

Milí řešitelé!

Nový (již devatenáctý) ročník FYKOSu teprve začíná a chtěli bychom dát příležitost všem studentům ještě se zapojit do řešení našeho semináře. **Chceš zamyslet nad fyzikálními úlohami a problémy či tě lákají dvě týdenní soustředění a zájezd do CERNu, které pořádáme pro úspěšné řešitele? Pošli nám řešení alespoň jedné úlohy druhé série!**

Novým řešitelům bychom chtěli vzkázat, ať se nelekaří toho, že v zadání úloh se často neobjeví ani jediná zadaná veličina, narozdíl od středoškolských učebnic, kde bývají zadané právě všechny potřebné hodnoty. V našem semináři se více chceme přiblížit skutečné fyzice a ne pouhému dosazování do vzorečků.

Pokud je ve vašem okolí stále někdo, koho fyzika baví, ale o našem semináři neví nebo si myslí, že FYKOS není pro něj, neboť ho řeší jenom vítězové celostátního kola olympiády, vysvětlete mu prosím, že to není pravda.

Ať už uvažuješ o studiu na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy nebo ne, přijď nás navštívit na Dnu otevřených dveří, který se koná v úterý 29. listopadu (bližší informace na <http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod/>). Potkáš se s organizátory i účastníky FYKOSu, na odpoledne připravujeme krátkou prezentaci. Pro všechny máme malý dárek. **Každému, kdo nám na Den otevřených dveří přinese vyřešenou úlohu druhé série, darujeme jednu ročenku FYKOSu zdarma.** Na místě bude k dostání i ročenka 18. ročníku, která se právě tiskne.

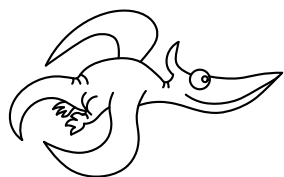
Připomeňme na závěr několik organizačních záležitostí.

Řešení úloh 1. série s průběžnou výsledkovou listinou dostanete se zadáním 3. série během prosince. Každému, kdo nám pošle svůj e-mail, budeme vždy poté, co nám od něj dojde řešení, posílat krátkou zprávu, ve které potvrdíme, že řešení skutečně došlo. Klasická pošta bývá nespolehlivá a tímto způsobem předejdeme nepříjemným překvapením. Svá řešení můžete samozřejmě celá posílat e-mailem na adresu fykos-solutions@mff.cuni.cz.

Aktuální dění v semináři sledujte na našich [www stránkách http://fykos.mff.cuni.cz](http://fykos.mff.cuni.cz). Naleznete tam zadání a řešení úloh, aktuální pořadí, **diskusní fórum** a mnoho dalších věcí.

Přejeme plno nápadů při řešení úloh a s těmi pilnými z vás se těšíme na viděnou na jarním soustředění.

Honza Prachař



Zadání II. série



Termín odeslání: 5. prosince 2005

Úloha II.1 ... *propiska na šňůrce*

Ve stojící tramvaji visí u svislé desky na niti délky l propiska o hmotnosti m . Tramvaj se rozjede se zrychlením a , které můžeme považovat za konstantní. Vypočítejte, kam až toto kyvadlo vykýváne (jaký maximální úhel bude nit svírat s deskou) a kdy tužka opět ťukne do desky.

Úloha II.2 ... *funicí lokomotiva*

Lokomotiva s osmi vagóny o hmotnosti 40 t se rozjíždí na dráze 1 km na rychlost 120 km/h. Jaká musí být minimální hmotnost lokomotivy tohoto vlaku, aby se vlak rozjel bez prokluzování kol na kolejnici?

Počítejte se součinitelem klidového tření $f = 0,2$. Odpor vzduchu a valivý odpor zanedbejte.

Úloha II.3 ... *spektrální analýza*

Ve spektru jisté hvězdy byla pozorována emisní čára hélia, která má běžně vlnovou délku 587,563 nm. Nebylo však vinou použitého spektroskopu, že byla rozmazána přibližně v rozmezí 587,60 nm až 587,67 nm. Pokuste se odhadnout teplotu hvězdy a její rychlost v prostoru. Čím je rozmazání spektrální čáry způsobeno?

Úloha II.4 ... *tepelná vodivost kovu*

Odvoďte jakým způsobem závisí tepelná vodivost kovu na teplotě, pokud znáte závislost jeho elektrické vodivosti na teplotě.

Pro vodivostní elektrony můžete použít model ideálního plynu, tj. elektrony se pohybují volně (přítomnost iontových zbytků vůbec neuvažujeme) a přímočaře až na občasné srážky s jinými elektrony, které změni směr i velikost jejich rychlosti.

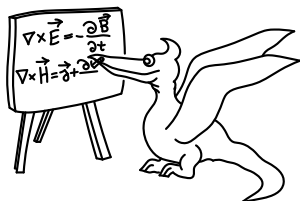
Teplo přenesené krystalovou mřížkou kovu je zanedbatelné oproti teplu přenesenému vodivostními elektrony. Každý elektron má tepelnou kapacitu c , která nezávisí na teplotě.

Úloha II.P ... *dechové nástroje*

Pokuste se vysvětlit, proč je možné příčnou flétnu „přefouknout“ o oktávu výše (tj. zahrát stejným hmatem i tón s dvojnásobnou frekvencí), zatímco u klarinetu toho dosáhnout nelze.

Úloha II.E ... *načechraná šlehačka*

Změřte tlak plynu v sifonové bombičce. Bombička je buď plněná CO_2 a prodává se pro plnění sifonu v desetikusovém balení, nebo je plněná NO_2 pro výrobu šlehačky.



Seriál na pokračování

Kapitola 2: Aparát statistické fyziky

V tomto díle seriálu si vybudujeme aparát statistické fyziky. Nebudeme to dělat podrobně a rigorózně, neboť bychom tím ztratili spoustu místa a nestačili bychom diskutovat zajímavé jevy, kvůli nimž vlastně o statistické fyzice mluvíme. Budeme pracovat v rámci kvantové teorie, a to hned ze dvou důvodů; jednak se svět řídí kvantovou a nikoliv klasickou mechanikou, jednak je kvantová statistika jednodušší. Ti, co podrobně neznají kvantovou mechaniku, se nemusí ničeho obávat, potřebné znalosti (až na jisté výjimky) vyložíme včas předtím, než je použijeme.

Zkraje uvedeme pro nás nejdůležitější princip kvantové mechaniky, totiž fakt, že v prostoru omezené systémy se mohou nacházet jen v určitých diskrétních stavech (tyto budeme nadále nazývat *mikrostavy*), které jsou charakterizovány svojí energií.¹ Pokud vezmeme nějaký systém a ponecháme-li jej dostatečně dlouho v klidu, dobere se takzvané termodynamické rovnováhy. To je stav, kdy se již nemění tzv. makroskopické veličiny, kterými jsou například teplota, tlak apod. Příkladem nám bude žhavé železo náhle ponořené do studené vody. Teploty vody i železa se budou měnit a za jistý čas dosáhnou svých rovnovážných hodnot, které se již dále (za stejných okolních podmínek) nemění. Proces ustanovování rovnováhy je složitý a je založen na interakci mezi jednotlivými částicemi systému. Částice na sebe působí různými silami (ať již elektrické, kvantové či jiné povahy), „tahají“ se, „strkají“ do sebe a tím přenáší energii v rámci systému, dokud nebude nějakým způsobem rovnoměrně rozdělena.

Boltzmannův vztah

Již v minulém díle jsme rezignovali na popis složitých systémů pomocí přímého řešení pohybových rovnic. Místo toho jsme prohlásili, že existují jiné, statistické zákonitosti. Pro jejich nalezení nám poslouží následující postulát, který je asi hlavním principem statistické fyziky. Jak jsme řekli výše, částice neustále víří v jakémsi divokém tanci. Budeme předpokládat, že pokud se systém nachází v rovnováze, pak toto víření, nárazy, chaos mohou systém přivést se stejnou pravděpodobností do libovolného dostupného mikrostavu, to jest do takového mikrostavu, jehož existence je přípustná například z hlediska zákona zachování energie. V jiné formulaci tento postulát říká, že se systém v průměru nachází stejnou dobu ve všech dostupných mikrostavech, takže pokud bychom v daný okamžik zjišťovali mikrostav, se stejnou pravděpodobností bychom dostali libovolný přípustný výsledek.² Toto tvrzení se může zdát podivné. Říkáme tím vlastně,

¹⁾ Pro znalce. Samozřejmě se jedná o značně zjednodušené tvrzení; systémy se mohou nacházet v libovolné lineární kombinaci těchto stavů, přičemž lineární kombinace stavů s různými energiemi pak nemá přesně určenou energii. Avšak v kvantové statistice se dá ukázat, že matice hustoty systému musí být v rovnováze diagonální v energetické reprezentaci. To je právě příčina, proč lze takto uvažovat.

²⁾ Jak jsme již výše varovali, všechny formulace jsou (doufáme) úmyslně nepřesné a vágní, protože přesným formulacím a podrobným zdůvodněním bychom museli věnovat mnohem více místa. Pedanti se můžou poučit v příslušné literatuře.

že je stejně pravděpodobné, že všechnu energii systému bude obsahovat jedna částice, jako že energie bude přibližně rovnoměrně rozdělená mezi všechny částice. Ale ze zkušenosti víme, jak je tomu doopravdy. Například ve vodě mají všechny molekuly většinu času přibližně stejnou energii; ty nejvíce energetické prodifundují až k povrchu a opustí kapalinu (vypaří se), ovšem je jich relativně málo vůči ostatním. Vtip spočívá v tom, že přibližně rovnoměrné rozdělení energie je možné realizovat nesrovnatelně více způsoby než nerovnoměrné rozdělení.

Výše řečené platí pro izolovaný systém, jenž má neměnnou celkovou energii. Ve skutečném světě ale neexistuje doopravdy izolovaný systém. Energie systému zavřeného v sebelepším termosce se bude trochu měnit. Když je ovšem systém velký, jsou jeho energetické hladiny naskládány velice hustě vedle sebe a i velice malá změna energie (malá na makroskopická měřítká) umožní realizaci obrovského kvanta nových stavů. Bude proto lepší přistoupit k problému z jiného úhlu.

Mějme dva systémy, jeden velký (např. bazén, vzduch v místnosti), druhý malý (např. hrníček s kávou). Předpokládejme, že celková energie E_0 obou systémů (dohromady) se mění velice málo, a to přibližně v intervalu $E_0 \pm \Delta$. Necháme-li tyto dva systémy dostatečně dlouho interagovat, dosáhne se stavu rovnováhy, kdy všechny dostupné mikrostavy budou stejně pravděpodobné. Zkoumejme, jaká je pravděpodobnost $P(E_m)$, že malý systém bude v daném mikrostavu s energií E_m .

Tuto pravděpodobnost najdeme oklikou, totiž přes poměr $P(E_m)/P(E_n)$ pravděpodobností nacházet se v konkrétních mikrostavech s energiemi E_m a E_n . Když budeme znát tento poměr pro dané n a všechna m , můžeme z podmínky jednotkové celkové pravděpodobnosti (tj. že systém se bude určitě nacházet v některém mikrostavu)

$$1 = \sum_m P(E_m)$$

určit správný koeficient úměrnosti.

Označme si $\eta(E)$ počet mikrostavů velkého systému (tepelného rezervoáru, termostatu), které mají energii v intervalu $E \pm \Delta$. Jestliže malý systém má být v mikrostavu s energií E_m , musí mít termostat energii v intervalu $E_0 - E_m \pm \Delta$.³ Pravděpodobnost $P(E_m)$ pak bude podle hlavního principu statistické fyziky úměrná počtu $\eta(E_0 - E_m)$ mikrostavů termostatu, které jsou energeticky přípustné (celková energie $E_m + (E_0 - E_m \pm \Delta)$ se pohybuje v dovolených mezích). Koeficient úměrnosti zatím neznáme. Už ale umíme určit výše zmíněný poměr pravděpodobností

$$\frac{P(E_m)}{P(E_n)} = \frac{\eta(E_0 - E_m)}{\eta(E_0 - E_n)} = \exp[\ln \eta(E_0 - E_m) - \ln \eta(E_0 - E_n)].$$

Jelikož je termostat veliký, je i celková energie velká vůči energii malého systému, tj. $E_0 \gg E_m$. Ukazuje se, že veličina $\beta(E)$, definovaná vztahem $\beta(E) = d \ln \eta(E) / dE$, je skoro konstantní při změnách velikosti E_m energie E . Proto můžeme logaritmy v exponenciále nahradit v prvním přiblížení diferencíálem,⁴ ve které zanedbáme členy vyššího řádu než prvního, čímž dostaneme

$$\frac{P(E_m)}{P(E_n)} = e^{-\beta(E_m - E_n)}.$$

³⁾ Předpokládáme, že termostat je natolik velký, že se v tomto intervalu nachází velmi mnoho mikrostavů.

⁴⁾ Jak známo, pro malá h platí přibližně $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$.

Položíme-li $P(E_m) = C \cdot \exp(-\beta E_m)$, z podmínky normalizace snadno určíme konstantu C

$$1 = \sum_m P(E_m) \quad \Rightarrow \quad 1 = C \cdot \sum_m e^{-\beta E_m},$$

odkud plyne ústřední (tzv. *Boltzmannův*) vzorec statistické fyziky

$$P(E_m) = \frac{e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}}.$$

Šance nacházet se v daném mikrostavu exponenciálně klesá s energií mikrostavu. K odvození vzorce budeme mít ještě dva komentáře.

Představme si izolovaný systém, jenž se nachází v rovnováze a má teplotu 10°C . Poté jej ponoříme do nádrže s vodou o stejné teplotě. Je zřejmé, že přítomnost okolní vody (termostatu) podstatně neovlivní žádné jiné vlastnosti systému kromě relativně nezajímavé fluktuace energie systému. Ačkoliv nám přítomnost termostatu pomohla při odvození, není (pokud jsme dostatečně opatrní a klademe správné otázky) pro používání Boltzmannova vzorce nutná.

Druhá poznámka se týká podsystému nějakého systému. Představme si například krystal kovu a v něm jeden určitý atom či skupinu atomů. O této skupině nyní můžeme uvažovat jako o malém systému a o krystalu, jenž obsahuje nesrovnatelně více atomů, jako o velkém systému, termostatu. Na jednotlivé atomy či jejich skupiny pak také můžeme aplikovat Boltzmannův vzorec. Konkrétním aplikacím Boltzmannova vzorce na konkrétní systémy se budeme zabývat v dalších dílech seriálu.

Význam veličiny β z Boltzmannova vztahu

Dále bychom chtěli vyjasnit význam veličiny β . Za tím účelem prozkoumáme jeho vlastnosti. Především si uvědomme, že pokud β roste, rychle se zmenšuje pravděpodobnost stavů s velkými energiemi a naopak, což je vidět z Boltzmannova vzorce. Nyní si představme si dva izolované systémy A a B s energetickými hladinami A_i a B_i , pro něž platí

$$P_A(A_i) = \frac{e^{-\beta_A A_i}}{\sum_i e^{-\beta_A A_i}} \quad \text{a} \quad P_B(B_i) = \frac{e^{-\beta_B B_i}}{\sum_i e^{-\beta_B B_i}}.$$

Potom je spojíme tak, aby si mohly vyměňovat teplo. Za nějakou dobu se dosáhne rovnováhy, kdy bude pro složený systém platit Boltzmannův vzorec, ve kterém za energetické hladiny dosadíme hladiny složeného systému $A_i + B_i$. Hodnota β složeného systému se ustálí na nějaké rovnovážné hodnotě β_R . V rovnováze pak bude pro složený systém platit Boltzmannův vzorec ve tvaru

$$P(A_i + B_j) = \frac{e^{-\beta_R(A_i+B_j)}}{\sum_{i,j} e^{-\beta_R(A_i+B_j)}} = \frac{e^{-\beta_R A_i}}{\sum_i e^{-\beta_R A_i}} \cdot \frac{e^{-\beta_R B_j}}{\sum_j e^{-\beta_R B_j}}.$$

Rozdělení pravděpodobností v systému A (který nyní předpokládáme v rovnováze se systémem B) můžeme určit snadno; neklademe žádnou podmínku na energii systému B , čili musíme sčítat přes všechny možné energie systému B . Hledané rozdělení v systému A pak vypadá následovně

$$P_A(A_i) = \sum_j P(A_i + B_j) = \frac{e^{-\beta_R A_i}}{\sum_i e^{-\beta_R A_i}}$$

a jak vidíme, má tvar Boltzmannova vzorce s parametrem $\beta = \beta_R$. Nicméně úplně stejnou úvahu jsme mohli provést i pro systém B . Z toho plyne důležité tvrzení, totiž že jsou-li systémy A a B v rovnováze, potom mají stejnou hodnotu β , tj. $\beta_A = \beta_R = \beta_B$. Je zřejmé, že totéž tvrzení platí i pro libovolný počet systémů v rovnováze (nejen pro dva).

Tato vlastnost je charakteristická pro jistou veličinu známou z každodenního života, totiž teplotu. Jak známo, teplota předmětů, nacházejících se v rovnováze je stejná; pokud ne, teče teplo od teplejšího ke chladnějšímu, dokud se teplota nevyrovná. Ovšem nemůžeme přímo položit $\beta = T$. Řekli jsme totiž, že při rostoucím β klesá pravděpodobnost stavů s velkou energií; to však platí pro klesající teplotu, neboť ustává tepelný pohyb částic a šance velkého energetického excessu klesá. Naopak při větších teplotách jsou pohyby prudší. Proto jsme nuceni definovat termodynamickou teplotu coby převrácenou hodnotu β vzorcem

$$\beta = \frac{1}{kT},$$

který má již správné vlastnosti. Koeficient k je tzv. Boltzmannova konstanta, jež nám umožňuje měřit teplotu T v „lidských“ jednotkách, totiž Kelvinech. Takto definovaná teplota se shoduje s teplotou, kterou znáte ze školy. Boltzmannův vzorec s explicitně vyjádřeným β má tedy tvar

$$P(E_m) = \frac{e^{-E_m/kT}}{\sum_m e^{-E_m/kT}}.$$

Statistická (partiční) suma

Ve skutečnosti však nechceme počítat ani tak pravděpodobnosti jednotlivých mikrostavů, nýbrž hodnoty makroskopicky měřitelných veličin (např. tlaku, energie, magnetizace apod.) pro dané parametry (např. teplotu). To byla hlavní motivace zmíněná na začátku seriálu. Nyní si ukážeme, jak se to dělá.

Prvním krokem je výpočet tzv. *statistické (partiční) sumy* Z , definované vztahem

$$Z = \sum_m e^{-\beta E_m},$$

kde index m běží přes všechny mikrostavy systému. Tato suma je veličinou, stojící ve jmenovateli Boltzmannova vzorce; jde vlastně o pouhý normovací faktor, zajišťující jednotkovou celkovou pravděpodobnost. Přesto z ní lze vypočítat všechny makroskopické veličiny, které by nás mohly zajímat.

Jako první příklad si vezměme výpočet střední energie systému.⁵ Podle definice je střední energie (budeme ji značit U) rovna

$$U = \sum_m E_m P(E_m) = \frac{1}{Z} \sum_m E_m e^{-\beta E_m},$$

kde jsme pravděpodobnosti $P(E_m)$ vyjádřili pomocí Boltzmannova vzorce. Tento vzorec lze však také zapsat jinak, což představuje jeden z nejdůležitějších triků

$$U = \sum_m E_m P(E_m) = \frac{1}{Z} \sum_m E_m e^{-\beta E_m} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_m e^{-\beta E_m} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}.$$

⁵⁾ Střední hodnota veličiny A je definovaná tímto způsobem. Máme-li množinu neslučitelných jevů s pravděpodobnostmi p_n a naše veličina A při těchto jevech nabývá hodnot A_n , pak její střední hodnotou $\langle A \rangle$ rozumíme součet $\sum_n A_n p_n$. Konkrétním příkladem této definice je třeba aritmetický průměr; tam jsou všechny pravděpodobnosti p_n stejné.

Střední hodnotu energie jsme vyjádřili pomocí derivace nějaké funkce Z .

Podobně můžeme odvodit i střední hodnotu tlaku. Tlak vstupuje do Boltzmannova vzorce prostřednictvím energetických hladin E_m . Tlak v m -tém stavu je záporně vzatou derivací energie E_m tohoto stavu podle objemu, totiž

$$p_m = -\frac{\partial E_m}{\partial V}.$$

Střední hodnota tlaku pak bude

$$\langle p \rangle = \sum_m p_m P(E_m) = \frac{1}{Z} \sum_m -\frac{\partial E_m}{\partial V} e^{-\beta E_m} = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial}{\partial V} \sum_m e^{-\beta E_m} = \frac{\partial \beta^{-1} \ln Z}{\partial V}.$$

Tímto způsobem můžeme vypočítat libovolnou střední hodnotu.

Na úplný závěr zadefinujeme dvě další veličiny a uvedeme některé důležité vztahy mezi nimi, které si můžete snadno ověřit právě předvedeným způsobem. Zavedeme tzv. *volnou energii*

$$F = -\beta^{-1} \ln Z$$

a *entropii*

$$S = -\sum_m P(E_m) \ln P(E_m).$$

Platí

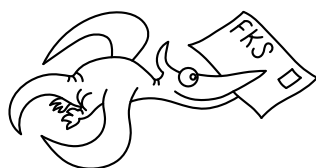
$$U = F - T \frac{\partial F}{\partial T}, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

apod. Tím tento díl seriálu končí, v příštím díle získané vztahy použijeme na nějaké konkrétní systémy.

Úloha II. S ... aparát statistické fyziky

- Jaký je vztah mezi počtem mikrostavů $\Omega(E)$ termostatu s energií $\ln E$ a veličinou $\eta(E)$ (tj. počtem mikrostavů s energií v intervalu $E \pm \Delta$) pro malá Δ ?
- Mějme systém N nezávislých harmonických oscilátorů, přičemž energie každého oscilátoru může nabývat hodnot $n\hbar\omega$ s $n = 0, 1, \dots$ (zanedbáváme energii nulových kmitů). Jaký bude mít tvar veličina $\eta(E)$ a $\beta(E)$ pro velká N a E ?
- Najděte stejné veličiny jako v předchozím příkladu pro systém N neinteragujících volných elektronů uvězněných na úsečce, (*) ve čtverci, (**) v krychli.

Nápověda. Použijte de Broglieho relace mezi hybností a vlnovou délkou de Broglieho vlny. Na úsečku se musí vejít celý počet půlvln. De Broglieho vlny ve čtverci si lze představit coby součin vln ve směru osy x a osy y , kvantovací podmínka je podobná jako pro úsečku.



FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>
e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz
e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.