

18. ročník, úloha III. S ... Lagrangeovy rovnice 1. druhu (5 bodů; průměr 3,92; řešilo 12 studentů)

- a) Mějme hmotný bod zavěšený na nehmotném a nepružném vlákne. Zaveďte kartézskou souřadnicovou soustavu a v ní napište vazebnou podmínku pro hmotný bod.
 b) Napište Lagrangeovy rovnice 1. druhu pro hmotný bod z části a). Ukažte, že z nich plyne pohybová rovnice matematického kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

kde φ je úhlová výchylka z rovnovážné polohy.

- c) Malé těleso je v klidu na vrcholu polokoule a začne klouzat dolů. Pomocí Lagrangeových rovnic 1. druhu určete, v jaké výšce se těleso odlepí od polokoule. (Nápověda: Těleso se odlepí v okamžiku, kdy $\lambda = 0$.)

Zadali autoři seriálu Honza Prachař a Jarda Trnka.

- a) Souřadnicovou soustavu zavedeme následujícím způsobem (viz obr. 1). Počátek zvolíme v místě závěsu, osu x orientujeme vodorovně doprava, osu y svisle vzhůru.

Hmotný bod se zřejmě pohybuje po kružnici se středem v počátku soustavy souřadnicové o poloměru l , kde l je délka závěsu. Stačí nám tedy napsat odpovídající rovnici kružnice

$$f = x^2 + y^2 - l^2 = 0,$$

což je vazebná podmínka hmotného bodu.

- b) Přistupme nyní k sestavení Lagrangeovy rovnice 1. druhu. Na hmotný bod působí kromě vazebné síly ještě síla tíhová $\mathbf{F}_G = (0, -mg)$. Dle seriálu má pohybová rovnice pro x -ovou souřadnici tvar

$$m\ddot{x} = 0 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2\lambda x,$$

obdobně pro y -ovou souřadnici

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -mg + 2\lambda y.$$

Abychom vyloučili neznámou funkci λ , první rovnici vynásobíme y a odečteme od ní x -násobek druhé,

$$m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) = mgx. \quad (2)$$

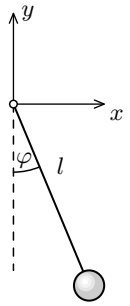
Tuto rovnici nyní přepíšeme pomocí parametrů l a φ , abychom dostali rovnici (1).

Vztah mezi x , y a výchylkou z rovnovážné polohy φ je (viz obr. 1)

$$x = l \sin \varphi, \quad y = -l \cos \varphi, \quad (3)$$

tyto vztahy dvakrát derivujeme podle času

$$\ddot{x} = -l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \ddot{\varphi}, \quad \ddot{y} = l \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l \sin \varphi \ddot{\varphi}. \quad (4)$$



Obr. 1

Dosaďme nyní z (3) a (4) do rovnice (2), dostáváme

$$l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - l^2 \cos^2 \varphi \ddot{\varphi} - l^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - l^2 \sin^2 \varphi \ddot{\varphi} = gl \sin \varphi, \\ -l\ddot{\varphi} = g \sin \varphi,$$

což je rovnice matematického kyvadla ze zadání.

- c) Poloměr polokoule označme R a souřadnicovou soustavu zvolme stejnou jako v části a). Jeli-
kož tělísko klouže po polokouli, vazebná podmínka bude $f = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Lagrangeovy
rovnice 1. druhu budou shodné s těmi, které jsme odvodili v části b),

$$m\ddot{x} = 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y.$$

Teď provedeme malý trik. První rovnici vynásobíme x , druhou y a sečteme je

$$m(\ddot{x}x + \ddot{y}y) = -mgy + 2\lambda(x^2 + y^2). \quad (5)$$

Dvakrát zderivujeme vazebnou podmínku

$$\frac{df}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + 2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} = 0. \quad (6)$$

Nyní si stačí uvědomit, že $R^2 = x^2 + y^2$ a pro rychlost platí $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, potom z rovnic (5)
a (6) dostaneme

$$-mv^2 = -mgy + 2\lambda R^2.$$

Abychom si ušetřili integrování pohybových rovnic, použijeme rovnou zákon zachování
energie $mv^2/2 + mgy = mgR$, který spolu s poslední rovnicí dává

$$2mg(y - R) = -mgy + 2\lambda R^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}R + \frac{2\lambda R^2}{3mg}.$$

Nás zajímá poloha tělíska v okamžiku, kdy $\lambda = 0$ (právě tehdy se odlepi od polokoule).
Výška tělesa v tomto okamžiku bude $y = 2R/3$.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz