frac{2\dot{r}}{r} \boldsymbol{\Omega}.$$

Přepíšme s využitím posledního výsledku rovnici (5). Dostaneme

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa \frac{mM\mathbf{r}}{r^3} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{2m\dot{r}}{r} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} - C \frac{\mathbf{r}}{r^4}, \quad (6)$$

Abychom zcela vyhověli předpokladům (tj. trajektorie Merkuru jsou v obou vztažných soustavách identické), musí mít rovnice (4) a (6) na pravé straně stejnou sílu, tedy musí platit

$$\frac{C}{mr^4} \mathbf{r} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{2\dot{r}}{r} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

Rychlost Merkuru si můžeme rozepsat do dvou kolmých složek $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}/r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, pak se poslední vztah zjednoduší na

$$\frac{C}{mr^4} \mathbf{r} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Oba výrazy na pravé straně upravíme pomocí vektorové identity $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ a využijeme toho, že $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} = 0$ resp. $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$ (vektory jsou na sebe kolmé). Dostaneme

$$\frac{C}{mr^4} \mathbf{r} = \Omega^2 \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r},$$

Zanedbáme-li člen úměrný Ω^2 , čili předpokládáme, že úhlová rychlost stáčení perihelia je zanedbatelně malá vzhledem k úhlové rychlosti oběhu planety kolem Slunce, pro C obdržíme

$$C = 2m\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Omega} r^4 = \frac{2lL}{m}. \quad (7)$$

Vidíme tedy, že síla $\mathbf{F} = C\mathbf{r}/r^4$ skutečně způsobuje stáčení perihelia, neboť C vyšla jako konstantní funkce. Tato síla však v žádném případě nezpůsobí otáčení celé trajektorie konstantní úhlovou rychlostí, protože jednoduše Ω není konstanta (což je vidět ze vztahu $L = m\Omega r^2 = \text{konst}$). Zadaní se vás snažilo svést na špatnou cestu!

Pro ilustraci vypočítáme, o kolik se perihelium pootočí po jednom oběhu Merkuru kolem Slunce.

$$\Delta\varphi = \int_0^T \Omega dt = \int_0^{2\pi} \frac{\Omega}{\omega} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{L}{l} d\varphi = 2\pi \frac{L}{l},$$

s využitím vztahu (7) dostaneme

$$\Delta\varphi = \frac{\pi m C}{l^2}. \quad (8)$$

Zbývá odpovědět, zda takováto oprava zachrání Newtonovu teorii gravitace. Astronomové naměřili, že perihélium Merkuru se stáčí o $575''$ za století. Zdá se, že je to v rozporu s Newtonovou teorií, podle které jsou trajektorie částic v centrálním poli stacionární. To však platí jen pro systém dvou těles. Pokud uvažíme vliv ostatních planet Sluneční soustavy, zjistíme z Newtonovy teorie, že způsobuje stáčení perihelia Merkuru (jejich vliv je

totiž ekvivalentní zavedení síly úměrné $1/r^3$). Na stáčení perihelia má také nepatrný vliv zploštění Slunce. Všechny tyto efekty způsobují dohromady stáčení perihelia o $532''$ za století, stále však schází vysvětlit zbylých $43''$ (astronomové jsou ochotni připustit chybu nejvýše zlomek úhlové vteřiny).

Po vyloučení všech dalších možných efektů, které by mohly stáčení perihelia způsobit (planetka mezi Sluncem a Merkurem či hmota jiného druhu), selhala i úprava Newtonovy teorie gravitace (že naše úprava také nepomůže, ukážeme dále). Záhadné stáčení perihelia vysvětlila až Einsteinova teorie obecné relativity, podle které

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi\kappa M}{c^2 a(1 + \varepsilon)} \quad (9)$$

(a je vzdálenost perihelia od Slunce, ε je výstřednost dráhy). Pro zajímavost vypočtené a naměřené (nevysvětlené) hodnoty stáčení perihelia těles Sluneční soustavy shrnuje následující tabulka.

	Merkur	Venuše	Země	Ikarus
předpověď OTR ["/stol]	43,0	8,6	3,8	10,3
změřeno ["/stol]	$43,1 \pm 0,5$	$8,4 \pm 4,8$	$5,0 \pm 1,2$	$9,8 \pm 0,8$

Velká nepřesnost měření u Země a Venuše je způsobená malou výstředností jejich dráhy, jejíž vinou se stáčení špatně měří. Vidíme tedy, že předpovědi OTR jsou ve velice dobré shodě s experimentem (potvrzují to i moderní měření).¹

Porovnejme vztahy (8) a (9). Po námi provedené opravě Newtonovy teorie vychází, že stáčení perihelia závisí na momentu hybnosti planety. Naopak vztah (9) plynoucí z OTR říká, že stáčení perihelia závisí čistě na geometrii trajektorie (výstřednost a délka poloosy eliptické trajektorie, hmotnost Slunce). Odtud je zřejmé, že naše oprava Newtonovy teorie nemůže odpovídat realitě.

Nyní stejnou úlohu vyřešíme (výklad bude poněkud stručnější) pomocí silnějšího Lagrangeova formalismu. Lagrangián částice v centrálním poli $V(r)$ v polárních souřadnicích je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - V(r).$$

Langrangián nezávisí explicitně na čase ani souřadnici φ , okamžitě tedy máme dva integrály pohybu (viz minulý díl seriálu). Jsou to celková energie a moment hybnosti

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) + V(r), \quad l = mr^2\dot{\varphi}.$$

Z obou rovnic vyloučíme $\dot{\varphi}$ a máme rovnici

$$\frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2 r^2} \right) + V(r) = E.$$

¹⁾ Pěkný článek o anomálním stáčení perihelia –

<http://www.mathpages.com/rr/s6-02/6-02.htm>.

Applet pro simulaci relativistického stáčení perihelia –

http://www.aldebaran.cz/applets/fy_grav/start.html

Hledáme neznámou funkci $r(\varphi)$ (tj. trajektorii částice v polárních souřadnicích). Rovnice se zjednoduší zavedením substituce $r(\varphi) = 1/u(\varphi)$, pak totiž

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} u' \dot{\varphi} = -u' \frac{l}{m}$$

a naše rovnice získá tvar

$$u'^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2}(E - V).$$

Nepěkných druhých mocnin se zbavíme zderivováním rovnice podle φ

$$2u'u'' + 2u'u = -\frac{2m}{l^2} \frac{dV}{du} u',$$

za předpokladu $u' \neq 0$ dostaneme známou rovnici, které se říká Binetův vzorec

$$u'' + u = -\frac{m}{l^2} \frac{dV}{du}.$$

Potenciál ve Sluneční soustavě předpokládáme ve tvaru $V(u) = -\kappa Mmu - Cu^2$ (pro konstantu C nechť platí $C \ll l^2/m$). Řešíme tedy rovnici

$$u'' + \left(1 - \frac{Cm}{l^2}\right)u = \frac{\kappa Mm^2}{l^2}.$$

Řešení je snadné, za předpokladu $C \ll l^2/m$ se jedná o rovnici harmonických kmitů, proto

$$u(\varphi) = A \cos\left(\varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{Cm}{l^2}}\right) + \frac{\kappa Mm^2}{l^2}.$$

Jediné, co nás bude zajímat, je stáčení perihélia, tedy jak se liší perioda funkce $u(\varphi)$ od 2π .

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Cm/l^2}} - 1 \right) \approx \frac{\pi mC}{l^2},$$

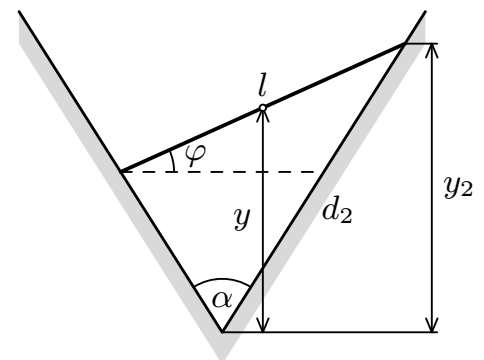
což je v souladu s (8).

- b) V seriálu jsme ukázali, že pro hledání rovnovážných poloh lze s výhodou použít princip virtuální práce $\sum F_i \delta x_i = 0$. V našem případě má tvar

$$0 \cdot \delta x + F_G \delta y = 0,$$

neboť na tyčku působí jediná pravá síla – tíhová síla F_G . Abychom rovnici splnili, musí být $\delta y = 0$.

Polohu tyčky v jamce popíšeme úhlem φ (viz obr. 7). Pokusme se vyjádřit výšku těžiště tyčky y pomocí parametru φ .



Obr. 7

Vzdálenost pravého konce tyčky ode dna jamky d_2 vypočítáme pomocí sinové věty pro trojúhelník, který vytváří tyčka a jamka. Podle ní platí

$$\frac{d_2}{\sin(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \varphi)} = \frac{l}{\sin \alpha} \Rightarrow d_2 = l \frac{\cos(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}.$$

Výška pravého konce tyčky je $y_2 = d_2 \cos \frac{1}{2}\alpha$ a pro výšku těžiště tyčky platí $y = y_2 - \frac{1}{2}l \sin \varphi$, celkově tedy máme

$$y = l \left[\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \sin \varphi \right] = l \left[\frac{\cos(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha} - \frac{1}{2} \sin \varphi \right],$$

což upravíme pomocí vzorce pro kosinus součtu úhlů

$$y = \frac{1}{2}l(\cos \varphi \cotg \frac{1}{2}\alpha + \sin \varphi - \sin \varphi) = \frac{1}{2}l \cos \varphi \cotg \frac{1}{2}\alpha. \quad (10)$$

Zbývá určit φ , abychom splnili $\delta y = 0$, počítejme

$$0 = \delta y = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \delta \varphi = -\frac{1}{2}l \sin \varphi \cotg \frac{1}{2}\alpha.$$

Jelikož je $\delta \varphi$ libovolné, je poslední rovnice za předpokladu $\alpha \in (0, 180^\circ)$ splněna pro $\varphi = 0$.

Zjistili jsme, že vodorovná poloha tyčky je rovnovážná. Nesmíme však zapomenout na polohy, kdy tyčka přiléhá ke stěně jamky. Tyto polohy jsou totiž na okraji definičního oboru φ a o jejich rovnovážnosti nám princip virtuální práce nemůže nic říci. Podíváme se znovu na vztah (10) pro výšku těžiště. Funkce $y(\varphi)$ (která je vlastně jen násobek $\cos \varphi$) má maximum pro $\varphi = 0$, v intervalu $(-90^\circ, 0)$ je rostoucí a v intervalu $(0, 90^\circ)$ je klesající. Vodorovná rovnovážná poloha $\varphi = 0$ je tedy labilní (těžiště je nejvýše, při vychýlení tyčka „spadne“). V diskutovaných polohách na okraji definičního oboru $\varphi = \pm(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$, kdy je tyčka přilehlá ke stěnám jamky, je naopak těžiště nejnižší, jedná se o stabilní polohy.

- c) Poslední úlohu vyřešíme jednoduchou aplikací Langrangeova formalismu. Soustava dvou těles dvojzvratného kyvadla má jeden stupeň volnosti, budeme ji parametrizovat úhlem φ (viz obr. 8). Kinetická energie je součet kinetických energií obou závaží

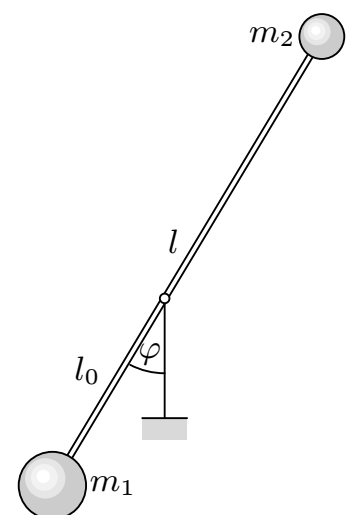
$$T = \frac{1}{2}m_1(l_0\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m_2[(l - l_0)\dot{\varphi}]^2.$$

Předpokládejme, že $m_1l_0 > m_2(l - l_0)$, potom bude závaží m_1 dole a potenciální energie soustavy bude (nulovou hladinu zvolíme na úrovni bodu otáčení)

$$V = -m_1gl \cos \varphi + m_2g(l - l_0) \cos \varphi.$$

Langrangeovu funkci $L = T - V$ dosadíme do Lagrangeových rovnic druhého druhu. Předtím si však vypočítáme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1l_0^2\dot{\varphi} + m_2(l - l_0)^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_1gl_0 \sin \varphi + m_2g(l - l_0) \sin \varphi,$$



Obr. 8

pak dostáváme

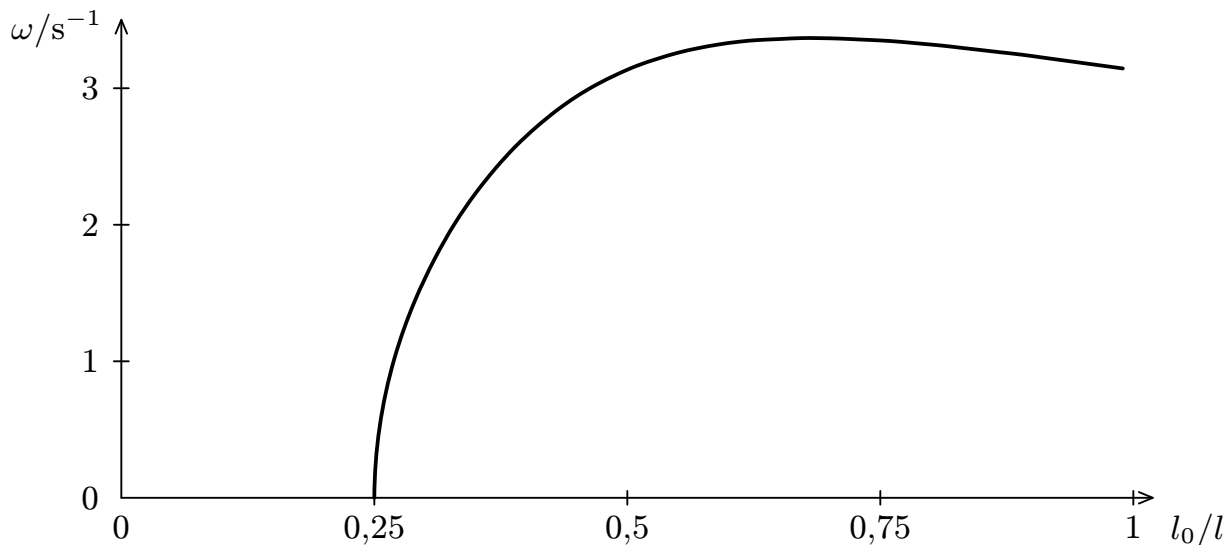
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = [m_1 l_0^2 + m_2 (l - l_0)^2] \ddot{\varphi} + [m_1 g l_0 - m_2 g (l - l_0)] \varphi = 0. \quad (11)$$

Hledáme-li úhlovou frekvenci malých kmitů, vystačíme si aproximací $\sin \varphi \approx \varphi$, potom je rovnice (11) rovnicí harmonických kmitů a platí

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 g l_0 - m_2 g (l - l_0)}{m_1 l_0^2 + m_2 (l - l_0)^2}}. \quad (12)$$

Tento vztah přejde k úhlové frekvenci malých kmitů matematického kyvadla pro $m_2 \rightarrow 0$ nebo $l_0 \rightarrow l$.

Pro zajímavost je závislost (12) vynesena v grafu na obrázku 9 (parametry kyvadla jsou: $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$).



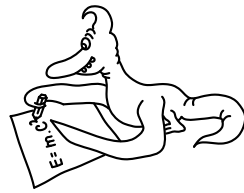
Obr. 9

Je snadné odvodit, že úhlová frekvence kyvadla bude maximální pro

$$l_0 = \sqrt{m_2} \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2} l.$$

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz



Řešení VI. série

Úloha VI.1 ... fotoefekt (3 body; průměr 2,89; řešilo 35 studentů)

Na katodu fotočlátku dopadá ze rtuťové výbojky světlo o vlnové délce 546,1 nm a k potlačení proudu vznikajícího díky fotoelektrickému jevu je potřeba napětí $U_1 = 1,563$ V. Dopadá-li na katodu světlo o vlnové délce 404,7 nm, je potřeba napětí $U_2 = 2,356$ V. Vypočítejte hodnotu Planckovy konstanty h .
Našel Honza Prachař v jedné sbírce.

Objasnění fotoelektrického jevu na počátku dvacátého století bylo jedním z důležitých kroků k revoluci ve fyzikálním vnímání světa. Článek, jenž nesl název „O heuristickém hledisku zabývajícím se vznikem a přeměnou světla“ a vysvětlil fotoelektrický jev na základě myšlenky kvantování energie elektromagnetického pole, publikoval v roce 1905 Albert Einstein a obdržel za něj Nobelovu cenu v roce 1921.

Vnější fotoelektrický jev můžeme vysvětlit pohlcením fotonu elektronem. Foton pak předá svou energii elektronu. Jelikož jsou elektrony v atomu vázány určitou silou, musíme jim dodat energii, aby atom opustily. Tato energie závisí na rozložení energetických hladin v atomu, a je tutíž pro danou katodu konstantou nazývanou výstupní prací W_v . Má-li foton vyšší energii, než je hodnota výstupní práce elektronu, přemění se její přebytek v kinetickou energii elektronu, vyjádřeno rovnicí

$$E = W_v + E_k. \quad (13)$$

Jelikož energie fotonu závisí na frekvenci záření f podle vztahu

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda}, \quad (14)$$

kde h je Planckova konstanta, je i kinetická energie vyražených elektronů funkcí frekvence záření (a tedy i vlnové délky záření λ).

Letící elektrony můžeme zpomalovat vnějším elektrickým polem. Úbytek kinetické energie elektronu je pak roven práci, kterou elektron vynaloží na překonání potenciálové bariéry.

$$W_e = eU. \quad (15)$$

Regulací intenzity elektrického pole zjistíme hodnotu napětí U , pro kterou již elektrony nedokáží toto pole překonat a obvodem neprotéká proud. Poté je W_e rovno kinetické energii elektronů E_k . Využitím vztahů (13), (14) a (15) získáme vzorec

$$\frac{hc}{\lambda} = W_v + eU.$$

Dosazením U_1 , U_2 , λ_1 a λ_2 získáme dvě rovnice o dvou neznámých h a W_v . Algebraickými úpravami vyjádříme h vztahem

$$h = \frac{e\lambda_1\lambda_2(U_2 - U_1)}{c(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Zbývá dosadit číselné hodnoty ($c = 299\,792\,458$ m·s⁻¹, $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C) a velikost Planckovy konstanty vyjde $h = 6,623 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Petra Suková
 pet@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.2 ... jak vyrobit černou díru (4 body; průměr 3,83; řešilo 41 studentů)

Pokud stlačíme hvězdu (či jakékoliv jiné těleso) na kouli o poloměru r_g , zhroutí se nenávratně do černé díry. Tzv. Schwarzschildův poloměr r_g si lze v klasické analogii představit jako poloměr tělesa o hmotnosti M , z jehož povrchu lze uniknout pouze rychlostí světla (úniková rychlost je c).

Na základě znalosti hmotnosti hvězdy M určete Schwarzschildův poloměr r_g a kritickou hustotu hvězdy ρ , při které se přemění v černou díru. Příklad řešte obecně a poté konkrétně pro Zemi, Slunce a jádro galaxie o hmotnosti 100 miliard Sluncí.

Úlohu vymyslel Jarda Trnka na přednáškách z relativistické fyziky.

Schwarzschildův poloměr určíme ze zákona zachování energie. Na povrchu hvězdy má těleso energii

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r},$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta. Dle zadání dosadíme $v = c$, $r = r_g$. Úniková rychlost je taková nejmenší rychlost, že s ní těleso unikne do nekonečna. V nekonečnu je potenciální energie od hvězdy nulová, tedy i celková energie je nulová, $E = 0$. Po dosazení dostaneme

$$\frac{1}{2}mc^2 - \frac{GMm}{r_g} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Kritickou hustotu dopočteme snadno

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r_g^3} = \frac{3c^6}{32\pi M^2 G^3}.$$

Pro Zemi je kritický poloměr $r_g \approx 9$ mm a hustota je neuvěřitelně velká $\rho \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg·m⁻³. U Slunce vychází kritický poloměr na $r_g \approx 3$ km a hustota $\rho \approx 2 \cdot 10^{19}$ kg·m⁻³. U jádra galaxie je poloměr $r_g \approx 3 \cdot 10^{14}$ m a hustota $\rho = 2 \cdot 10^{-3}$ kg·m⁻³.

Co tyto výsledky znamenají? Abychom ze Země vytvořili černou díru, museli bychom ji stlačit na kuličku o poloměru 9 mm, což asi v našich silách není. Naopak aby se přeměnilo jádro galaxie na černou díru, stačí, aby jeho hustota byla 0,002 kg·m⁻³, což je ve srovnání s hustotou vzduchu asi tisícinu. To se zdá jako docela reálné. Musíme si však uvědomit, že většina vesmíru je vyplněna vakuem a jeho průměrná hustota je ještě o mnoho řádů nižší.

Čím jsou tělesa těžší, tím větší je jejich Schwarzschildův poloměr (logicky) a tím menší je kritická hustota (možná trochu překvapivě).

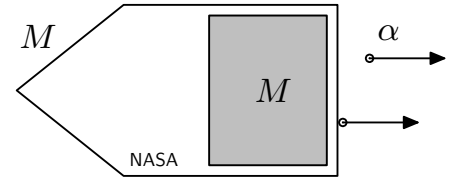
Je zajímavé, že tento klasický přístup je kvantitativně téměř shodný s přístupem obecně relativistickým. Proto námi vypočítané výsledky odpovídají přibližně realitě.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.3 ... sonda NASA (4 body; průměr 2,70; řešilo 20 studentů)

Jet Propulsion Laboratory v Kalifornii vyvíjí pro NASA nový typ raketových pohonů. Pohonná jednotka využívá hybnost α -částic při rozpadu nuklidu fermia ${}_{100}^{257}\text{Fm}_{157}$, jehož hmotnost je m_{Fm} a poločas rozpadu T . Druhým produktem přeměny je nuklid kalifornia ${}_{98}^{253}\text{Cf}_{155}$. Hmotnost α -částice je m_{α} , hmotnost nuklidu kalifornia je m_{Cf} , přeměnou se uvolní energie E . Předpokládejte, že každá α -částice opouští raketu ve stejném směru.



Obr. 10

Vesmírná sonda s popsáním pohonem je na počátku v klidu, její hmotnost je M , hmotnost pohonné látky je také M . Určete rychlost sondy v po přeměně poloviny hmotnosti nuklidů fermia. Výslednou hodnotu dopočítejte i číselně pro hodnoty $E = 1,106 \cdot 10^{-12} \text{ J}$, $M = 4 \text{ kg}$ a $T = 100,5 \text{ dní}$, ostatní hodnoty najdete v tabulkách.

Úloha byla převzata ze slovenské Fyzikální olympiády.

Pozorujme sondu z její vztažné soustavy, ve které jsou atomy fermia v klidu. Při rozpadu fermia na α -částici a kalifornium platí zákon zachování hybnosti $p_{\alpha} = p_{\text{Cf}}$. Vzhledem k tomu, že uvolněná energie $E \ll m_{\alpha}c^2$, můžeme hybnost α -částice vyjádřit v klasickém nerelativistickém tvaru $p_{\alpha} = m_{\alpha}v_{\alpha}$. Stejně tak můžeme zapsat i zákon zachování energie v nereleativistickém tvaru, tj. vyzářená energie bude rovna energiím, které získají kalifornium a α -částice

$$E = \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + \frac{p_{\text{Cf}}^2}{2m_{\text{Cf}}} = p_{\alpha}^2 \frac{m_{\alpha} + m_{\text{Cf}}}{2m_{\alpha}m_{\text{Cf}}} \Rightarrow p_{\alpha} = \sqrt{\frac{2Em_{\alpha}m_{\text{Cf}}}{m_{\alpha} + m_{\text{Cf}}}}$$

Nyní určíme, kolik částic se rozpadne v zadané úloze. Necháváme rozpadnout jednu polovinu hmotnosti nuklidů fermia. Za předpokladu, že známe hmotnost jednoho nuklidu fermia, můžeme určit, kolik částic se rozpadlo $N = M/2m_{\text{Fm}}$. Dále potřebujeme vědět, jak se změní rychlost Δv_k sondy při vyzáření jedné α -částice za předpokladu, že předtím už uniklo k α -částic. Celková hmotnost sondy bude rovna $M_c = 2M - m_{\alpha}k$. Ze zákona hybnosti mezi α -částicí a sondou pak platí

$$p_{\alpha} = M_c \Delta v_k \Rightarrow \Delta v_k = \frac{p_{\alpha}}{M_c} = \frac{p_{\alpha}}{2M - m_{\alpha}k} \quad (16)$$

A teď se už konečně pustíme do řešení hlavního problému úlohy. Chceme určit rychlost po rozpadu N nuklidů fermia. Doteď jsme zatím nepoužili nic z relativity. Předpokládejme, že se už rozpadl určitý počet nuklidů fermia a sonda má rychlost v , v opačném směru právě vylétává α -částice a zvyšuje rychlost sondy o Δv . Chceme určit novou rychlost sondy v' , k tomu použijeme vzoreček pro relativistické skládání rychlostí

$$v' = \frac{v + \Delta v}{1 + v\Delta v/c^2}$$

Tímto způsobem sčítat rychlosti je však zřejmě dost složité, uvědomíme-li si, že Δv je závislé na počtu rozpadlých α -částic. Proto si usnadníme práci a všimneme si, jak vypadá vzoreček pro součet argumentů v hyperbolickém tangentu.

$$\text{tgh } \alpha' = \text{tgh } (\alpha + \Delta\alpha) = \frac{\text{tgh } \alpha + \text{tgh } \Delta\alpha}{1 + \text{tgh } \alpha \text{ tgh } \Delta\alpha}$$

Tento vzoreček je přece velice podobný vzorečku pro relativistické skládání rychlostí! Stačí použít následující substituce a dostaneme přímo vzorec výše uvedený

$$\operatorname{tgh} \alpha' = \frac{v'}{c}, \quad \operatorname{tgh} \alpha = \frac{v}{c}, \quad \operatorname{tgh} \Delta\alpha = \frac{\Delta v}{c}.$$

Tento trik nám tedy umožní počítat rychlosti přímo jako argumenty hyperbolického tangentu. Na počátku je sonda v klidu. Rychlost V po rozpadu N částic vypočteme takto

$$\frac{V}{c} = \operatorname{tgh} \beta = \operatorname{tgh} (\alpha_1 + \dots + \alpha_N), \quad (17)$$

kde úhly α_i odpovídají změnám rychlostí Δv_i . Dle výše uvedené substituce víme, že

$$\operatorname{tgh} \alpha_i = \frac{\Delta v_i}{c}.$$

Odsud můžeme vyjádřit α_i (argument hyperbolického tangentu lze vyjádřit pomocí logaritmu)

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \ln \frac{c + \Delta v_i}{c - \Delta v_i} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + 2 \frac{\Delta v_i}{c - \Delta v_i} \right).$$

S tímto by se nám ovšem dost špatně počítalo, nehledě na to, že můžeme provést velice dobrou aproximaci. Člen $\Delta v_i / (c - \Delta v_i)$ je velice malý, lze proto použít aproximaci $\ln(1+x) \approx x$ pro malé x

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 + 2 \frac{\Delta v_i}{c - \Delta v_i} \right) \approx \frac{\Delta v_i}{c - \Delta v_i}.$$

Nyní dosadíme aproximaci α_i do rovnice (17)

$$\frac{V}{c} \approx \operatorname{tgh} \left(\frac{\Delta v_1}{c - \Delta v_1} + \dots + \frac{\Delta v_N}{c - \Delta v_N} \right),$$

kde Δv_i jsme si vyjádřili v (16). Sečíst řadu v hyperbolickém tangentu není sice až tak velký problém, ale podíváme-li se na vztah pro Δv_i , zjistíme, že změna hmotnosti sondy se dá zanedbat. Hmota, která unikne v podobě α -částic, je vskutku zanedbatelná. Všechny členy Δv_i aproximujeme Δv_0 .

Vraťme se tedy zpět k našemu výpočtu.

$$\frac{V}{c} \approx \operatorname{tgh} \left(\frac{\Delta v_1}{c - \Delta v_1} + \dots + \frac{\Delta v_N}{c - \Delta v_N} \right) \approx \operatorname{tgh} \left(N \frac{\Delta v_0}{c - \Delta v_0} \right).$$

Chyba oproti přesnému součtu se projeví až na sedmém řádu, použitá aproximace je tedy opravdu vhodná. Hledané V je rovno

$$V \approx c \operatorname{tgh} \left(N \frac{\Delta v_0}{c - \Delta v_0} \right) \approx c \operatorname{tgh} \left(\frac{N \Delta v_0}{c} \right).$$

Zadané hodnoty jsou tyto

$$u \doteq 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad m_{\text{Fm}} \doteq 257,1 \text{ u}, \quad m_{\text{Cf}} \doteq 253,1 \text{ u}, \quad m_{\alpha} \doteq 4,002 \text{ u}, \\ c \doteq 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad M = 4 \text{ kg}, \quad E = 1,106 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

a pro ně vychází

$$p_\alpha \doteq 1,203 \cdot 10^{-19} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad N \doteq 4,683 \cdot 10^{24}, \quad \Delta v_0 \doteq 1,504 \cdot 10^{-20} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

a

$$V \doteq 70,43 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Nakonec si ještě všimněme, že v této úloze nebylo podstatné, jak velký je poločas rozpadu. Ptali jsme se totiž na rychlost sondy po rozpadu poloviny hmotnosti nuklidů fermia. Poločas rozpadu může být libovolně velký, chceme jen, aby sonda stačila ustálit svou rychlost mezi jednotlivými rozpady.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.4 ... nezastavitelný chodec (5 bodů; průměr 3,00; řešilo 12 studentů)

Vraťte se na chvíli do Atén na loňské olympijské hry a určete, jaká je teoretická maximální rychlost chodce. Chodec nebude diskvalifikován, pokud se každý rozhodčí (pozorovatel) shodne na tom, že alespoň jedna noha chodce stojí v každém okamžiku na zemi.

Vymyslel kdo jiný než Matouš Ringel.

Pokusme se nejdříve úlohu řešit klasicky, pouze s uvažováním konečné rychlosti šíření světla. Nechť je levá noha v místě o souřadnici 0 a pravá noha právě došlápla do místa vzdáleného a . Chodec bude moci levou nohu zvednout až ve chvíli, kdy světelný paprsek z místa o souřadnici a dorazí k levé noze, protože jinak by například rozhodčí stojící za ním uviděl zvednutí levé nohy dříve než dopad pravé. Označme tento interval $t_0 = a/c$. Levá noha se bude pohybovat nejvýše světelnou rychlostí, a to po dobu $2t_0$. Těžiště chodce se přesune o vzdálenost a za celkový čas $3t_0$, při uvažování pouze tohoto klasického jevu by byla jeho maximální možná rychlost $c/3$.

Znárodněme nyní situaci v prostoročasovém diagramu (viz obr. 11). Na vodorovnou osu vynášíme souřadnici x , na svislou osu ct v soustavě S spojené se zemí. V tomto diagramu je světločára světelného paprsku $x = ct$ přímka, která s osami svírá úhel 45° . Vypočítejme, jak v tomto diagramu budou umístěny souřadnicové osy soustavy S' , která se vůči S pohybuje rychlostí v (ve směru osy x).

Napišme si známé vztahy pro Lorentzovu transformaci (tu používáme při přechodech mezi inerciálními systémy speciální teorie relativity)

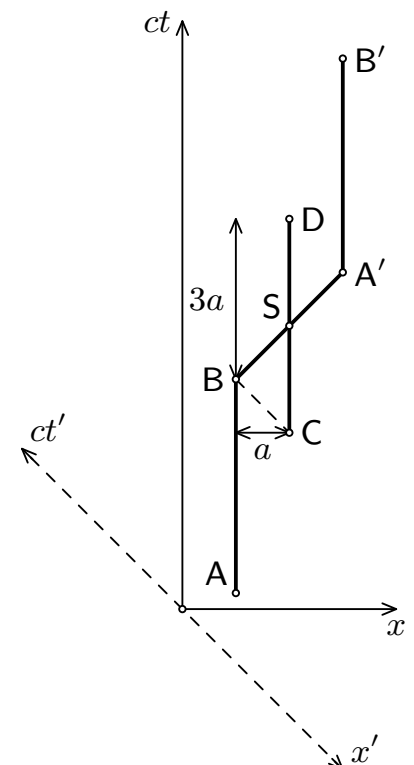
$$x' = \gamma \left(x - \frac{v}{c} ct \right), \quad ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right),$$

kde $\gamma = \sqrt{1/(1 - v^2/c^2)}$ je Lorentzův faktor. Osa ct' je dána rovnicí $x' = 0$, ze které dostáváme

$$ct' : \quad ct = \frac{c}{v} x,$$

osa x' je dána rovnicí $ct' = 0$, odkud

$$x' : \quad ct = \frac{v}{c} x.$$



Obr. 11

První pozorování je, že osy se sklápí. Vidíme, že směrnice přímk, které udávají osy soustavy S' , jsou navzájem převrácené. To znamená, že svírá-li osa x' s osou x úhel φ (tj. $\text{tg } \varphi = v/c$), potom stejný úhel svírá osa ct' s osou ct .

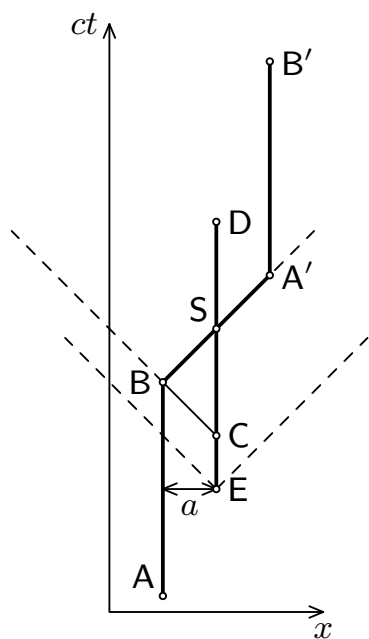
Připomeneme si důležité pozorování. Události umístěné na přímce rovnoběžné s osou x jsou v soustavě S současné. Analogicky události umístěné na přímce rovnoběžné s osou x' , jsou současné v soustavě S' . Jelikož se osy sklápí, je současnost událostí relativní.

Uvažujme extrémní případ, kdy rozhodčí se pohybuje rychlostí $-c$ vůči soustavě S . Jeho klidovou soustavu označíme S' . Směrnice os x' a ct' jsou podle výše odvozených vztahů rovny -1 , budou tedy s osami x a ct svírat úhel -45° (viz obr. 11). Jak ukážeme dále, na tohoto rozhodčího si bude muset chodec dávat největší pozor.

Délku kroku označme $2a$. Světočára levé nohy je $ABA'B'$ (události A a A' představují položení nohy, události B a B' představují zvednutí nohy), část světočáry pravé nohy je úsečka CD . Události B a C musí být vůči sobě postavené tak, aby událost C předcházela události B ve všech inerciálních soustavách (tj. aby všichni rozhodčí viděli, že nejprve se dotkne země pravá noha a pak se teprve zvedne levá noha). To zajistíme tak, že události budou současné v soustavě S' (kterou jsme definovali výše), tj. události B a C budou ležet na rovnoběžce s osou x' . Jak si snadno rozmyslíte, v ostatních soustavách potom bude pořadí událostí náležité.

Levá noha se pohybuje nejvýše světelnou rychlostí, proto je úsečka BA' světelnou světočárou (přímka BA' svírá se souřadnicovými osami úhel 45°). Při symetrickém pohybu protíná spojnice BA' úsečku CD v jejím středu S . Přímka BA' je kolmá ke přímce BC , je-li vzdálenost přímk AB a CD rovna a , bude délka úsečky CS rovna $2a$, délka celé úsečky CD je $4a$. Urazení vzdálenosti a na prostorové ose trvá chodci $3a/c$. Rychlost chodce při neuvažování konečného šíření signálu vychází $c/3$.

Uvažujme kombinaci výše popsanych jevů. Prostorčasový diagram je na obrázku 12. Předpokládejme, že zvednutí pravé nohy nastane dříve – již v bodě E . Do diagramu jsme přerušovanou čarou zakreslili světelné světočáry, které „nesou“ informaci o proběhlých událostech E a B . Požadujeme, aby se každý rozhodčí dozvěděl nejdříve o události E a až poté o události B . Rozhodčího do diagramu zakreslíme jako prostorupodobnou světočáru (tj. nikdy se nepohybuje rychleji než c). Snadno si rozmyslíme, že každý rozhodčí se dozví o událostech E a B v náležitém pořadí (okamžik, kdy se rozhodčí o události dozví, je určen průsečíkem světočáry rozhodčího a příslušné světelné světočáry), dokonce událost E může být identická s událostí C . Maximální rychlost tedy zůstává $c/3$.



Obr. 12

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.P ... výlet na Stonehenge (5 bodů; průměr 1,08; řešilo 13 studentů)

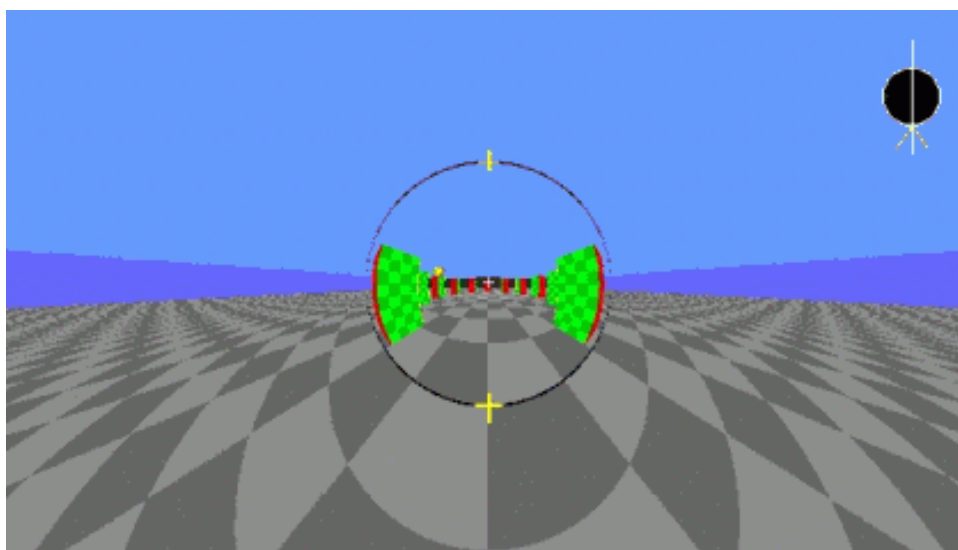
Představte si, že v raketě prolétáváte nad Stonehenge. Ten je tvořen kameny ve tvaru kvádrů rozmístěných do vrcholů pravidelného dvanáctiúhelníku (viz obrázek 13) o poloměru 200. Letíte nad osou x ve výšce $z = 50$ a díváte se vodorovným směrem. Když jste v bodě o souřadnicích $(-200, 0)$, resp. $(0, 0)$, uvidíte svět přesně tak, jak je zobrazen na obrázku 14, resp. 15. Váš stojící kamarád jej ovšem uvidí jinak, a sice jako na obrázku 16, resp. 17, přičemž oba máte shodné oči (tzn. např. stejný zorný úhel). Z obrázků přibližně určete poměr rychlosti rakety a rychlosti světla.

Úlohu navrhl a obrázky sehnal Matouš Ringel.

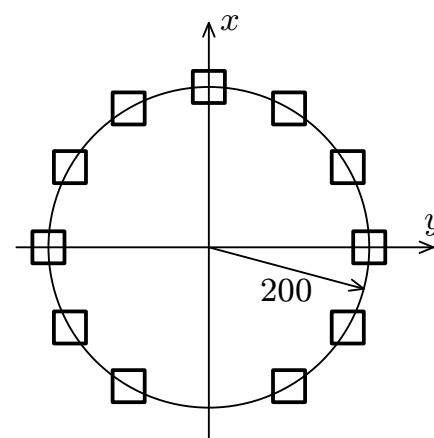
Tuto úlohu bylo možné řešit hned několika způsoby. Pro neochotce, kteří chtějí znát pouze nejjednodušší (i když nevšeobecné) řešení, uvedeme zkraje vtipný postup *Antona Repka*.

Povšimněme si, že střed Stonehenge (jejž rozpoznáme pomocí šachovnicové sítě na zemi) je na obrázcích 15 a 16 s velkou přesností na stejném místě. Předpokládáme-li, že zorný úhel stojícího a letícího pozorovatele je stejný, musí být stejné i úhly, pod kterými paprsek světla dopadá do oka pozorovatelů. Obrázek 15 se týká letícího pozorovatele v bodě $(0, 0, 50)$, obrázek 16 stojícího pozorovatele v bodě $(-200, 0, 50)$. Do oka stojícího pozorovatele paprsek ze středu (o souřadnicích $(0, 0, 0)$) dopadá pod úhlem $\arctg(50/200)$, jak plyne z pravoúhlého trojúhelníka. V soustavě spojené s raketou dopadá pod stejným úhlem; příčné rozměry těles se při Lorentzových transformacích nemění. Odtud plyne, že v době, kdy paprsek opustil střed, musel mít střed x' -ovou souřadnici rovnu 200. Jelikož ale paprsek do oka pozorovatele dopadl přesně, když byl střed pod raketou, musel se do výšky 50 dostat za stejný čas, za který střed urazil vzdálenost 200. Odtud

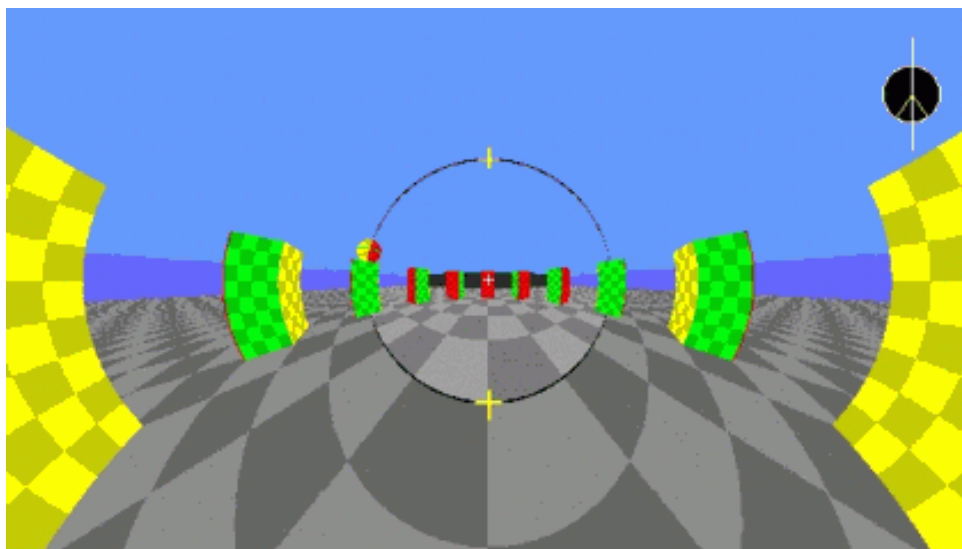
$$v = c \cdot \cos \alpha = c \cdot \frac{200}{\sqrt{200^2 + 50^2}} \approx 0,970c.$$



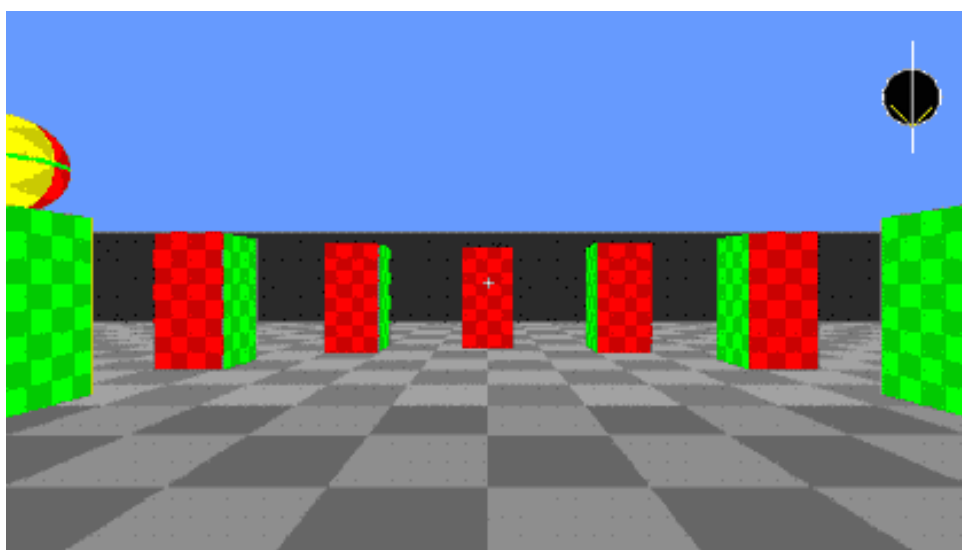
Obr. 14



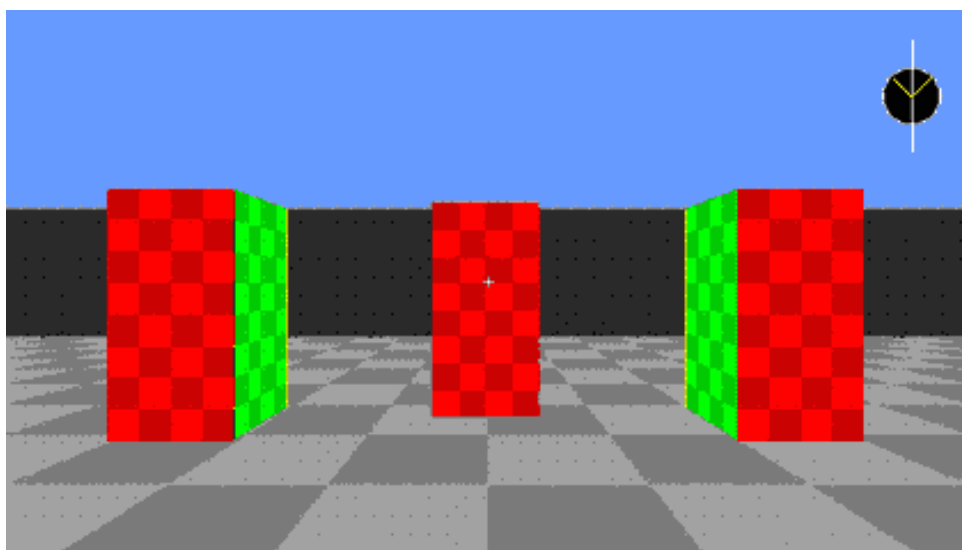
Obr. 13



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

Ve skutečnosti byla rychlost rakety $v = 0,969c$, takže shoda je výborná. Nicméně stejnost poloh středů byla čistě náhodná; při jakékoliv jiné rychlosti, poloze či absenci jednoho z párů obrázků fotografovaných ze stejných míst bychom tento postup použít nemohli.

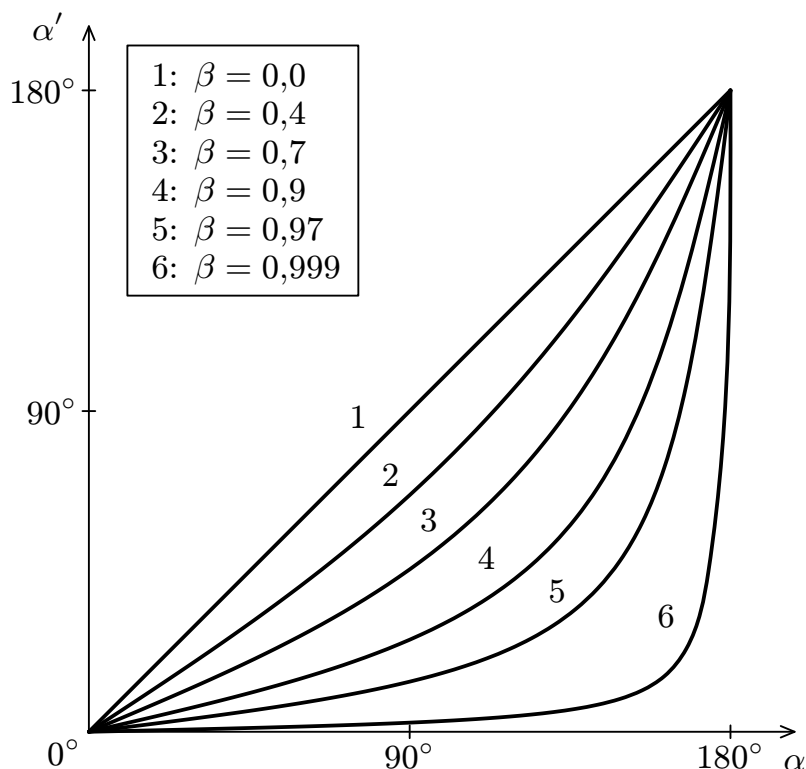
Mnozí z vás se podívovali nad zdánlivým paradoxem; v relativitě se totiž podélné vzdálenosti zkracují a příčné zachovávají, zorný úhel by se měl proto zmenšit. Chyba! Špatně jsme použili kontrakci délek, což seznáme, když situaci podrobně propočteme pomocí Lorentzových transformací. My půjdeme trochu jiným směrem, využijeme známých vzorců pro skládání rychlostí (viz např. seriál v 15. ročníku). Představme si dvě vztažné soustavy, které se přibližují rychlostí u (kupříkladu soustava středu Stonehenge (S) a rakety (S')). Jestliže se těleso v soustavě S pohybuje rychlostí $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, v soustavě S' bude mít rychlost $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y)$, pro kterou platí

$$v'_x = \frac{v_x + u}{1 + v_x u/c^2}, \quad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v_x u/c^2}.$$

Uvažujme nyní o světelném paprsku, jenž se v soustavě S šíří (a na sítnici oka stojícího pozorovatele dopadá) pod úhlem α ; rychlost paprsku je $\mathbf{v} = (c \cos \alpha, c \sin \alpha)$. Úhel α' , pod kterým paprsek dopadá na sítnici pozorovatele v raketě, je potom dán vztahem

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v'_y}{v'_x} = \sin \alpha \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\cos \alpha + u/c}.$$

Závislost úhlu α' na úhlu α je znázorněna na obrázku 18 pro různé hodnoty $\beta = u/c$. Pokud se díváme ve směru letu, zorný úhel se doopravdy zvětšuje (neboť $\alpha > \alpha'$). Naopak, díváme-li se dozadu, uvidíme menší část prostoru.



Obr. 18. Závislost úhlu α' na úhlu α pro různé hodnoty $\beta = u/c$.

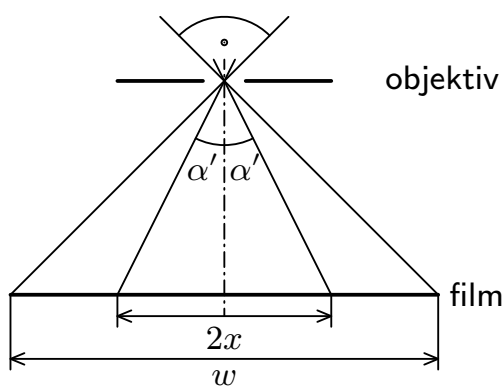
Dejme tomu, že jsme obraz zaznamenávali fotoaparátem. V takovém případě se zachovávají úhly paprsků. Ježto je vzdálenost filmu od objektivu konstantní, průsečík paprsku s filmem

bude ve vzdálenosti $d \operatorname{tg} \alpha$, kde d je vzdálenost objektivu od filmu a α je úhel, jež svírá paprsek s optickou osou. To znamená, že vzdálenost na obrázku je úměrná $\operatorname{tg} \alpha$ příslušného paprsku.

V této chvíli si již můžeme libovolně zvolit směr, ve kterém budeme měřit vzdálenosti a porovnávat polohu stejných paprsků na obrázku vestoje a za letu. Zde v řešení budeme zjišťovat polohu kvádrů o souřadnicích $(0, \pm 200)$, budeme pracovat ve vodorovné rovině. Stojíce v bodě $(0, 0)$ bychom měli tyto kvádry vidět pod úhlem 90° . Úhel za letu můžeme odměřit z obrázku 15.

Z obrázku 16 plyne, že zorný úhel fotoaparátu je 90° . Zorným úhlem zde rozumíme úhel, jež svírá levý krajní paprsek s pravým krajním paprskem. Pro poměr vzdálenosti středu levého kvádrů od středu obrázku x ku šířce obrázku máme $2x/w = \operatorname{tg} \alpha' / \operatorname{tg} 45^\circ$. Odměříme

$$2x/w \approx 0,256 \approx \operatorname{tg} \alpha'.$$



Obr. 19

Známe $\alpha = 90^\circ$, pročez platí rovnice $\operatorname{tg} \alpha' = \sqrt{1 - \beta^2} / \beta$, odkud úpravou dostaneme

$$u = \beta \cdot c = \frac{c}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} \approx 0,969c,$$

takže jsme se do správné hodnoty trefili opět výborně.

Matouš Ringel

matous@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. E ... chyťte foton (8 bodů; průměr 5,88; řešilo 25 studentů)

Změřte rychlost světla ve vakuu. Provést to můžete libovolným způsobem, použijte třeba i mikrovlnnou troubu. Úlohu navrhl Pavel Brom.

Historický úvod

Historie měření rychlosti světla je poměrně obsáhlá kapitola. K realizaci klasických mechanických experimentů (Fizeauovo měření s ozubeným kolem nebo užití Foucaultova rotujícího zrcadla) si pravděpodobně neobstaráme potřebné zařízení. Kvůli technické i časové náročnosti se nebudeme zabývat zajímavými astronomickými metodami, jako např. Bradleyho měření aberačního úhlu u hvězd nebo pomocí zákrytů měsíců některých planet (viz úloha předchozí série). V našem řešení budeme měřit rychlost vhodného elektromagnetického vlnění, kterým viditelné světlo je, a přitom uijeme teoretického poznatku J. C. Maxwella, že všechno elektromagnetické záření se ve vakuu šíří stejnou rychlostí, která je prakticky rovná měřené rychlosti světla ve vzduchu.

Teorie

Mezi vlnovou délkou λ , frekvencí f a rychlostí šíření c elektromagnetického vlnění platí vztah

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f.$$

Odtud rychlost světla vypočteme, podaří-li se nám např. změřit vlnovou délku záření o známé frekvenci. Ze zkušenosti víme, že rychlost světla je velická, proto bychom potřebovali vlnění

s poměrně vysokou frekvencí, aby vlnová délka byla měřitelná dostupnými prostředky. Vyzkoušejme třeba (podle doporučení v zadání) mikrovlnnou troubu, která dle normy pracuje na frekvenci (samozřejmě v bezlicenčním frekvenčním pásmu)

$$f = 2,45 \text{ GHz}.$$

Při měření vlnové délky mikrovln využijeme skutečnosti, že vyzářené vlny interferují s vlnami odraženými od stěn a v troubě vzniká tzv. *stojaté vlnění*. Vlny se musí odrážet; jejich pohlcování ve stěnách je neúčinné a mohlo by znamenat poničení trouby. Mikrovlny samozřejmě nesmí unikat do okolí a ohrožovat kuchaře. U stojatého vlnění existují jednak *uzly* (tj. místa, kde se vektory elektrické intenzity přímé a odražené vlny nezávisle na čase vyruší), jednak *kmitny*, v nichž se intenzity sčítají konstruktivně a dosahují největší amplitudy. Právě v místě kmiten se ohřívání látky (která musí být alespoň polární, jako např. voda) předává nejvíce energie a látka se nejrychleji zahřívá. Aby se potravina lokálně nespálila v důsledku pomalého odvodu tepla, talíř se s ní pomalu otáčí. Jistý vliv na ohřev může mít také proudící vzduch. Ve vodě se teplo efektivně rozvádí prouděním (konvekcí). Nepochopitelné látky, jako např. porcelán talíře či sklo, se ohřívají sekundárně od jídla běžným vedením tepla.

V teorii potřebujeme zmínit, že sousední kmitny jsou vzdáleny právě o polovinu vlnové délky. Vlnovou délku tedy určíme změřením vzdálenosti d přes celkem n kmiten (včetně měřených krajních) podle vztahu

$$\lambda = \frac{2d}{n - 1}.$$

Měření

Když rozumíme principům funkce mikrovlnné trouby, můžeme se věnovat vlastnímu měření. Polohu kmiten zviditelníme látkou, která se snadno nataví (a pokud možno příliš rychle neodvádí teplo, což vede k rozmazání polohy). Organizátoři k tomuto účelu jednomyslně preferují čokoládu. Jednu nebo dvě tabulky čokolády nožem nařežeme na malé kousky a dostatečně hustě je rozsypane po rovném skleněném talíři z trouby. Je jasné, že musíme potlačit otáčení talíře, tudíž jej do trouby položíme na dva vhodně vysoké hrnky, lépe však na plastový kryt sloužící k přiklopení talířů. Pokud nemáme velké zásoby čokolády a chceme šetřit energii, musíme pokus provádět s rozvahou. Nastavíme střední výkon a spustíme mikrovlnku na 5 až 30 sekund. Poté talíř vytáhneme a špičkou nože vyzkoušíme, kde a do jaké míry se čokoláda rozehřála. Podle množství a jakosti materiálu můžeme pokus opakovat a hledat optimální nastavení výkonu a doby ohřevu. Je vhodné dát čokoládu na talíři ztuhnout do lednice a měření opakovat.

Organizátoři vyzkoušeli měření s několika různými mikrovlnkami. Nejlepší dosažený výsledek obsahoval $n_1 = 5$ zviditelněných kmiten. Levná mikrovlnka *Karla Tůmy* za 1 500 Kč pravděpodobně má jinak navrženou dutinu, která není zcela optimální pro naše měření. Organizátoři zjistili, že pokud se kmitny v jedné přímce zviditelní (jejich počet nepřevyšil 3), potom jejich orientace závisí mimo jiné na rozmístění hrníčků a uspořádání experimentu. Odečtené vzdálenosti d_i jsou uvedeny v tabulce s vypočtenou hodnotou rychlosti.

č. m.	n	d [cm]	λ [cm]	rel. chyba [%]	c [10^8 m/s]
1	5	24 ± 1	$12,0 \pm 0,5$	4,2	$2,94 \pm 0,13$
2	3	12 ± 1	12 ± 1	8,3	$2,9 \pm 0,3$
3	3	$12,5 \pm 1,0$	$12,5 \pm 1,0$	8,0	$3,1 \pm 0,3$
4	3	12 ± 1	12 ± 1	8,3	$2,9 \pm 0,3$
5	3	12 ± 1	12 ± 1	8,3	$2,9 \pm 0,3$

Relativní chybu měření d můžeme pokládat za rovnou relativní hodnotě výsledku c díky přímé úměře. Pokud je první platná číslice absolutní chyby jednička, je možné uvést chybu na dvě platné číslice. Připomeňme, že absolutní chyby vždy bezpečně zaokrouhlujeme nahoru a střední hodnotu zaokrouhlíme standardně ve stejném řádu. Všechny výsledky s ohledem na chyby měření spolu korespondují. V závěru můžeme uvést nejpřesnější měření, popřípadě aritmetický průměr, jenž může být vážený převrácenými hodnotami relativních chyb a vypočten z nezaokrouhlených hodnot, jakožto nejlepší odhad střední hodnoty (uveden se standardní odchylkou)

$$c = (2,95 \pm 0,09) \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Chybu výsledku vypočítáme dle kvadratického zákona sčítání možné chyby, statistické a příp. dalších chyb měření, což je důležité, abychom nepodcenili výslednou chybu měření

$$\varepsilon_c = \sqrt{0,25^2 + 0,09^2} \cdot 10^8 \text{ m/s} \doteq 0,266 \cdot 10^8 \text{ m/s} \doteq 0,3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Diskuse a závěr

S využitím stojatého vlnění v mikrovlnné troubě jsme s chybou 10 % změřili rychlost světla ve vzduchu

$$c = (2,9 \pm 0,3) \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

která se velmi dobře blíží tabelované hodnotě $c \doteq 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Chybu měření navýšilo především nepřesné určení poloh kmiten. Při některých uspořádáních experimentu se kmitny nedaly nalézt, což lze vysvětlit složitými odrazy a pohlcováním mikrovln v troubě. Pokud se však kmitny v přímce zviditelnily, dávaly vždy dobrý a jednoznačný výsledek v souladu s teorií.

Poznámky k došlým řešením

Při měření jsme také vyzkoušeli nápad *Petra Bezmozka Dvořáka* využít termopapír, který jsme na doporučení *Matouše Ringela* nejdříve namočili do vody. V jednom případě jsme získali velmi pěkný obraz poloh tří kmiten v přímce dávající očekávaný výsledek. Z našich zkušeností však plyne, že odečtení vzdálenosti zde je zatíženo větší možnou chybou měření než při použití čokolády. (V takových případech prosíme o přiložení vašeho záznamu k řešení.) Samozřejmě bychom chtěli pochválit všechny, kteří své měření zdokumentovali a digitální fotografie nám zaslali. Většina řešitelů si jako detektor vzala bonbóny značky JOJO Marshmallow. Několik z vás použilo laser se zářením o známé frekvenci a pomocí interferenčních metod (difrakce na mřížce) změřilo vlnovou délku. Originální metody si vyzkoušeli *Stanislav Vosolobě* (měření kapacity kondenzátoru, resp. permitivity a výpočet rychlosti světla ze znalosti permeability prostředí) a *Tomáš Jirotko*, který pomocí dvoukanálového osciloskopu přímo měřil časové zpoždění dvou pulsů v závislosti na nastaveném rozdílu uražených drah.

Všimněte si, že aritmetický průměr je mírně vychýlen od tabelované hodnoty, i když jí v rámci standardní odchylky odpovídá. Jeho uvedením se standardní odchylkou, která může být při větším statistickém souboru již hodně malá, bychom se mohli dopustit chyby v závěru. Proto musíme při vyhodnocení chyby započítat také možnou chybu danou hrubostí měření, jak jsme to udělali, abychom neztratili jistotu. Co říci na závěr, je jasné. Po experimentu, poctivém počítání směrodatných odchylek a vyhodnocení chyb a jako odměnu za naše celoroční snažení všichni čokoládu s chutí sníme!

Pavel Brom

paja@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.S ... Hamiltonův formalismus (5 bodů; průměr 4,46; řešilo 13 studentů)
Langrangián částice v elektromagnetickém poli je

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2}m \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - q\varphi + q \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i A_i, \quad (18)$$

kde φ je elektrický potenciál a \mathbf{A} magnetický vektorový potenciál.

- Určete zobecněné hybnosti částice p_i příslušející rychlostem \dot{x}_i .
- Napište Hamiltonovu funkci (v souřadnicích (x_i, p_i) !).
- Řešte Hamiltonovy rovnice, je-li $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ a $\varphi = -Ex_1$.

Zadal Honza Prachař podle cvičení z teoretické mechaniky doc. Podolského.

Řešení této úlohy bude přímočaré, stačí se držet postupu, který jsme naznačili v minulém díle seriálu (jen je třeba si dát pozor, že q je náboj částice, nikoli zobecněná souřadnice).

- Zobecněné hybnosti určíme přímo z definice

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + qA_j, \quad (19)$$

odtud inverzí vztahu vyjádříme \dot{x}_j

$$\dot{x}_j = \frac{1}{m}(p_j - qA_j). \quad (20)$$

Poslední vztah ještě přepíšeme do vektorové podoby

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}).$$

- Lagrangián (18) a zobecněnou hybnost (19) dosadíme do definice Hamiltonovy funkce

$$H(x_j, p_j) = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i - L = \frac{1}{2}m \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 + q\varphi.$$

Poslední vztah ovšem ještě není vyjádření hamiltoniánu, musíme přejít k souřadnicím (x_j, p_j) . K tomu využijeme vztah (20) a dostaneme

$$H(x_j, p_j) = \frac{1}{2m} \cdot \sum_{i=1}^3 (p_i - qA_i)^2 + q\varphi,$$

v úspornější vektorové podobě má hamiltonián tvar

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\varphi.$$

- Pro zadaný potenciál hamiltonián je (místo (x_1, x_2, x_3)) budeme od teď používat (x, y, z))

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - qEx = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - qEx.$$

Se znalostí Hamiltonovy funkce už jen zbývá vyřešit Hamiltonovy rovnice. Napišme si první sadu Hamiltonových rovnic $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$

$$\frac{dp_x}{dt} = qE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0,$$

které mají řešení

$$p_x = qEt + p_{x0}, \quad p_y = p_{y0}, \quad p_z = p_{z0}, \quad (21)$$

kde p_{x0} , p_{y0} a p_{z0} jsou počáteční hybnosti částice. Do druhé sady Hamiltonových rovnic $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{p_z}{m}$$

dosadíme z (21)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_{x0}}{m} + \frac{qE}{m} t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_{y0}}{m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{p_{z0}}{m}$$

a soustavu vyřešíme

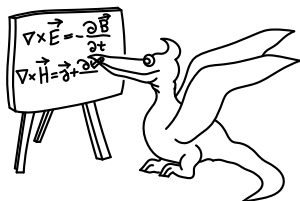
$$x = x_0 + \frac{p_{x0}}{m} t + \frac{qE}{2m} t^2, \quad y = y_0 + \frac{p_{y0}}{m} t, \quad z = z_0 + \frac{p_{z0}}{m} t,$$

kde x_0 , y_0 a z_0 je počáteční poloha částice.

Částice se tedy bude podle očekávání ve směru os y a z pohybovat rovnoměrně přímočaře a ve směru osy x bude zrychlovat se zrychlením o velikosti $a = qE/m$.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 5: Hamiltonův variační princip

Formulace

Lagrangeovy rovnice jsme obdrželi z Newtonových rovnic přepisem do křivočarých souřadnic. V tomto díle si ukážeme, že je lze odvodit ze zcela fundamentálního principu stacionární akce. Tento princip nám jednak pomůže lépe pochopit strukturu samotné mechaniky a také si řekneme, že lze zobecnit i mimo klasickou mechaniku.

Hamiltonův princip matematicky formulujeme pomocí variačního počtu. Pokud tuto oblast matematiky neznáte, nezuofejte, snadno myšlenku tohoto dílu seriálu pochopíte i bez její znalosti.

Přístupme k formulaci Hamiltonova variačního principu.

Pohyb soustavy v čase $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ se odehrává tak, že

$$\delta S = 0 \quad (22)$$

(*variace akce je nula*), kde funkcionál² S je akce definovaná

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt. \quad (23)$$

Postupně si jednotlivé pojmy vysvětlíme. Akce S je funkcionál, který trajektorii $q_j(t)$ s pevnými konci $q_j(t_1)$ a $q_j(t_2)$ (tj. v hraničních bodech t_1 a t_2 máme funkci $q_j(t)$ pevně zadanou) přiřadí číslo. Podle Hamiltonova principu budeme hledat takovou funkci $q_j(t)$, aby funkcionál S nabýval extrémní hodnoty.

Úloha hledání extrému funkcionálu je analogická hledání extrému funkce. Nutnou podmínkou pro existenci extrému funkce f je (jak jistě víte) nulovost diferenciálu

$$df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

Analogicky nutnou podmínkou existence extrému funkcionálu S je nulovost variace $\delta S = 0$.

Odvození Lagrangeových rovnic

Jak jsme slíbili, nyní si nastíníme, na co Hamiltonův variační princip povede (důkazy některých kroků vynecháme a nebudeme formulovat podmínky, které musí funkcionál S a funkce $q_j(t)$ splňovat).

Zvolme si dva časy t_1 a t_2 , v nichž máme zadanou funkci $q_j(t)$, a hledejme takovou funkci $q_j(t)$, aby variace S byla nulová. Akce S má v $q_j(t)$ nabývat extrému, její hodnota se tedy při změně $q_j(t)$ o libovolné malé $\delta q_j(t)$ nezmění. To vyjádříme rovnicí

$$0 = \delta S[q_j(t)] = S[q_j(t) + \delta q_j(t)] - S[q_j(t)].$$

²⁾ Funkcionál je předpis, který funkci přiřadí číslo.

Dosaďme za akci S z definice (23)

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t) + \delta q_j(t), \dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt.$$

Provedeme Taylorův rozvoj funkce L do prvního řádu a začneme používat Einsteinovu sumační konvenci³

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt,$$

první a třetí člen se odečtou. Budeme předpokládat, že lze prohodit pořadí variování a derivování podle času, tj. $\delta \dot{q}_j(t) = \frac{d}{dt} \delta q_j(t)$, potom máme rovnici

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j \right) dt.$$

Ze závorky v integrandu bychom potřebovali vytknout δq_j , ovšem druhý člen obsahuje jeho derivaci, proto provedeme integraci per partes

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Funkce $q_j(t)$ má pevné konce $q_j(t_1)$ a $q_j(t_2)$, tudíž $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ a druhý člen v poslední rovnici je roven nule. Nyní již můžeme $\delta q_j(t)$ vytknout a obdržíme

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j(t) dt.$$

Funkce $\delta q_j(t)$ je libovolná, má-li být tedy rovnice splněna, musí být výraz v závorce nulový

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

což jsou Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

Lagrangeovy rovnice jsou tedy nutnou podmínkou pro extrém akce S (jsou to diferenciální rovnice pro funkci $q_j(t)$, která realizuje extrém). Protože ovšem nejde o podmínky postačující, nemusí řešení těchto rovnic odpovídat extrému. Fakticky je platnost Lagrangeových rovnic ekvivalentní pouze vztahu (22), tj. stacionaritě funkcionalu S . Řada důležitých výsledků variačního počtu vyžaduje pouze stacionárnost a nikoliv extrémnost funkcionalu S .

V rámci klasické mechaniky se dá ukázat, že akce pro skutečný fyzikální děj nabývá lokálního minima, proto někdy mluvíme o principu nejmenší akce.

³⁾ Nebudeme vypisovat znamení sumy a budeme automaticky předpokládat, že opakování indexu znamená součet přes všechny jeho hodnoty (zde od 1 do 3).

Zobecnění mimo klasickou mechaniku

Variační principy se neomezují jen na mechaniku. Postupně se ukázalo, že všechny základní rovnice moderní fyziky lze vyvodit z principu stacionární akce. Proto se tento princip stává vodítkem při hledání nových teorií.

Obecně akci definujeme předpisem

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\Phi, \Phi_{,\mu}) d\Omega,$$

kde Ω je element prostoročasu. Hledáme funkci Φ , která je pevně zadaná na hranici, aby bylo splněno

$$\delta S = 0.$$

Pro ilustraci uvedeme lagrangiány \mathcal{L} některých fyzikálních teorií a jejich rovnice, které jsou důsledkem variačního principu.

- Maxwellova teorie elektromagnetismu

$$\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^{\mu} A_{\mu} \quad \Rightarrow \quad F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{c\varepsilon} j^{\mu}.$$

- Einsteinova teorie gravitace

$$\mathcal{L} = -\frac{c^3}{16\pi G} R + \frac{1}{c} \mathcal{L}_{\text{hmota}} \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

- Relativistická kvantová teorie pro spin 0 (Klein-Gordon)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\Phi^{,\mu} \Phi_{,\mu} - \varkappa^2 \Phi^2) \quad \Rightarrow \quad (\square + \varkappa^2) \Phi = 0.$$

- Relativistická kvantová teorie pro spin 1/2 (Dirac)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - \varkappa) \psi \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - \varkappa) \psi = 0.$$

Poslední dvě jmenované rovnice najdete od příštího roku na FYKOSím tričku, která jako obvykle dostanou naši nejlepší řešitelé a hledači chyb.

Závěr

Na závěr seriálu vám chceme poděkovat, že jste se dočetli až sem. Doufáme, že se vám aspoň některé části líbily a že jste se něco nového naučili.

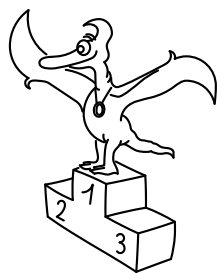
Pokud máte jakékoli dotazy či byste se chtěli o teoretické mechanice dozvědět více, nebojte se nás kontaktovat. Příští rok se můžete těšit na seriál Matouše Ringela o *statistické fyzice*.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po V. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	3	4	4	8	6	32	100	166
1. <i>Stanislav Vosol sobě</i>	G U Balvanu Jablonec nN	3	3	3	4	4	8	5	30	90	146
2. <i>Anton Repko</i>	G Sv. Mikuláše, Prešov	4	5	4	4	4	–	7	28	90	110
3. <i>Bedřich Roskovec</i>	MasG Petáková, Plzeň	3	5	3	4	4	9	5	33	78	85
4. <i>Ivan Dimitrov</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	69	69
5. <i>Petr Vaško</i>	MasG Petáková, Plzeň	3	3	3	–	1	9	5	24	81	58
6. <i>Petr Houštěk</i>	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	0	85	50
7. <i>Robert Roreitner</i>	MasSŠ chemická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	51	42
8. <i>Roman Fiala</i>	VOŠ a SPŠE Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	68	41
9. <i>Zuzana Safernová</i>	G Bílovec	2	1	2	–	–	–	2	7	78	35
10. <i>Jakub Závodný</i>	G Bratislava, Grösslingova	–	–	–	–	–	–	–	0	80	32
11. <i>Zdeněk Kučka</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	0	67	28
12. <i>Daniel Božík</i>	G Jura Hronca	–	–	–	–	–	–	–	0	90	26
13. <i>Petr Morávek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	86	25
14.–15. <i>Kateřina Fišerová</i>	G Lepařovo, Jičín	–	–	–	–	–	–	–	0	81	22
<i>Peter Greškovič</i>	G Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	56	22
16.–17. <i>Pavλίna Böhmová</i>	G Komenského Havířov	–	–	–	–	–	–	–	0	52	14
<i>Petr Kubala</i>	SPŠ Frýdek Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	39	14
18. <i>Petr Novotný</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	43	10
19. <i>Lenka Doubravová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	60	9
20.–21. <i>Jana Babovákova</i>	G Most	–	–	–	–	–	–	–	0	42	8
<i>Michal Humpula</i>	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	50	8
22.–24. <i>Zdeněk Lochman</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	37	7
<i>Tomáš Mihalík</i>	G Husitská	–	–	–	–	–	–	–	0	22	7
<i>Denis Vald</i>	G Jírovceva, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	41	7
25.–27. <i>Markéta Kavalírová</i>	G Českolipská Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	75	6
<i>Markéta Vilimovská</i>	G Českolipská Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	75	6
<i>Kateřina Žabková</i>	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	25	6
28. <i>Jiří Kubr</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	27	3

Kategorie třetích ročníků

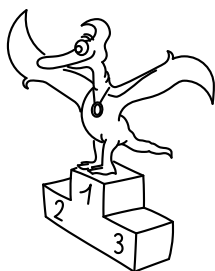
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	3	4	4	8	6	32	100	166
1. Tomáš Bednárik	G Vsetín	3	2	2	4	3	6	4	24	76	123
2. Martin Konečný	G Boskovice	3	3	2	1	3	10	4	26	65	98
3. Miroslav Hrubý	BG Barvičova Brno	4	5	3	–	2	–	–	14	71	74
4. Petr Bezmozek Dvořák	SPŠ Jihlava	4	0	2	0	–	8	–	14	57	73
5. Aleš Podolník	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	71	70
6. Ondřej Bílka	G Lesní čtvrť, Zlín	3	3	4	0	–	–	4	14	77	69
7. Peter Perešíni	G J. G. Tajovského	4	3	3	–	1	–	–	11	85	63
8. Libor Šachl	G Terezy Novákové Brno	2	2	2	2	2	5	–	15	48	62
9. Monika Josieková	G Český Těšín	–	–	–	1	–	–	2	3	60	61
10. Marek Scholz	G Neratovice	–	–	–	–	–	3	3	6	74	57
11. Petra Malá	G Moravský Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	0	60	49
12. Miroslav Janáček	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	52	45
13. Martin Koštejn	G a SPgŠ Liberec	–	1	–	–	–	–	–	1	55	44
14. Zuzana Pôbišová	G J. G. Tajovského	–	–	–	–	–	–	–	0	64	41
15.–16. Vojtěch Molda	G Vsetín	3	1	–	2	–	4	–	10	43	40
Petr Smital	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	75	40
17. Jenda Valášek	G Broumov	–	–	–	–	–	–	–	0	69	38
18. Jan Bednář	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	61	34
19. Beáta Hergelová	G Lučenec	–	–	–	–	–	–	–	0	54	31
20.–21. Tomáš Jirotko	G Klatovy	4	5	–	1	0	–	–	10	55	30
Michal Sivák	G Ľudovíta Štúra	4	–	–	–	3	–	–	7	70	30
22. Roman Derco	G Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	73	29
23.–24. Vladimír Sivák	G Ľudovíta Štúra	4	–	–	–	3	–	–	7	65	28
Slavomír Takáč	G Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	0	88	28
25. Adam Přenosil	G Sladkovského n., Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	70	26
26. Tereza Klimošová	G Lanškroun	–	–	–	–	–	–	–	0	88	21
27. Martina Miková	G Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	0	43	17
28.–30. Pavel Burda	G Křenová Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	56	15
Jiří Hloska	G Terezy Novákové Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	60	15
Jana Vrábelová	G Ľudovíta Štúra	4	–	–	–	3	–	–	7	48	15
31. Jana Pokorná	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	58	14
32.–33. Michal Seidel	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	58	11
Tomáš Šťastný	G D. Tatarku, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	34	11
34. Lucie Hympánová	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	28	10
35.–36. Jaroslav Hančl	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	73	8
Tomáš Janda	G Klatovy	4	–	–	–	–	–	–	4	100	8
37.–38. Martin Hrdlička	G Louny	–	–	–	–	–	–	–	0	64	7
Hana Vítová	G Bystřice n. Pern.	–	–	–	–	–	–	–	0	54	7
39. Milan Klicpera	G Čelákovice	–	–	–	–	–	–	–	0	21	6
40.–41. Vendula Exnerová	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
Radek Papoušek	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
42.–44. Radka Bystřická	G Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
Jan Matoušek	G Žižkova, Kolín	–	–	–	–	–	–	–	0	25	4
Darja Suchá	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
45. František Matyska	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	20	3
46.–47. Martin Bernátek	SOŠ Krnov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	2
Ondřej Lébl	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	0	29	2

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
		4	3	3	4	4	8	6	32	100	166
1. <i>Pavel Motloch</i>	G Petra Bezruče	4	4	3	4	4	3	5	27	89	140
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy Praha	4	2	3	4	–	–	3	16	83	101
3. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	3	1	3	1	–	5	–	13	53	67
4. <i>Lukáš Malina</i>	G Zborovská, Praha	4	–	3	1	–	10	–	18	79	60
5. <i>Jana Przewczková</i>	G Komenského Havířov	–	–	–	–	–	5	–	5	55	47
6.–7. <i>Ondřej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra	4	–	–	–	3	–	–	7	53	46
<i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická Praha	3	1	–	–	–	–	–	4	46	46
8. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	0	61	44
9. <i>Daniel Šimsa</i>	G Josefa Jungmanna	1	1	3	–	–	–	–	5	49	28
10.–11. <i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	40	27
<i>Jakub Prouza</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	57	27
12. <i>Juraj Zajac</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	51	20
13. <i>Martin Lexa</i>	G Vysoké Mýto	–	–	–	–	–	–	–	0	54	19
14. <i>Vlastimil Peksa</i>	G Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	18
15.–16. <i>Miroslav Kaděra</i>	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	67	16
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	40	16
17. <i>Kristýna Krejčová</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	0	54	15
18. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	–	–	–	–	–	–	–	0	69	11
19. <i>Petr Dvořák</i>	G V. Makovského	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
20. <i>Jiří Špale</i>	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	73	8
21. <i>Beáta Garšicová</i>	G Vídeňská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	47	7
22.–23. <i>Petr Šácha</i>	G Tachov	–	–	–	–	–	–	–	0	32	6
<i>Martin Štys</i>	SOU Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	75	6
24. <i>Miloslava Kučeríková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	36	4
25. <i>Petra Votavová</i>	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	0	11	3
26.–27. <i>Tomáš Ehrlich</i>	G Holešov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
<i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	18	2
28.–29. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
<i>Jana Susová</i>	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	3	4	4	8	6	32	100	166
1. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	3	1	3	1	2	5	2	17	49	48
2. <i>Jan Valášek</i>	G Zborovská, Praha	4	3	2	1	1	–	–	11	59	42
3. <i>Tereza Fantová</i>	G Benešov	–	–	–	–	–	2	–	2	39	38
4. <i>Katarína Rozvadská</i>	G Ľudovíta Štúra	1	–	–	–	–	–	–	1	43	33
5. <i>Katarína Bazová</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	48	31
6. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	3	1	3	–	2	–	–	9	56	30
7. <i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	–	–	–	–	–	–	–	0	36	22
8. <i>Josef Müller</i>	G dr. Josefa Pekaře	–	–	–	–	–	–	–	0	38	18
9.–10. <i>Michal Berta</i>	G Trebišov	–	–	–	–	–	–	–	0	19	17
<i>Jan Červenka</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	38	17
11. <i>Lenka Sabová</i>	G Javorová, S. Nová Ves	–	–	–	–	–	–	–	0	57	16
12. <i>Michaela Kubinová</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	42	14
13. <i>Marek Nečada</i>	ZŠ Otakara Březiny	4	2	3	–	1	–	–	10	71	10
14. <i>Antonín Zoubek</i>	G prof. Patočky Praha	4	3	2	–	0	–	–	9	64	9
15.–16. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM Zlín	2	2	1	1	1	–	–	7	39	7
<i>Petra Navrátilová</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	26	7
17. <i>Jan Macháček</i>	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	0	18	5
18. <i>Petr Hons</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	15	4
19. <i>Aleš Růžička</i>	G Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	13	3
20.–21. <i>Vlastimil Daníček</i>	COP Hronov	–	–	–	–	0	–	–	0	4	2
<i>Jan Navrátil</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	18	2
22. <i>Barbora Henzlová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1



Pořadí řešitelů po VI. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	5	5	8	5	34	100	200
1. <i>Stanislav Vosol sobě</i>	G U Balvanu Jablonec nN	3	2	4	3	2	8	5	27	88	173
2. <i>Anton Repko</i>	G Sv. Mikuláša, Prešov	3	4	3	–	5	–	–	15	91	125
3. <i>Bedřich Roskovec</i>	MasG Petáková, Plzeň	3	4	2	–	–	5	4	18	77	103
4. <i>Petr Vaško</i>	MasG Petáková, Plzeň	3	4	3	–	–	6	5	21	82	79
5. <i>Ivan Dimitrov</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	69	69
6. <i>Zuzana Safernová</i>	G Bílovec	3	4	–	2	–	8	5	22	81	57
7. <i>Petr Houštěk</i>	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	0	85	50
8. <i>Roman Fiala</i>	VOŠ a SPŠE Plzeň	3	2	2	–	–	–	–	7	68	48
9. <i>Robert Roreitner</i>	MasSŠ chemická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	51	42
10. <i>Daniel Božík</i>	G Jura Hronca	3	4	4	–	–	–	–	11	93	37
11. <i>Jakub Závodný</i>	G Bratislava, Grösslingova	–	–	–	–	–	–	–	0	80	32
12. <i>Zdeněk Kučka</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	0	67	28
13. <i>Petr Morávek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	86	25
14.–15. <i>Kateřina Fišerová</i>	G Lepařovo, Jičín	–	–	–	–	–	–	–	0	81	22
<i>Peter Greškovič</i>	G Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	56	22
16.–17. <i>Pavčina Böhmová</i>	G Komenského Havířov	–	–	–	–	–	–	–	0	52	14
<i>Petr Kubala</i>	SPŠ Frýdek Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	39	14
18. <i>Petr Novotný</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	43	10
19. <i>Lenka Doubravová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	60	9
20.–21. <i>Jana Babovácová</i>	G Most	–	–	–	–	–	–	–	0	42	8
<i>Michal Humpula</i>	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	50	8
22.–24. <i>Zdeněk Lochman</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	37	7
<i>Tomáš Mihalík</i>	G Husitská	–	–	–	–	–	–	–	0	22	7
<i>Denis Vald</i>	G Jírovceva, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	41	7
25.–27. <i>Markéta Kavalírová</i>	G Českolipská Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	75	6
<i>Markéta Vilimovská</i>	G Českolipská Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	75	6
<i>Kateřina Žabková</i>	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	25	6
28. <i>Jiří Kubr</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	27	3

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	5	5	8	5	34	100	200
1. <i>Tomáš Bednárik</i>	G Vsetín	3	4	–	–	–	6	–	13	77	136
2. <i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	3	4	3	1	0	8	5	24	66	122
3. <i>Petr Bezmozek Dvořák</i>	SPŠ Jihlava	3	–	–	–	–	8	5	16	62	89
4. <i>Miroslav Hrubý</i>	BG Barvičova Brno	3	4	3	–	–	4	–	14	72	88
5.–6. <i>Monika Josieková</i>	G Český Těšín	3	4	3	–	–	6	5	21	65	82
<i>Aleš Podolník</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	–	4	–	–	0	8	–	12	71	82
7. <i>Libor Šachl</i>	G Terezy Novákové Brno	3	4	2	–	–	3	–	12	50	74
8. <i>Ondřej Bílka</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	77	69
9. <i>Peter Perešíni</i>	G J. G. Tajovského	–	–	–	–	–	–	–	0	85	63
10. <i>Marek Scholz</i>	G Neratovice	–	–	–	–	–	–	–	0	74	57
11. <i>Martin Koštejn</i>	G a SPgŠ Liberec	3	4	–	5	–	–	–	12	61	56
12. <i>Vojtěch Molda</i>	G Vsetín	3	4	–	–	–	6	–	13	49	53
13. <i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	0	60	49
14.–16. <i>Jan Bednář</i>	COP Hronov	3	4	–	–	–	7	–	14	68	48
<i>Tomáš Jirotko</i>	G Klatovy	2	4	–	–	1	8	3	18	60	48
<i>Jenda Valášek</i>	G Broumov	–	4	–	2	–	4	–	10	67	48
17. <i>Miroslav Janáček</i>	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	52	45
18. <i>Beáta Hergelová</i>	G Lučenec	3	2	2	3	–	2	–	12	53	43
19. <i>Zuzana Pôbišová</i>	G J. G. Tajovského	–	–	–	–	–	–	–	0	64	41
20. <i>Petr Smital</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	75	40
21. <i>Vladimír Sivák</i>	G Ľudovíta Štúra	3	4	–	–	–	–	–	7	70	35
22. <i>Michal Sivák</i>	G Ľudovíta Štúra	–	4	–	–	0	–	–	4	65	34
23. <i>Roman Derco</i>	G Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	73	29
24. <i>Slavomír Takáč</i>	G Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	0	88	28
25. <i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského n., Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	70	26
26. <i>Tereza Klimošová</i>	G Lanškroun	–	–	–	–	–	–	–	0	88	21
27. <i>Martina Miková</i>	G Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	0	43	17
28.–30. <i>Pavel Burda</i>	G Křenová Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	56	15
<i>Jiří Hloska</i>	G Terezy Novákové Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	60	15
<i>Jana Vrábelová</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	48	15
31. <i>Jana Pokorná</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	58	14
32. <i>Tomáš Janda</i>	G Klatovy	–	4	–	–	–	–	–	4	100	12
33.–34. <i>Michal Seidel</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	58	11
<i>Tomáš Šťastný</i>	G D. Tatarku, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	34	11
35. <i>Lucie Hympánová</i>	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	28	10
36. <i>Jaroslav Hančl</i>	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	73	8
37.–38. <i>Martin Hrdlička</i>	G Louny	–	–	–	–	–	–	–	0	64	7
<i>Hana Vítová</i>	G Bystřice n. Pern.	–	–	–	–	–	–	–	0	54	7
39. <i>Milan Klicpera</i>	G Čelákovice	–	–	–	–	–	–	–	0	21	6
40.–41. <i>Vendula Exnerová</i>	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
<i>Radek Papoušek</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
42.–44. <i>Radka Bystřická</i>	G Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
<i>Jan Matoušek</i>	G Žižkova, Kolín	–	–	–	–	–	–	–	0	25	4
<i>Darja Suchá</i>	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
45. <i>František Matyska</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	20	3
46.–47. <i>Martin Bernátek</i>	SOŠ Krnov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	2
<i>Ondřej Lébl</i>	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	0	29	2

Kategorie druhých ročníků

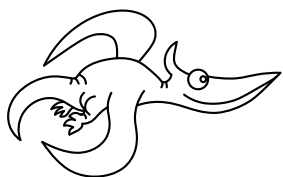
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	5	5	8	5	34	100	200
1. <i>Pavel Motloch</i>	G Petra Bezruče	3	4	4	4	2	8	6	31	89	171
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy Praha	3	4	4	–	2	8	6	27	85	128
3. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	3	4	2	3	0	6	–	18	55	85
4. <i>Lukáš Malina</i>	G Zborovská, Praha	–	4	–	5	–	–	–	9	81	69
5. <i>Jana Przczková</i>	G Komenského Havířov	2	4	1	–	0	6	1	14	53	61
6. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra	3	4	–	–	0	4	–	11	54	57
7. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická Praha	3	–	1	–	–	–	–	4	46	50
8. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	0	61	44
9. <i>Daniel Šimsa</i>	G Josefa Jungmanna	3	4	3	–	–	–	3	13	56	41
10. <i>Jakub Prouza</i>	COP Hronov	3	4	–	–	–	–	–	7	63	34
11. <i>Juraj Zajac</i>	G Ľudovíta Štúra	3	4	–	–	–	4	–	11	57	31
12. <i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	40	27
13. <i>Martin Lexa</i>	G Vysoké Mýto	–	4	–	1	–	–	–	5	55	24
14. <i>Vlastimil Peksa</i>	G Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	18
15.–16. <i>Miroslav Kaděra</i>	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	67	16
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	40	16
17. <i>Kristýna Krejčová</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	0	54	15
18. <i>Martin Štys</i>	SOU Hronov	3	4	–	–	–	–	–	7	87	13
19. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	–	–	–	–	–	–	–	0	69	11
20. <i>Petr Dvořák</i>	G V. Makovského	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
21. <i>Jiří Špale</i>	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	73	8
22. <i>Beáta Garšicová</i>	G Vídeňská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	47	7
23. <i>Petr Šácha</i>	G Tachov	–	–	–	–	–	–	–	0	32	6
24. <i>Miloslava Kučeríková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	36	4
25. <i>Petra Votavová</i>	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	0	11	3
26.–27. <i>Tomáš Ehrlich</i>	G Holešov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
<i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	18	2
28.–29. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
<i>Jana Susová</i>	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	5	5	8	5	34	100	200
1. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	3	3	2	–	–	6	5	19	55	67
2. <i>Jan Valášek</i>	G Zborovská, Praha	3	4	2	4	–	–	–	13	63	55
3. <i>Katarína Rozvadská</i>	G Ludovíta Štúra	3	4	4	–	–	4	–	15	50	48
4. <i>Katarína Bazová</i>	G Ludovíta Štúra	3	4	–	–	0	4	–	11	50	42
5. <i>Tereza Fantová</i>	G Benešov	–	–	–	–	–	–	–	0	39	38
6. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	56	30
7. <i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	–	4	–	–	–	–	–	4	40	26
8. <i>Josef Müller</i>	G dr. Josefa Pekaře	–	–	–	–	–	–	–	0	38	18
9.–10. <i>Michal Berta</i>	G Trebišov	–	–	–	–	–	–	–	0	19	17
<i>Jan Červenka</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	38	17
11.–12. <i>Marek Nečada</i>	ZŠ Otakara Březiny	–	4	–	–	2	–	–	6	70	16
<i>Lenka Sabová</i>	G Javorová, S. Nová Ves	–	–	–	–	–	–	–	0	57	16
13. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM Zlín	1	4	–	3	–	–	–	8	50	15
14.–15. <i>Michaela Kubinová</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	42	14
<i>Petra Navrátilová</i>	COP Hronov	3	4	–	–	–	–	–	7	41	14
16. <i>Antonín Zoubek</i>	G prof. Patočky Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	64	9
17. <i>Jan Macháček</i>	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	0	18	5
18. <i>Petr Hons</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	15	4
19. <i>Aleš Růžička</i>	G Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	13	3
20.–21. <i>Vlastimil Daníček</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	4	2
<i>Jan Navrátil</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	18	2
22. <i>Barbora Henzlová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1

Soutěž ve hledání chyb

jméno	III	IV	V	VI	Σ
1. <i>Zuzana Safernová</i>	10*	10	10	10*	40**
2. <i>Martin Konečný</i>	7	8	10	9	34
3. <i>Jan Matoušek</i>	9	10	3	10	32
4. <i>Jakub Benda</i>	6	3	9	7	25
5. <i>Jana Przewczková</i>	8	6	1	3	18
6. <i>Tomáš Bednárik</i>	3	1	7	–	11
7. <i>Petra Malá</i>	3	3	–	–	6
8. <i>Peter Perešíni</i>	5	–	–	–	5
9. <i>Beáta Hergelová</i>	–	1	–	1	2



Zadání I. série



Termín odeslání: 17. října 2005

Úloha I.1 ... opravdu Saturn plave?

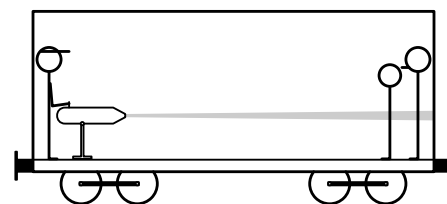
Věříte, že průměrná hustota Saturnu je menší než hustota vody?

Sami se můžete na Saturn podívat v dalekohledu. Kromě prstence uvidíte kolem planety několik měsíců, pokud nebudou zrovna v zákrytu. (V takovém případě byste si např. na měsíc Titan museli počkat nejdéle 6 hodin, kolik trvá jeho přechod přes kotouč planety.) Můžete zjistit, že Titan oběhne planetu jednou za 16 dní. Dokážete z pozorování měsíce Titanu určit průměrnou hustotu Saturnu? Pokud ne, zdůvodněte, pokud ano, vypočtete ji a přesvědčíte se o jedné zajímavosti.

Úloha I.2 ... Baník, slečno

Fanoušci Baníku jeli do Prahy na Spartu. Policisté však byli po špatných zkušenostech připraveni a do vagónu nainstalovali vodní dělo.

Na půli cesty, když vlak zrovna stál v České Třebové, baníkovci začali demolovat vybavení vagónu (jenž váží 30 t). Policisté nechali dotyčný vagón odpojit a briskně využili své zbraně. Za minutu na fanoušky vystříkali tisícilitrovou nádrž. O jakou vzdálenost proto popojel vagón dlouhý 30 m?



Obr. 20

Předpokládejte, že vagón je odbrzděný a že voda z vagónu může vytékat pouze ve svislém směru. Změnu hmotnosti vagónu způsobenou odtokem vody můžete zanedbat.

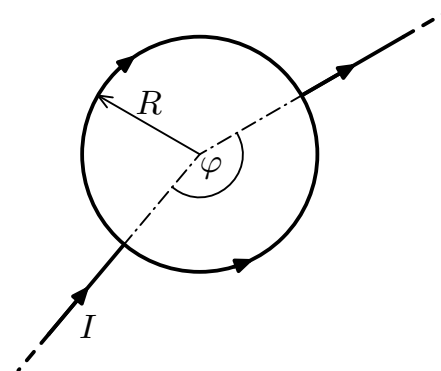
Úloha I.3 ... Armagedon

Poplach! Rudá světla indikují smrtelnou hrozbu. Směrem k Zemi se řítí meteoroid o známém průřezu S a tepelné kapacitě c . Určete, o kolik se zvýší jeho teplota během průletu atmosférou.

Předpokládejte, že se jeho rychlost stačí před dopadem ustálit a že se zahřívá rovnoměrně. Sami odhadněte, jaká část energie se spotřebuje na ohřátí vzduchu v atmosféře. Zamyslete se, jak je tento model realistický. Nakonec rozhodněte, zda bude mít meteoroid vyšší či nižší teplotu, pokud namísto vzduchem poletí vakuem, jež má nulovou tepelnou kapacitu.

Úloha I.4 ... hodte si smyčku

Představte si kruhovou smyčku tvořenou drátem. Radiálními vodiči přivádíme a odvádíme elektrický proud (viz obr. 21). Jaké bude magnetické pole uprostřed smyčky? Poloměr smyčky je R , úhel mezi radiálními přívodními dráty φ a proud v drátu I .



Obr. 21

Úloha I.P ... příliv na Bali

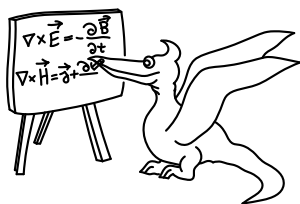
Když skončila Mezinárodní fyzikální olympiáda na Bali, olympionici odešli na celý den relaxovat k moři na jižní okraj tohoto ostrova v Indonésii. Sledovavše korálový útes, jak mizí

v přílivové vlně, uvědomili si po uplynutí úplňkové noci a letního dne, že příliv nastal jen jednou (během 24 h). Domorodci jim tuto skutečnost potvrdili, ale neuměli ji vysvětlit podobně jako účastníci MFO. Dokážete to vy?

Úloha I. E ... tvrdost kuliček

Až budete jedno podzimní odpoledne hrát s kamarády kuličky, uzměte svým přátelům jednu z nich a mrštěte s ní o tvrdý povrch. Posléze si udělejte značku ve výšce, do které kulička vyskočí, a změřte ji. Z naměřených hodnot určete koeficient odrazivosti kuličky (poměr energie kuličky před odrazem a po něm).

Podobná metoda se používá pro třídění tvrdosti ložiskových kuliček; málo tvrdé kuličky nepřeskočí bariéru a odstraní se.



Seriál na pokračování

Úvod

V letošním seriálu se pokusíme vyložit některé partie fyziky, ve kterých nějakým způsobem figuruje pojem pravděpodobnosti. Nebude se ovšem jednat o kvantovou mechaniku; v té je pravděpodobnost zanesena již od samého začátku. Namísto toho se budeme soustředit na situace, kdy se snažíme středovat veličiny, které neumíme přesně vypočítat. Abychom ilustrovali druh problémů, jimiž se budeme zabývat, podívejme se na každému známý příklad obyčejného plynu.

Cílem fyziky je vyložit pozorované jevy pomocí co nejméně a co možná nejjednodušších základních zákonů. Takovými zákony jsou v dobrém přiblížení Newtonovy zákony. Chtěli bychom tedy objasnit chování plynu pomocí Newtonových zákonů. Je nám ale jistě jasné, že to nebude jednoduchá záležitost. Vždyť v jednom litru běžného plynu se nachází řádově 10^{22} částic, které spolu ve všeobecnosti interagují netriviálním způsobem. Snaha o výklad vlastností takového plynu pomocí řešení pohybových rovnic jednotlivých molekul jistě povede k nezdaru. Nejenže nejsme schopni je řešit (vzpomeňte si, s jakými problémy se potýkáme už při řešení jednoduchých mechanických úloh typu obíhání planety kolem Slunce). I kdybychom je byli schopni řešit, neznali bychom počáteční podmínky, to jest polohy a rychlosti všech částic. Ty bychom museli změřit, ale tím bychom jednak narušili stav systému a jednak by nám měření zabralo nějaký čas (takže by se nejednalo o počáteční podmínky). Nicméně my musíme vědět, jak vypadá soustava teď, když chceme činit závěry, kterak bude vypadat za minutu. Nakonec to nejdůležitější. Informace o trajektoriích všech částic by pro nás byla naprosto nepoužitelná – je to příliš mnoho informace, zajímá-li nás například otázka, kolik plynu máme nahustit do pneumatik, aby unesly nákladák.

Proto k řešení přistoupíme tak, že budeme uvažovat střední hodnoty pro nás zajímavých makroskopických veličin (například tlaku, teploty, objemu apod.) a zkoumat, jaké vztahy pro ně můžeme dostat z mikroskopických rovnic. Zjistíme, že některé výsledky na konkrétním tvaru pohybových rovnic závisí, zatímco jiná důležitá tvrzení mají obecný charakter, určený pouze statistickou povahou soustavy. K řešení pohybových rovnic se takto vůbec nedostaneme. Tento přístup je ovšem podmíněn dostatečně velkým počtem částic ve studovaném systému; s rostoucím počtem částic do pozadí ustupují původní zákony pohybu a vynořují se zákonitosti nové, statistické.

V tomto seriálu máme málo místa na podrobný a úplný výklad *statistické fyziky*, navíc předpokládáme pouze nevelké předběžné znalosti čtenářů. Pokud někoho látka zaujme, může se zkusit podívat do některé z učebnic. Témata, o kterých budou pojednávat příští díly seriálu, můžete ovlivňovat i vy. Svá přání (a stížnosti) posílejte na adresu serial@fykos.mff.cuni.cz.

Kapitola 1: Pravděpodobnost

Především si hned na začátku připomeneme pojem pravděpodobnost. Mějme nějaký děj, který může vyústit do několika různých situací. A priori předpokládejme, že všechny situace mají stejné šance být výsledkem děje. Potom pravděpodobností nějakého jevu se rozumí podíl počtu situací, kdy jev nastane, ku počtu všech situací. Příkladem může být házečí kostka. Děj je v tomto případě házení, koncovým stavem je padnutí 1, 2, ..., 5 nebo 6, přičemž šance padnutí každého čísla je díky pravidelnosti kostky evidentně stejná. Jevem může být například padnutí sudého čísla. Je vidět, že pravděpodobnost sudého výsledku je stejná jako lichého výsledku. Pravděpodobnost existence výsledku je $100\% = 1$. Proto pravděpodobnost sudého je $50\% = 1/2$.

V kontextu fyzikálního systému je situace složitější. Problém spočívá v tom, že existují dvě rozumné definice pravděpodobnosti. Podstatu si objasníme na příkladu plynu v nádobě. Bude nás zajímat pravděpodobnost jevu, kdy v pravé půlce nádoby bude dvakrát více částic než v levé půlce. Jedna definice říká: Vezmi nádobu a nějakou dlouhou dobu sleduj počty částic v obou polovinách nádoby. Zjisti, po jaký čas z této doby byla splněna podmínka. Pravděpodobnost jevu je potom poměr tohoto času ku celkové době pozorování. Tato definice je zřejmě úplně přirozená; její chybou je její značně problematický výpočet – musíme totiž znát časový vývoj plynu v krabici, tedy vlastně řešit pohybovou rovnici, od čehož jsme výše upustili. Pro účely výpočtů se hodí následující definice. Mějme veliké množství stejných nádob, které jsou i jinak makroskopicky stejné (tzn. mají stejnou teplotu, tlak atd.). Podívej se, v kolika z nich je právě teď splněna podmínka. Pravděpodobnost jevu vypočítej jako poměr tohoto čísla ku celkovému počtu nádob. Předpoklad (učiněný Maxwellem), že jsou tyto definice ekvivalentní (tzv. ergodická hypotéza), se ukázal jako nesprávný. V našich úvahách bude nadále vystupovat sice „méně správná“, zato však užitečnější definice druhá.

Dále si uvědomme několik vlastností zavedeného pojmu. Je-li pravděpodobnost jevu A rovna p , pak pravděpodobnost nenastání jevu A je $1 - p$. Mějme dva jevy A a B, které se navzájem vylučují (například jevy „vpravo je stejně částic jako vlevo“ a „vpravo je třetina počtu částic vlevo“). Potom pravděpodobnost, že nastane jev A nebo B je dána součtem pravděpodobností jevu A a B (neboť výsledek příznivý pro A je zároveň nepříznivý pro B a naopak). Nechť nyní jevy A a B jsou jevy, které na sobě nijak nezávisí (např. A jest „částice č. 1 je vlevo“ a B „částice č. 10 je vpravo“). Potom pravděpodobnost výsledku příznivého jak pro A, tak i pro B, je rovna součinu pravděpodobností jevů A a B.

Nakonec ještě zavedeme několik užitečných matematických pojmů, které se nám v dalších pokračováních budou hodit. Jednak je to pojem faktoriálu. Faktoriálem z n , jež značíme $n!$, rozumíme součin přirozených čísel od 1 do n . Je to počet všech možných uspořádání n různých předmětů. To lze nahlédnout takto. První předmět můžeme vybrat (z n předmětů) n způsoby, druhé místo lze pak zaplnit libovolným ze zbývajících $n - 1$ předmětů, třetí nějakým ze zbývajících $n - 2$ předmětů atd. Celkem to dává $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ možných výběrů. Zajímá-li nás počet možností, kterak vybrat m předmětů z $n > m$ předmětů, přičemž nám záleží na pořadí, můžeme postupovat úplně stejně jako u faktoriálu. První předmět můžeme vybrat n způsoby, druhý $n - 1$ způsoby, ..., až m -tý můžeme vybrat $n - m + 1$ způsoby, celkem tedy máme

k dispozici

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1) = \frac{n!}{(n - m)!}$$

možností. Je-li nyní potřeba vybrat m -tice předmětů nezávisle na pořadí předmětů v m -ticích, získáme počet možností tak, že si uvědomíme, že každý takový výběr je započítán $m!$ krát v počtu výběrů, kde záleží na uspořádání. Skutečně, počet uspořádání m předmětů je $m!$ a každé uspořádání dané m -tice je právě jednou započítáno ve vzorci výše. K určení hledaného počtu pak stačí vzorec výše vydělit $m!$. Počet různých m -tic z n předmětů se nazývá kombinační číslo a rovná se

$$\frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - m + 1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n - m)!} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{m}.$$

Úloha I. S ... pravděpodobnost

- Z 36 karet se náhodně vyberou tři karty. Zjistěte pravděpodobnosti jevů, že mezi vybranými kartami bude právě jedno eso, alespoň jedno eso, ani jedno eso.
- N stejných částic se nachází v nádobě. Určete pravděpodobnost, že v levé půlce bude o m částic více než v pravé půlce. Nakreslete graf závislosti pro $N = 10^{10}$. Rozsah m volte tak, aby pravděpodobnost na krajích intervalu byla desetinná oproti středu intervalu. Jak závisí šířka křivky (tj. rozdíl $m_2 - m_1$, kde $m_2 > 0$ a $m_1 < 0$ jsou hodnoty m , pro které je pravděpodobnost poloviční oproti maximu) na N ?
- Odhadněte velikost $\ln(n!)$ (bez použití Stirlingova vzorce).



Akce FYKOSu

Zájezd do CERNu

Pozor! Letošní ročník bude výjimečný. FYKOS plánuje mimořádný zájezd do největšího světového výzkumného centra částicové fyziky CERN. Laboratoře částicové fyziky se nachází u Ženevy poblíž švýcarsko-francouzských hranic.

Možnost zúčastnit se budou mít ti úspěšnější řešitelé FYKOSu. Součástí zájezdu bude návštěva i jiných zajímavých míst (muzea, jaderné elektrárny, ...).

Soustředění

FYKOS pořádá dvakrát do roka, na jaře a na podzim, soustředění. Tato týdenní akce je určena pro přibližně 30 nejlepších řešitelů, které vybereme ze všech kategorií, a probíhá v nějakém krásném koutu naší vlasti. Účastníci soustředění prožijí několik dní plných atraktivních přednášek a experimentů z fyziky, a aby intelektuální zátěž nebyla příliš vysoká, odpočinou si všichni (řešitelé i organizátoři) při hrách a sportu.

Na podzimní soustředění vybíráme řešitele podle výsledků za minulý ročník, na jarní soustředění se dostanou ti nejlepší podle aktuálního pořadí třetí či čtvrté série. Podzimní soustředění je také vhodnou příležitostí pro předání cen vítězům.

Jsou to právě soustředění, na která účastníci i organizátoři po letech nejvíce vzpomínají. Až na jízdné je vše hrazeno z prostředků FYKOSu.

Den s experimentální fyzikou

Jednou do roka pořádá FYKOS celodenní sérii exkurzí po fyzikálních pracovištích Univerzity Karlovy či Akademie věd ČR. Jedná se především o pracoviště, která se aktivně podílejí na celosvětovém fyzikálním výzkumu. Právě během této akce si řešitelé mohou udělat jasnější představu o tom, co dnes znamená stát se fyzikem.

Také DSEF sleduje nejmodernější trendy ve fyzice, v dnešní době reprezentované slovy „nano“, „multi“, „kvantový“ či „nukleární“. Proto jsou letos v plánu mj. návštěva nano a femtosekundového laseru a elektronového mikroskopu na MFF UK. DSEF bychom chtěli zakončit exkurzemi na několik pracovišť Ústavu jaderného výzkumu v Praze-Řeži, zejména k největšímu českému experimentálnímu reaktoru.

Fyzikální korespondenční seminář MFF UK



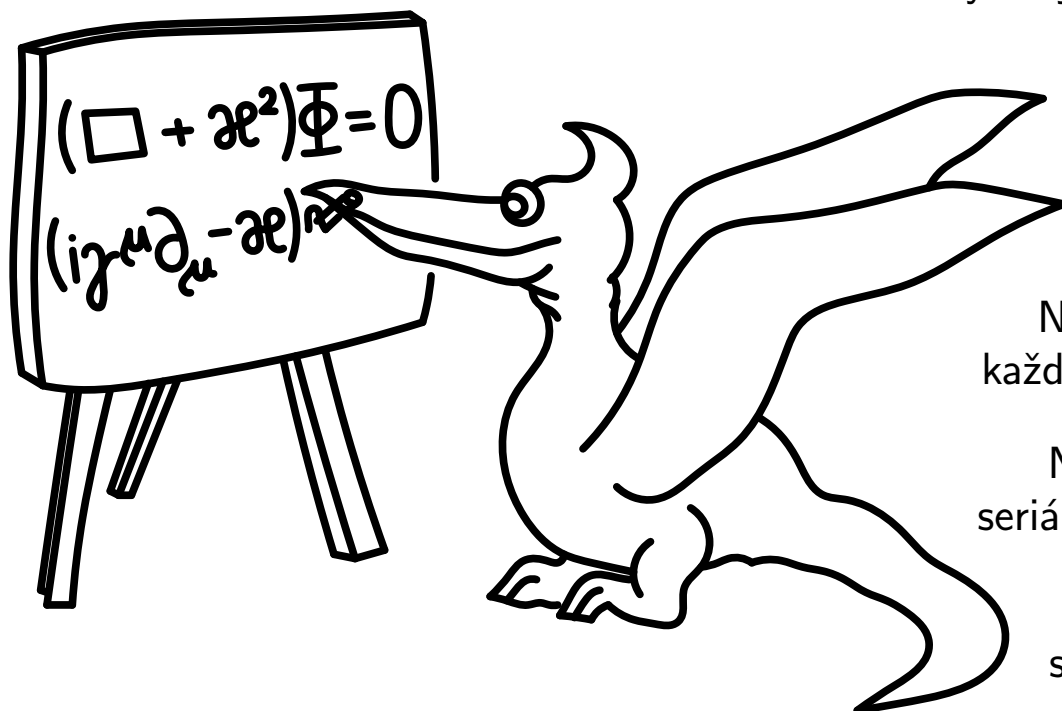
FYKOS

jedinečný 19. ročník

Zajímavé fyzikální úlohy a problémy, snadné i obtížné

Dvě týdenní soustředění pro úspěšné řešitele

Exkurze do českých fyzikálních laboratoří



Atraktivní ceny

Neobyčejné zpestření
každodenní školní výuky

Napínavý sedmidílný
seriál o statistické fyzice

FYKOS je seminář
s mezinárodní účastí

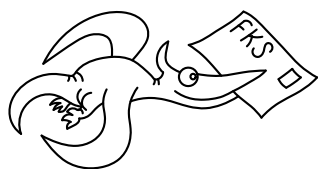
Přímý kontakt
s univerzitním prostředím

Zahraníční zájezd do CERNu ve Švýcarsku

Oslavte Světový rok fyziky 2005 řešením úloh FYKOSu!

<http://fykos.mff.cuni.cz>



**FYKOS****UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.