18. ročník, úloha VI . S ... *Hamiltonův formalismus* *(5 bodů; průměr 4,46; řešilo 13 studentů)*

Langrangián částice v elektromagnetickém poli je

$$L = \tfrac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}m\cdot\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^2 - q\varphi + q\cdot\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_iA_i\,, \qquad (1)$$

kde φ je elektrický potenciál a $\boldsymbol{A}$ magnetický vektorový potenciál.

a) Určete zobecněné hybnosti částice p_i příslušející rychlostem $\dot{x}_i$.
b) Napište Hamiltonovu funkci (v souřadnicích (x_i, p_i)!).
c) Řešte Hamiltonovy rovnice, je-li $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ a $\varphi = -Ex_1$.

Zadal Honza Prachař podle cvičení z teoretické mechaniky doc. Podolského.

Řešení této úlohy bude přímočaré, stačí se držet postupu, který jsme naznačili v minulém díle seriálu (jen je třeba si dát pozor, že q je náboj částice, nikoli zobecněná souřadnice).

a) Zobecněné hybnosti určíme přímo z definice

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + qA_j\,, \qquad (2)$$

odtud inverzí vztahu vyjádříme $\dot{x}_j$

$$\dot{x}_j = \frac{1}{m}(p_j - qA_j)\,. \qquad (3)$$

Poslední vztah ještě přepíšeme do vektorové podoby

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\,.$$

b) Lagrangián (1) a zobecněnou hybnost (2) dosadíme do definice Hamiltonovy funkce

$$H(x_j, p_j) = \sum_{i=1}^{3} p_i\dot{x}_i - L = \frac{1}{2}m\cdot\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^2 + q\varphi\,.$$

Poslední vztah ovšem ještě není vyjádření hamiltoniánu, musíme přejít k souřadnicím (x_j, p_j). K tomu využijeme vztah (3) a dostaneme

$$H(x_j, p_j) = \frac{1}{2m}\cdot\sum_{i=1}^{3}(p_i - qA_i)^2 + q\varphi\,,$$

v úspornější vektorové podobě má hamiltonián tvar

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2}{2m} + q\varphi\,.$$

c) Pro zadaný potenciál hamiltonián je (místo (x_1, x_2, x_3) budeme od teď používat (x, y, z))

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - qEx = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - qEx\,.$$

Se znalostí Hamiltonovy funkce už jen zbývá vyřešit Hamiltonovy rovnice. Napišme si první sadu Hamiltonových rovnic $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = qE\,, \quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

které mají řešení

$$p_x = qEt + p_{x0}\,, \quad p_y = p_{y0}\,, \quad p_z = p_{z0}\,, \tag{4}$$

kde p_{x0}, p_{y0} a p_{z0} jsou počáteční hybnosti částice. Do druhé sady Hamiltonových rovnic $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p_x}{m}\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{p_y}{m}\,, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{p_z}{m}$$

dosadíme z (4)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p_{x0}}{m} + \frac{qE}{m}\,t\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{p_{y0}}{m}\,, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{p_{z0}}{m}$$

a soustavu vyřešíme

$$x = x_0 + \frac{p_{x0}}{m}\,t + \frac{qE}{2m}\,t^2\,, \quad y = y_0 + \frac{p_{y0}}{m}\,t\,, \quad z = z_0 + \frac{p_{z0}}{m}\,t\,,$$

kde x_0, y_0 a z_0 je počáteční poloha částice.

Částice se tedy bude podle očekávání ve směru os y a z pohybovat rovnoměrně přímočaře a ve směru osy x bude zrychlovat se zrychlením o velikosti $a = qE/m$.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz