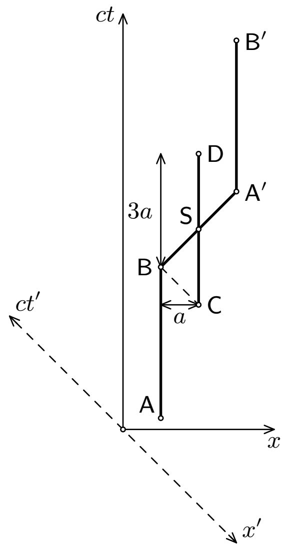
18. ročník, úloha VI . 4 ... *nezastavitelný chodec* *(5 bodů; průměr 3,00; řešilo 12 studentů)*

Vraťte se na chvíli do Atén na loňské olympijské hry a určete, jaká je teoretická maximální rychlost chodce. Chodec nebude diskvalifikován, pokud se každý rozhodčí (pozorovatel) shodne na tom, že alespoň jedna noha chodce stojí v každém okamžiku na zemi.

Vymyslel kdo jiný než Matouš Ringel.

Pokusme se nejdříve úlohu řešit klasicky, pouze s uvažováním konečné rychlosti šíření světla. Nechť je levá noha v místě o souřadnici 0 a pravá noha právě došlápla do místa vzdáleného a. Chodec bude moci levou nohu zvednout až ve chvíli, kdy světelný paprsek z místa o souřadnici a dorazí k levé noze, protože jinak by například rozhodčí stojící za ním uviděl zvednutí levé nohy dříve než dopad pravé. Označme tento interval $t_0 = a/c$. Levá noha se bude pohybovat nejvýše světelnou rychlostí, a to po dobu $2t_0$. Těžiště chodce se přesune o vzdálenost a za celkový čas $3t_0$, při uvažování pouze tohoto klasického jevu by byla jeho maximální možná rychlost $c/3$.

Znázorněme nyní situaci v prostoročasovém diagramu (viz obr. 1). Na vodorovnou osu vynášíme souřadnici x, na svislou osu ct v soustavě S spojené se zemí. V tomto diagramu je světočára světelného paprsku $x = ct$ přímka, která s osami svírá úhel 45°. Vypočítejme, jak v tomto diagramu budou umístěny souřadnicové osy soustavy S', která se vůči S pohybuje rychlostí v (ve směru osy x).



Obr. 1

Napišme si známé vztahy pro Lorentzovu transformaci (tu používáme při přechodech mezi inerciálními systémy speciální teorie relativity)

$$x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}ct\right), \quad ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right),$$

kde $\gamma = \sqrt{1/(1 - v^2/c^2)}$ je Lorentzův faktor. Osa ct' je dána rovnicí $x' = 0$, ze které dostáváme

$$ct' : \quad ct = \frac{c}{v}x,$$

osa x' je dána rovnicí $ct' = 0$, odkud

$$x' : \quad ct = \frac{v}{c}x.$$

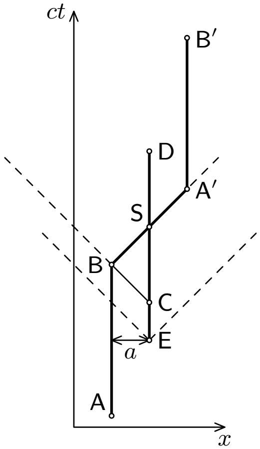
První pozorování je, že osy se sklápí. Vidíme, že směrnice přímek, které udávají osy soustavy S', jsou navzájem převrácené. To znamená, že svírá-li osa x' s osou x úhel φ (tj. $\operatorname{tg}\varphi = v/c$), potom stejný úhel svírá osa ct' s osou ct.

Připomeneme si důležité pozorování. Události umístěné na přímce rovnoběžné s osou x jsou v soustavě S současné. Analogicky události umístěné na přímce rovnoběžné s osou x', jsou současné v soustavě S'. Jelikož se osy sklápí, je současnost událostí relativní.

Uvažujme extrémní případ, kdy rozhodčí se pohybuje rychlostí $-c$ vůči soustavě S. Jeho klidovou soustavu označíme S'. Směrnice os x' a ct' jsou podle výše odvozených vztahů rovny -1, budou tedy s osami x a ct svírat úhel $-45°$ (viz obr. 1). Jak ukážeme dále, na tohoto rozhodčího si bude muset chodec dávat největší pozor.

Délku kroku označme $2a$. Světočára levé nohy je $\mathsf{ABA'B'}$ (události A a $\mathsf{A'}$ představují položení nohy, události B a $\mathsf{B'}$ představují zvednutí nohy), část světočáry pravé nohy je úsečka CD. Události B a C musí být vůči sobě postavené tak, aby událost C předcházela události B ve všech inerciálních soustavách (tj. aby všichni rozhodčí viděli, že nejprve se dotkne země pravá noha a pak se teprve zvedne levá noha). To zajistíme tak, že události budou současné v soustavě S' (kterou jsme definovali výše), tj. události B a C budou ležet na rovnoběžce s osou x'. Jak si snadno rozmyslíte, v ostatních soustavách potom bude pořadí událostí náležité.

Levá noha se pohybuje nejvýše světelnou rychlostí, proto je úsečka $\mathsf{BA'}$ světelnou světočárou (přímka $\mathsf{BA'}$ svírá se souřadnicovými osami úhel $45°$). Při symetrickém pohybu protíná spojnice $\mathsf{BA'}$ úsečku CD v jejím středu S. Přímka $\mathsf{BA'}$ je kolmá ke přímce BC, je-li vzdálenost přímek AB a CD rovna a, bude délka úsečky CS rovna $2a$, délka celé úsečky CD je $4a$. Uražení vzdálenosti a na prostorové ose trvá chodci $3a/c$. Rychlost chodce při neuvažování konečného šíření signálu vychází $c/3$.



Obr. 2

Uvažujme kombinaci výše popsaných jevů. Prostoročasový diagram je na obrázku 2. Předpokládejme, že zvednutí pravé nohy nastane dříve – již v bodě E. Do diagramu jsme přerušovanou čárou zakreslili světelné světočáry, které „nesou“ informaci o proběhlých událostech E a B. Požadujeme, aby se každý rozhodčí dozvěděl nejdříve o události E a až poté o události B. Rozhodčího do diagram zakreslíme jako prostorupodobnou světočáru (tj. nikdy se nepohybuje rychleji než c). Snadno si rozmyslíme, že každý rozhodčí se dozví o událostech E a B v náležitém pořadí (okamžik, kdy se rozhodčí o úádalosti dozví, je určen průsečíkem světočáry rozhodčího a příslušné světelné světočáry), dokonce událost E může být identická s událostí C. Maximální rychlost tedy zůstává $c/3$.

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz