18. ročník, úloha II . S ... *Newtonovy pohybové rovnice* *(5 bodů; průměr 4,05; řešilo 20 studentů)*

a) *Napište a řešte pohybové rovnice hmotného bodu v tíhovém poli Země. Souřadnicovou soustavu orientujte tak, že osy x a y jsou vodorovné a osa z míří vzhůru. Počáteční poloha hmotného bodu je $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, h)$, počáteční rychlost je $\boldsymbol{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha)$. Soustavu spojenou se Zemí považujte za inerciální.*

b) *Muž s puškou sedí v křesle, které se otáčí kolem svislé osy s frekvencí $f = 1\,\mathrm{Hz}$. Spolu s křeslem se otáčí terč, který je k němu pevně upevněn. V jistém okamžiku muž vystřelí kulku rychlostí $v = 300\,\mathrm{km/h}$ směrem od osy otáčení přesně do středu terče. V jakém místě prorazí kulka terč? Řešte jak z pohledu neinerciální, tak z pohledu inerciální vztažné soustavy. Vzdálenost hlavně od středu terče je $l = 3\,\mathrm{m}$, odpor vzduchu zanedbejte.*

c) *Vyjádřete závislost rychlosti hmotného bodu na poloze v gravitačním poli Slunce.*

Zadali autoři seriálu Honza Prachař a Jarda Trnka.

a) Pro zadaný hmotný bod má 2. Newtonův zákon tvar

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G\,,$$

kde $\boldsymbol{F}_G = (0, 0, -mg)$ je tíhová síla. Uvažujme souřadnicovou soustavu popsanou v zadání úlohy, v ní máme tři rovnice pro každou kartézskou souřadnici zrychlení

$$ma_x = 0\,,\quad ma_y = 0\,,\quad ma_z = -mg\,, \tag{1}$$

ze kterých přímo dostáváme zrychlení hmotného bodu

$$\boldsymbol{a} = (0, 0, -g)\,.$$

Rychlost hmotného bodu získáme integrací rovnic (1) podle času (každou nejprve vydělíme m)

$$v_x(t) = C_x\,,\quad v_y(t) = C_y\,,\quad v_z(t) = C_z - gt\,,$$

kde C_x, C_y a C_z jsou integrační konstanty, které určíme z počáteční podmínky $\boldsymbol{v}(0) = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha)$

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha\,,\quad v_y(t) = 0\,,\quad v_z(t) = v_0 \sin\alpha - gt\,.$$

Zbývá určit, jak závisí na čase poloha hmotného bodu, budeme proto integrovat podle času poslední tři vztahy pro složky rychlosti

$$x(t) = D_x + v_0 t \cos\alpha\,,\quad y(t) = D_y\,,\quad z(t) = D_z + v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2\,,$$

kde D_x, D_y a D_z jsou integrační konstanty, jež určíme z druhé počáteční podmínky $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, h)$

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha\,,\quad y(t) = 0\,,\quad z(t) = h + v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2\,.$$

Tím máme pohybové rovnice vyřešeny, dostali jsme rovnice šikmého vrhu, jak jsme očekávali podle počátečních podmínek.

b) Úlohu vyřešíme nejprve z pohledu inerciální vztažné soustavy spojené se Zemí. Vzdálenost hlavně pušky od osy otáčení označíme d. Zaveďme si následující souřadnicovou soustavu. Počátek je v ose otáčení na úrovni pušky, osa x míří ve směru puška-terč, osa z míří vzhůru a osa y je na obě kolmá (viz obr. 1). V této soustavě má kulka počáteční rychlost a polohu

$$\boldsymbol{v}_0 = (v, \omega d, 0)\,, \quad \boldsymbol{r}_0 = (d, 0, 0)\,.$$

Analogicky jako v úloze a) určíme, jak závisí poloha kulky na čase

$$x(t) = d + vt\,, \quad y(t) = \omega dt\,, \quad z(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,.$$

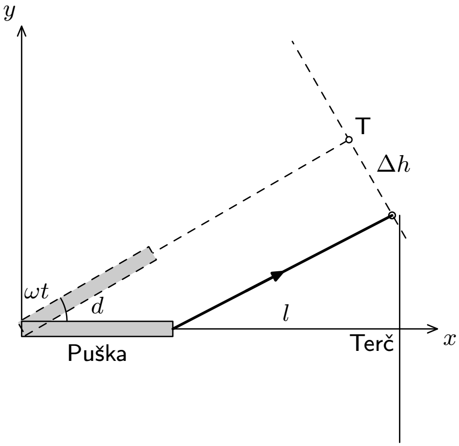
Nyní určíme čas t_1, ve kterém kulka prorazí terč. Víme, že se terč otáčí s úhlovou rychlostí ω, poloha jeho středu T v naší souřadnicové soustavě je (viz obr. 1)

$$\mathsf{T}_x = (d + l)\cos\omega t\,, \quad \mathsf{T}_y = (d + l)\sin\omega t\,.$$

Analyticky popíšeme přímku, která splývá s terčem v rovině xy. Vektor kolmý na přímku má tvar $\boldsymbol{n} = (\cos\omega t, \sin\omega t)$, rovnice přímky proto je

$$\cos\omega t \cdot x + \sin\omega t \cdot y = d + l\,,$$

kde pravou stranu rovnice jsme zvolili tak, aby přímka procházela bodem T. Do této rovnice dosadíme polohu kulky a získáme



Obr. 1

$$(d + vt)\cos\omega t + \omega dt\sin\omega t = d + l\,. \tag{2}$$

Tato rovnice bude splněna v okamžiku, kdy kulka prorazí terč, bohužel ji však nelze řešit analyticky. Vzhledem k vzdálenosti terče od hlavně a rychlosti kulky i rotace je ωt malé, potom s dostatečnou přesností platí $\sin\omega t \approx \omega t$ a $\cos\omega t \approx 1$. Rovnice (2) se potom zjednoduší na tvar

$$\omega^2 d \cdot t^2 + vt - l = 0\,, \tag{3}$$

což je kvadratická rovnice pro t a má jediné kladné řešení

$$t_1 = \frac{v}{2\omega^2 d}\left(-1 + \sqrt{1 + 4ld\,\frac{\omega^2}{v^2}}\right) \approx \frac{v}{2\omega^2 d}\left(-1 + 1 + 2ld\,\frac{\omega^2}{v^2}\right) = \frac{l}{v}\,.$$

V předchozím výpočtu jsme použili přibližný vztah $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$, který platí pro malá x.

Zbývá určit, v jakém místě prorazí kulka terč. Vodorovnou vzdálenost od středu terče označme Δh a svislou Δs. Vzdálenost Δh je rovna vzdálenosti polohy kulky a středu terče v čase t_1 (opět použijeme přibližné vztahy $\sin\omega t \approx \omega t$ a $\cos\omega t \approx 1$)

$$\begin{aligned}\Delta h^2 &= (x(t_1) - \mathsf{T}_x(t_1))^2 + (y(t_1) - \mathsf{T}_y(t_1))^2 = \\ &= (d + l - (d + l))^2 + \left(\frac{\omega dl}{v} - \frac{(d + l)\omega l}{v}\right)^2 = \left(\frac{\omega l^2}{v}\right)^2,\end{aligned} \tag{4}$$

přičemž kulka prorazí terč napravo od středu. Svislá vzdálenost je dána volným pádem kulky po dobu t_1 a je rovna souřadnici z v čase t_1

$$\Delta s = -z(t_1) = \frac{gl^2}{2v^2} \,. \tag{5}$$

Po dosazení zadaných hodnot vychází $\Delta h = 68\,\mathrm{cm}$ a $\Delta s = 6{,}4\,\mathrm{mm}$.

Vyřešme nyní úlohu z pohledu neinerciální soustavy spojené s rotujícím křeslem. Souřadnicovou soustavu si zvolíme stejným způsobem jako minule, ale tentokrát bude navíc rotovat úhlovou rychlostí ω. V této soustavě má kulka počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0 = (v, 0, 0)$ a polohu $\boldsymbol{r}'_0 = (d, 0, 0)$. Pohybová rovnice kulky je

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \,,$$

Eulerova a translační síla je nulová. Pohybovou rovnici si přepíšeme na tři rovnice pro souřadnice

$$\begin{aligned} \ddot{x}' &= \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' \,, \\ \ddot{y}' &= \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}' \,, \\ \ddot{z}' &= -g \,. \end{aligned}$$

Třetí rovnici snadno dvakrát zintegrujeme

$$z' = -\frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Do soustavy prvních dvou rovnic zkusíme dosadit řešení ve tvaru (s ohledem na počáteční polohu)

$$\begin{aligned} x'(t) &= d \cos \omega t + A \sin \omega t + B_1 t \cos \omega t + B_2 t \sin \omega t \,, \\ y'(t) &= C \sin \omega t + D_1 t \cos \omega t + D_2 t \sin \omega t \,, \end{aligned}$$

pro neznámé konstanty dostaneme $A = 0$, $C = -d$, $B_1 = -D_2$, $B_2 = D_1$. Aby byla splněna počáteční podmínka pro rychlost kulky, musí navíc platit $B_1 = v$ a $B_2 = \omega d$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} x'(t) &= (d + vt) \cos \omega t + \omega d t \sin \omega t \approx d + vt + \omega^2 d t^2 \,, \\ y'(t) &= -(d + vt) \sin \omega t + \omega d t \cos \omega t \approx -v \omega t^2 \,. \end{aligned}$$

Kulka prorazí terč v okamžiku, kdy $x' = d + l$, a dostáváme stejnou rovnici jako (2), resp. (3). Z ní jsme vypočítali, že kulka prorazí terč v čase $t_1 = l/v$. Počítejme nyní $y'(t_1)$

$$y'(t_1) = -v \omega t_1^2 = -\frac{\omega l^2}{v} \,,$$

což je zřejmě vodorovná vzdálenost středu terče a místa, kde kulka prorazila terč, a shoduje se s výsledkem (4). Svislá vzdálenost je rovna $z'(t_1)$, ovšem platí $z(t_1) = z'(t_1)$ a dostáváme výsledek (5).

c) Pro vyjádření vztahu mezi rychlostí a polohou hmotného bodu v gravitačním poli Slunce s výhodou využijeme integrál pohybu – mechanickou energii. Kinetická a potenciální energie hmotného bodu je

$$T = \frac{1}{2}mv^2\,, \quad V = -\frac{\varkappa m M_\mathrm{S}}{r}\,,$$

kde M_S je hmotnost Slunce a r vzdálenost od Slunce. Veličina $E = T + V$ se zachovává, platí tedy

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\varkappa m M_\mathrm{S}}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2\left(\frac{E}{m} + \frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{r}\right)}\,,$$

což je hledaná závislost.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz