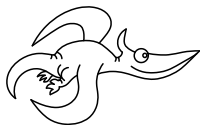


Milí řešitelé FYKOSu!

Máte v rukou poslední sérii, tedy poslední možnost, jak si ve výsledkové listině ještě trochu (ale i výrazně) polepšit. Úlohy jsme pečlivě vybírali, snad vás zvědavost podnítí se do nich pustit. Opravená řešení dostanete společně s řešením 5. série a závěrečnou výsledkovou listinou během června.

Přejeme vám hodně úspěchů v závěrečném období školního roku.

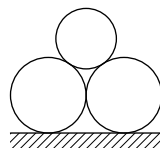
Organizátoři

**Zadání VI. série**

Termín odeslání: 21. května 2007

Úloha VI.1 ... tři válce děda vševěda

Zjistěte, za jakých podmínek bude soustava tří válců na obrázku 1 v rovnováze. Hustota materiálu válců je ρ , spodní válce mají poloměr R , horní válec má poloměr r . Součinitel tření je mezi všemi povrchy stejný.



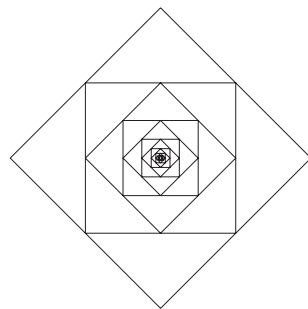
Obr. 1

Úloha VI.2 ... podivná atmosféra

Okolo planety o poloměru R se nachází atmosféra, jejíž index lomu se mění s výškou podle vztahu $n = n_0 - \alpha h$. Zjistěte, v jaké výšce h nad povrchem planety se světelný paprsek vyslaný tečně k povrchu bude pohybovat po kružnici okolo planety.

Úloha VI.3 ... čtverák čtverec

Obvod na obrázku 2 vznikne spojením nekonečně mnoha drátěných čtverců, přičemž každý následující je $\sqrt{2}$ -krát menší. Drát, ze kterého je obvod vyroben, o délce rovné straně největšího čtverce má odpor R . Určete odpor obvodu mezi krajními body vlevo a vpravo.



Obr. 2. Drátěná síť neznámého odporu.

Úloha VI.4 ... zákrytová dvojhvězda

Magnituda jisté zákrytové dvojhvězdy se mění se čtyřdenní periodou v této posloupnosti:

vedlejší minimum	$m = 3,5$,
maximum	$m = 3,3$,
hlavní minimum	$m = 4,2$,
maximum	$m = 3,3$.

Větší složka této dvojhvězdy má také vyšší teplotu než její průvodce. Za předpokladu, že Země leží v oběžné rovině dvojhvězdy, vypočítejte magnitudy jednotlivých složek a poměr jejich délkových rozměrů. Převodní vztah mezi magnitudou m hvězdy a osvětlením E , které způsobuje, je

$$m = -2,5 \log (E/E_0),$$

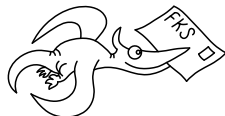
kde E_0 je pevně definovaná hodnota.

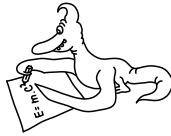
Úloha VI. P ... jak vypadají ufovi?

Zamyslete se nad tím, jestli by nějaké zvíře mohlo teoreticky komunikovat pomocí elektromagnetických vln rádiových frekvencí (10 Hz–100 MHz). Zkuste navrhnout, jak by vypadaly biologické ekvivalenty potřebných elektrických součástek.

Úloha VI. E ... slintací úložka

Změřte, jaký maximální podtlak (i přetlak) je člověk schopen vyvinout sáním (nafukováním) ústy.

**FYKOS****UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

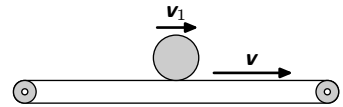


Řešení IV. série

Úloha IV. 1 ... nakupujeme minerálky (4 body; průměr 2,21; řešilo 19 studentů)

Určitě jste si v super(hyper)marketu všimli, že plastová láhev oblíbeného nápoje se při rozjetí pohyblivého pásu pokladny začne otáčet a k pokladní ji často musíte postrčit až rukou. Proč to tak je?

Zkuste analyzovat následující modelový případ. Láhev je položena na pás osou kolmo na směr pohybu pásu a láhev i pás jsou v klidu. Náhle se pás rozjede konstantní rychlostí $v = 10 \text{ cm/s}$. Jakou výslednou rychlostí se bude pohybovat láhev? Nejdříve analyzujte, jak se budou chovat různé idealizace – jako třeba tuhý válec. Pak si uvědomte, že láhev je plná nápoje, který se nerad otáčí. Pro jednoduchost uvažujte viskozitu nápoje za nulovou, pak se zamyslete nad tím, jak do hry vstoupí viskozita.



Obr. 3. Láhev na pásu.

Úlohu vymyslel Jano Lalinský na nákupu v TESCO.

Představme si, že na pásu, který je v klidu, leží válec; dejme tomu, že má poloměr R , hmotnost m a moment setrvačnosti I . Teď se najednou pás rozjede rychlostí o velikosti v .¹ Jakou rychlostí v_1 se bude pohybovat válec? (Protože válec se bude otáčet, za v_1 bereme souřadnici rychlosti jeho hmotného středu.) Rozjetí pásu trvá krátkou dobu Δt , během ní pás působí na válec proměnnou silou a dodá mu impuls Δp ve směru pohybu pásu. Spolu s impulzem ovšem válec získá i moment hybnosti $\Delta L = R\Delta p$. Dále předpokládáme, že válec se bude otáčet bez prokluzu. Z tohoto důvodu dolní bod válce, který se dotýká pásu, bude mít stejnou rychlost v jako pás. Z první impulzové věty vyplývá, že dodaný impuls se rovná změně hybnosti válce

$$\Delta p = mv_1. \quad (1)$$

Podle druhé impulzové věty platí

$$R\Delta p = I\omega. \quad (2)$$

Jaká je úhlová rychlost ω válce, jehož dolní bod se pohybuje rychlostí v a střed rychlostí v_1 ? Pokud se budeme pohybovat spolu s válcem rychlostí v_1 , uvidíme, že jeho dolní bod se pohybuje rychlostí $v - v_1$, a tedy úhlová rychlost válce je $\omega = (v - v_1)/R$.² Po dosazení úhlové rychlosti do poslední rovnice obdržíme

$$R\Delta p = I \frac{v - v_1}{R}.$$

Z první rovnice vyjádříme Δp , dosadíme do poslední, vyjádříme v_1 a dostáváme

$$v_1 = \frac{I}{I + mR^2} v. \quad (3)$$

¹⁾ Jak funguje automatický posun pásu? Na jeho konci je snímač, který hlídá, zda je na konci nějaké zboží. Pokud tam je, pás se zastaví; pokud pokladní sebere zboží z cesty infračerveného paprsku snímače, pás se rozjede.

²⁾ Úhlová rychlost je stejná v každé inerciální soustavě, protože když těleso otočíme o úhel φ v jedné, v druhé je toto otočení stejné.

Jak se budou podle tohoto vzorečku chovat různá tělesa? Tenký válec (např. prázdná PET láhev) má moment setrvačnosti mR^2 , tudíž jeho výsledná rychlost bude $\frac{1}{2}v = 5,0 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$, tj. polovina rychlosti pásu; v případě plného válce je moment setrvačnosti $mR^2/2$ a výsledná rychlost bude 1/3 rychlosti pásu, tedy vždy méně než rychlost pásu. Krátké zamyšlení potvrdilo naše zkušenosti z nákupů.

Jak to ale dopadne se skutečnou láhví s minerálkou? Pro jednoduchost předpokládejme, že láhev je zcela vyplněna nápojem, takže nebudou nastávat problémy se šplícháním vody uvnitř. Těsně po rozjezdu se láhev pohybuje rychlostí v_1 a plastový obal se ještě k tomu otáčí, ale nápoj uvnitř ne! (Část kapaliny se přece jen trochu otáčí, protože kapalina blízko stěny láhve sleduje pohyb stěny; pokud je však láhev dostatečně široká, většina kapaliny je daleko od stěn a tento efekt můžeme zanedbat.) Označme hmotnost plastového obalu m_o a hmotnost nápoje m_n ; platí $m = m_o + m_n$. Protože se po rozjetí pásu otáčí jen obal, celkový moment hybnosti je dán jen momentem hybnosti plastového obalu. To můžeme do rovnic zahrnout tak, že celý moment setrvačnosti láhve je moment setrvačnosti obalu $I = m_o R^2$. Ten dosadíme do posledního vztahu (3) a pro rychlost láhve dostaneme

$$v_1 = \frac{m_o}{2m_o + m_n} v \approx \frac{m_o}{m_n} v,$$

poněvadž poměr m_o/m_n je řádu 10^{-2} . Při rychlosti $v_1 \approx 0,1 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ by prodavačka na láhev čekala několik desítek minut.

Podívejme se na láhev z hlediska soustavy spojené s pásem. Obal se otáčí a láhev se valí po pásu rychlostí $v_1 - v$. Protože kapalina je viskózní, části kapaliny v láhvi se třou o sebe a uvádějí se do otáčivého pohybu. Tření v kapalině vzniká pouze, pokud se jednotlivé válcové vrstvy kapaliny pohybují různými rychlostmi. Po nějaké době by se měl vzájemný pohyb vrstev zastavit, a tudíž by se měla láhev pohybovat, jako by byla tuhým tělesem.

Předpokládejme na chvíli, že při valení nepůsobí na láhev žádný valivý odpor. Rychlost láhve a úhlová rychlost obalu se samozřejmě v průběhu roztáčení vody uvnitř láhve mění. Po celou dobu roztáčení a ustalování kapaliny uvnitř láhve působí pás na láhev nenulovou silou. Teď byly impuls a moment hybnosti dodány láhvi během dlouhé doby, po ustálení však opět platí rovnice (1) a (2). Moment setrvačnosti celé láhve je po ustálení kapaliny $I = m_o R^2 + m_n R^2/2$ a pro výslednou rychlost dostáváme

$$v_2 = \frac{2m_o + m_n}{4m_o + 3m_n} v \approx \frac{1}{3} v.$$

Pokud tedy počkáme, až se pohyb tekutiny v láhvi ustálí, láhev se bude pohybovat jako tuhý válec a její výsledná rychlost bude přibližně 1/3 rychlosti pásu, což je stejný výsledek, jaký jsme dostali pro tuhý válec.

Ale pozor! Jsou tu i jiné vlivy, jako třeba valivý odpor. Ten způsobí, že po dost dlouhé době se všechna tělesa vzhledem k pásu zastaví, přestanou se otáčet a budou unášena rychlostí pásu dál. Můžeme si teď položit zajímavou otázku. Který vliv bude podstatnější pro pohyb – viskozita nebo valivý odpor? Pokud bude významnější valivý odpor, fáze pohybu s rychlostí $\frac{1}{3}v$ popsaná výše vůbec nenastane; válec to po chvíli roztáčení vody vzdá a začne se pohybovat bez otáčení stejnou rychlostí jako pás.

Přesně odpovědět na tuto otázku je obtížné, museli bychom řešit pohybovou rovnici pro obal a nápoj v něm. Můžeme však alespoň orientačně říct, který vliv je dominantní podle toho, jak dlouho mu trvá, než se projeví.

Za jakou dobu se díky viskozitě roztočí celý obsah láhve na stejnou úhlovou rychlost? Pomoci si můžeme rozměrovou analýzou. Očekáváme, že doba bude úměrná poloměru válce (malý válec se musí roztočit hned), nepřímo úměrná viskozitě (s velkou viskozitou je čas nulový) a jistě i úměrná hustotě (těžší kapalina má větší setrvačnost). Jedinou veličinou s rozměrem času, kterou můžeme jednoduše zkonstruovat z veličin R , ρ a η , je $t_1 = \rho R^2 / \eta$, její hodnota je pro dvoulitrovou láhev vody asi $t_1 \approx 1$ h. To je až podezřele hodně, čekali bychom asi mnohem menší dobu. V tomto případě tedy rozměrová analýza nedává nejlepší výsledky. O valivém odporu víme, že normálně se na nepohyblivé podložce láhev zastaví v průběhu několika sekund. Valivý odpor je tedy převládajícím vlivem nad viskozitou a přechodný stav třetinové rychlosti nenastane. Láhev by se měla po chvíli přestat otáčet, to však, zdá se, neodpovídá skutečnosti. Častěji je možno vidět láhev stabilně se otáčet na místě. Proč, těžko říct. Svou roli zde může hrát zřejmě nerovnost podložky pásu (mírná prohlubeň vzniklá v místě kontaktu láhve a pásu) a možná i nerovnoměrnost chodu pásu (proměnná rychlost, vibrace, ...).

Při čtení vašich řešení jsem byl překvapen, jak někteří z vás v této úloze využívali zákon zachování mechanické energie. Ten je sice pěkný a platí v několika akademických problémech s ideálními vazbami, ale ve skutečnosti se mechanická energie málokdy nezachovává. Opravdu fundamentální zákony jsou první a druhá věta impulzová. Někteří z vás použili speciální předpoklad, že během rozjíždění pásu na láhev působí třecí síla $F_t = fN$. Tento předpoklad je nadbytečný, protože přesný charakter sil není podstatný. Navíc je pravděpodobně špatně, protože pro klidové tření platí $F_t \leq fN$. Užitečný by byl až tehdy, kdyby bylo tření mezi láhví a pásem smykové a nás by zajímala doba, za kterou se láhev uvede do pohybu. Zajímavou otázkou tedy je, zda během rozjíždění pásu je tření mezi láhví a pásem skutečně klidové, nebo smykové povahy. Ale to už je jiná úloha.

Ján Lalinský

jano@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.2 ... švestkové víno v číně (3 body; průměr 2,17; řešilo 18 studentů)

V oblíbené čínské restauraci na Vinohradech dávají každému hostu k účtu jako pozornost švestkové víno. Nápoj nalévají do malých keramických mističek s dvojitým dnem (viz obr. 5). Horní dno je skleněné a je pod ním vidět obrázek sedící číňanky (viz obr. 6). Po vypití vína obrázek číňanky zmizí (viz obr. 7). Podrobně vysvětlete, proč se tak stane. Prázdná mistička s vypouklým skleněným dnem je vyfocena na obrázku 4.

Barevné a kvalitnější obrázky najdete na našich webových stránkách.

Vymyslel Honza Prachař po několikáté návštěvě zmíněné restaurace.



Obr. 4

Když je mistička prázdná, tvoří kulové dno silnou spojku s malou ohniskovou vzdáleností a obrázek není vidět, protože světlo z něj se rozptýlí, nebo ani neprojde rozhraním mezi sklem a vzduchem kvůli totálnímu odrazu. Přilité víno má velmi podobný index lomu jako sklo a paprsky procházející rozhraním (teď už) mezi sklem a vínem se téměř nelámou a dochází pouze ke zdánlivému přiblížení obrázku ke hladině (hůl do vody vnořená, ...).

Tento jev se objevuje hlavně v podvodním světě – když se potopíme pod vodní hladinu, vidíme velmi špatně právě z tohoto důvodu. Aby vodní živočichové vůbec viděli, musí k tomu být uzpůsobeno jejich oko.



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Většina řešitelů této úlohy pochopila, že za zmizení obrázku může změna optických vlastností soustavy po vypití vína, ale někteří se zamotali do přehršle zobrazovacích rovnic, které se dají obejít úvahou.

Aleš Podolník

ales@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... dostavba Temelína (4 body; průměr 3,00; řešilo 8 studentů)

Odhadněte tloušťku vody potřebnou k odstínění záření z jaderného reaktoru s výkonem 980 MW v plánovaném novém bloku JE Temelín. Z celkové energie uvolněné při štěpení jádra uranu připadne zhruba 82 % na kinetickou energii fragmentů, 6 % odnesou neutrino, po 6 % mají neutrony a gama fotony.

Nápověda. Pravděpodobnost, že částice projde materiálem do hloubky d , je přibližně rovna $e^{-\sigma nd}$, kde $n = N/V$ je hustota molekul materiálu (v našem případě počet molekul vody v 1 m^3) a σ je účinný průřez (cross section) pro absorpci částice na molekule. Účinný průřez má rozměr plochy (často se užívá jednotka barn = 100 fm^2) a závisí na energii částic. Hodnoty účinných průřezů se pokuste najít na internetu nebo v příslušných tabulkách.

Úlohu řešil Karel Tůma na zkoušce z jaderné fyziky.

Interakce záření s látkou je obecně dost složitý proces. Pokud si záření představíme jako skupinu letících kulek, situace se značně zjednoduší. Prolétá-li záření látkou, čas od času se některé z částic připlete do cesty molekula prostředí, kterým záření proniká. Podle typu záření pak následuje příslušný karambol. V našem případě budeme předpokládat, že účastník srážky nepokračuje v dalším letu.

Abychom mohli kvantitativně analyzovat danou situaci, představme si, že z látky, kterou záření proniká, vyřízneme kvádr o ploše S a malé tloušťce dx . Předpokládejme, že záření dopadá na stěnu kvádrů kolmo, abychom se vyhnuli zbytečným počtům s vektory, které situaci ještě více komplikují.

Pokud tedy vystřelíme částici kolmo na stěnu našeho malinkatého kvádrů, je pravděpodobnost, že částice neprojde skrz, rovna poměru plochy, kterou při pohledu zepředu zakrývají molekuly prostředí, ku ploše S kvádrů. Plocha, již zakrývá jedna molekula, se nazývá účinný průřez. Jelikož tloušťku kvádrů volíme velmi malou, lze zanedbat fakt, že se některé zbábělé molekuly mohou schovávat před stěnami za ostatní molekuly. Matematicky zapsáno máme pro pravděpodobnost p takovouto rovnici

$$p = \frac{\sum_i \sigma_i}{S}.$$

Pokud je daná látka tvořena jenom jedním typem molekul, lze součet účinných průřezů $\sum_i \sigma_i$ zjednodušit. Uvnitř objemu kvádru se nachází $n \cdot S \cdot dx$ molekul, kde n je hustota molekul (počet molekul v 1 m^3) dané látky. Každá z molekul má stejný účinný průřez σ , takže máme

$$\sum_i \sigma_i = \sigma n S dx.$$

Pro pravděpodobnost, že částice neprojde skrz kvádr, dostaneme

$$p = \sigma n dx.$$

Pokud vystřelíme na kvádr N částic, neprojde jich $p \cdot N$. Obdobně je to i s intenzitou záření (celková energie částic, která projde plochou 1 m^2 za 1 s). Nárůst intenzity dI po průchodu kvádrem je nepochybně záporný a s původní intenzitou I souvisí vztahem $dI = -p \cdot I$. Dosazením za pravděpodobnost p a položením $dx \rightarrow 0$ obdržíme diferenciální rovnici

$$\frac{dI}{I} = -\sigma n dx.$$

Rovnici vyřešíme metodou tzv. separace proměnných. Trik spočívá v tom, že každou stranu rovnice zintegrujeme podle příslušné proměnné.

$$\int \frac{1}{I} dI = -\sigma n \int dx \Rightarrow \ln I = -\sigma n x + C \Rightarrow I = e^{-\sigma n x + C}.$$

Hodnoty integrační konstanty C se dopátráme tak, že pro $x = 0$ položíme $I = I_0$. Jednoduše řečeno, intenzita záření těsně předtím, než začne procházet látkou, má hodnotu I_0 .

$$I = I_0 e^{-\sigma n x}. \quad (4)$$

Celé toto odvození bylo vlastně zbytečné, jelikož vztah (4) je uveden v nápovědě v zadání. Nicméně takto jsme se dobrali hlubšího pochopení významu jednotlivých členů a celého vztahu, což je mnohem cennější výsledek.

Nyní k samotnému reaktoru. Fragmenty jádra uranu se v látce okamžitě zastaví, jejich kinetická energie se na velice krátké vzdálenosti přemění na teplo, které udává výkon reaktoru. Neutrina jsou schopna bez jediné interakce proletět celý vesmír, takže s těmi si taktéž není nutné lámat hlavu. Zbývají gama fotony a neutrony.

Nejdříve k neutronům. Intenzita neutronového záření I_n , kterou je potřeba odstínit, je přímo úměrná výkonu $P = 980 \text{ MW}$ reaktoru a nepřímo úměrná ploše S stěny reaktoru. Konstantu úměrnosti určují zlomky energie odpovídající štěpným produktům (82 %) a neutronům (6 %, viz zadání).

$$I_n = \frac{6}{82} \cdot \frac{P}{S}. \quad (5)$$

Absorbovaná dávka záření³ D je definována jako energie záření, která se absorbovala v jednotce hmotnosti, $D = E/m$. Dle normy maximální neškodná absorbovaná dávka záření za rok je $D_r = 0,05 \text{ Gy}$.

³) Jednotka absorbované dávky je Gy, vyslovuje se gray. Jednotka byla takto pojmenována na počest Louise Harolda Graye.

Pro dostatečnou bezpečnost předpokládejme, že průměrný chlap vážící $m = 80$ kg vysedává u stěny reaktoru 24 hodin denně. Dávka, kterou dostane za $T = 1$ rok, je s ohledem na (5) a (4) rovna

$$D = \frac{TS_{\text{ch}}I_n e^{-\sigma n d}}{m},$$

přičemž S_{ch} je plocha chlapa. Pro nejhorší případ položíme $S_{\text{ch}} \approx S$, pak pro potřebnou tloušťku stěny máme

$$d \approx \frac{1}{\sigma n} \ln \frac{TP}{10D_{\text{r}}m}.$$

Hustota molekul vody je $n = N_A \rho / M_m$, kde N_A je Avogadrova konstanta, ρ je hustota vody a M_m je molární hmotnost vody. Po nalezení celkového účinného průřezu neutronů na jádrech vodíku a kyslíku $\sigma_n = 20 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ (hodnota převzata z [1]) dostaneme přibližně $d \approx 0,5 \text{ m}$.

Situace s gama zářením je mnohem komplikovanější. Při průchodu látkou se stále zachovává tvar rovnice (4). Obvykle se píše ve tvaru $I = I_0 e^{-\mu_1 x}$, kde μ_1 značí lineární zeslabovací koeficient. Koeficient μ_1 nelze ani zdaleka považovat za konstantní. Závisí poměrně dramaticky na energii fotonů. Na jednoduchosti věci nepřidá zvláště fakt, že gama fotony mohou interagovat s látkou třemi způsoby:

1. Fotoelektrická absorpce

Gama foton interaguje s valenčními elektrony v atomech prostředí obdobně jako při fotoelektrickém jevu. Část energie se použije k překonání vazebné energie elektronu. Zbytek se použije na kinetickou energii elektronu, který po interakci odlétá pryč ze svého původního stanoviště.

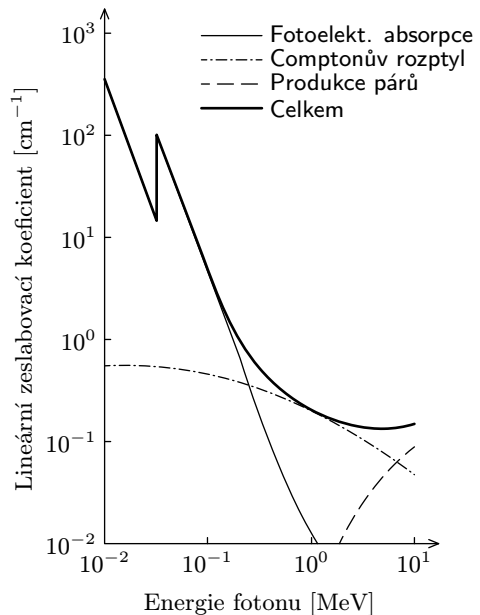
2. Comptonův rozptyl

Comptonův rozptyl je proces, při kterém gama záření interaguje s volným nebo slabě vázaným elektronem. Elektron získá část energie fotonu. V souladu se zákonem zachování energie a hybnosti není možný úplný zánik fotonu. Tím pádem z místa interakce odlétá foton se zmenšenou energií a elektron.

3. Produkce elektron-pozitronových párů

Pokud má foton energii větší než $1,022 \text{ MeV}$ (to odpovídá dvojnásobku klidové energie elektronu $2m_e c^2$), může samovolně vygenerovat elektron-pozitronový pár. Pokud se tak stane v blízkosti jádra, elektron a pozitron se rozletí od sebe a přebytečná energie nad $1,022 \text{ MeV}$ se rozdělí mezi elektron a pozitron v podobě kinetické energie. Pozitron je zpomalován prostředím, až nakonec anihiluje, což vyprodukuje dva fotony s energií $0,511 \text{ MeV}$. Tyto gama fotony s nižší energií mohou dále interagovat. Nemůžou však už vygenerovat elektron-pozitronový pár.

Každý ze způsobů interakce se uplatňuje v jiné části energetického spektra. Energetické

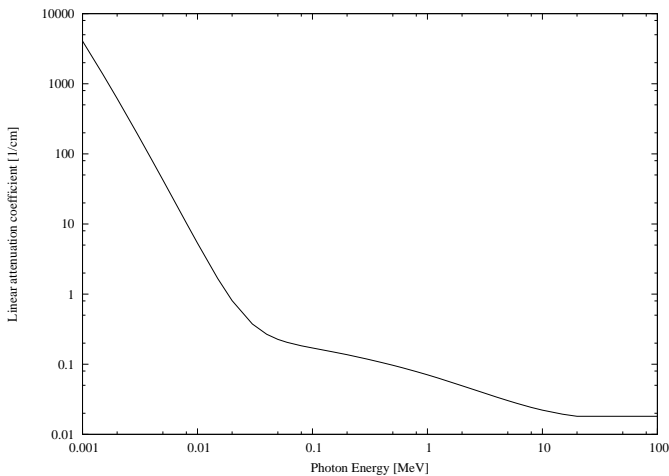


Obr. 8. Lineární zeslabovací koeficient gama záření v NaI.

spektrum lineárního zeslabovacího koeficientu pro jodid sodný NaI (krystal NaI se používá v mnoha detektorech gama záření) je znázorněno na obrázku 8. Z něj je jasně patrné, jak významnou roli hrají při dané energii jednotlivé typy interakcí.

Pokusme se konečně odhadnout, jaká tloušťka vody bude potřeba k odstínění gama záření z reaktoru. Energie uvolněná při rozpadu jednoho atomu uranu je zhruba 180 MeV. Takže na fotony připadá asi 11 MeV. Řekněme, že na každý případne energie třeba kolem 2 MeV. Lineární zeslabovací koeficient pro tuto energii se dá odečíst z obrázku 9 a je roven zhruba $0,05 \text{ cm}^{-1}$. Pokud použijeme stejné parametry reaktoru a pracovníka JE jako v případě neutronů, dostaneme pro tloušťku vody $d \approx 7 \text{ m}$.

Výsledky, které jsme obdrželi, naznačují, že odstínit vodou neutrony se ukazuje jako dobrý nápad, jelikož neutrony se rády zachytávají na jádrech vodíku. Ovšem s gama zářením je situace trochu horší. K jeho odstínění se nejlépe hodí těžké prvky. Atomy s větším počtem protonů propouštějí gama fotony mnohem méně a byly by k tomuto účelu vhodnější. V praxi se k tomuto používá olovo nebo wolfram, kterým je obaleno jádro reaktoru.



Obr. 9. Lineární zeslabovací koeficient gama záření ve vodě (převzato z [3]).

Literatura

- [1] W. B. Jones: *The Slow Neutron Cross Section of H*. Physical Review 74, 364-369 (1948).
- [2] G. Nelson, D. Reilly: *Gamma ray interaction with matter*.
<http://www.fas.org/sgp/othergov/doe/lanl/lib-www/la-pubs/00326397.pdf>
- [3] *Tables of X-Ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients*.
<http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/ComTab/water.html>

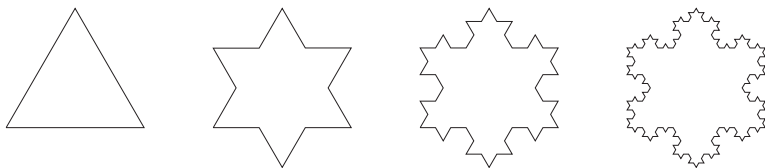
Vojta Molda

vojta@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... Kochova vločka (5 bodů; průměr 2,28; řešilo 18 studentů)

Určete moment setrvačnosti Kochovy vločky zhotovené z homogenního plechu vzhledem k ose kolmé na její rovinu a procházející jejím středem. Uvažujte, že vločka má hmotnost m a průměr a .

Kochova vločka je útvar vzniklý iterativním lepením vždy třikrát menších rovnostranných trojúhelníků na strany předchozího útvaru (viz obr. 10). Průměrem Kochovy vločky rozumíme vzdálenost vrcholů jejich protějších cípů.



Obr. 10. První čtyři iterace při vytváření Kochovy vločky.

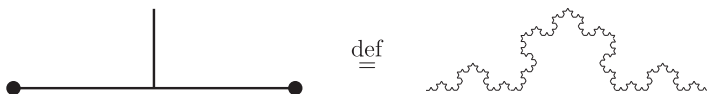
Prvním možným přístupem k problému určení momentu setrvačnosti je přímé využití jeho definice pomocí integrálu. V případě Kochovy vločky K by však výpočet příslušného integrálu

$$I = \int_K r^2 \rho dV$$

byl zřejmě velmi obtížný. K něčemu nám však toto vyjádření momentu setrvačnosti přece jen pomůže. Lze z něj totiž jednoduše odvodit, že změněme-li všechny rozměry plošného objektu k -krát (při zachování polohy osy a hodnoty plošné hustoty), změní se hmotnost každého elementu dV k^2 -krát a příslušná vzdálenost r od osy k -krát. Moment setrvačnosti se tedy změní k^4 -krát. Tuto skutečnost později využijeme.

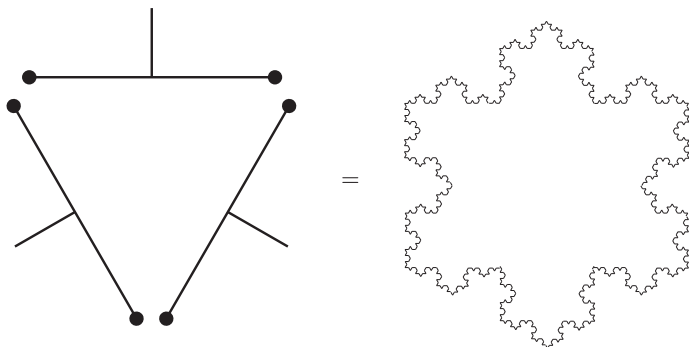
Nevede-li k cíli přímé použití definice, je užitečné prostudovat případné symetrie či jiné pravidelnosti. Nejcharakterističtější vlastnosti Kochovy vločky (a obecně všech fraktálů) je její soběpodobnost. Co to konkrétně znamená? Podíváme-li se na jednu ze „stran“ Kochovy vločky (kterou budeme dále pro jednoduchost nazývat Kochovou křivkou), snadno nahlédneme, že se skládá ze čtyř na sebe napojených třikrát menších Kochových křivek.

Zavedme si pro Kochovu křivku zjednodušenou grafickou značku⁴

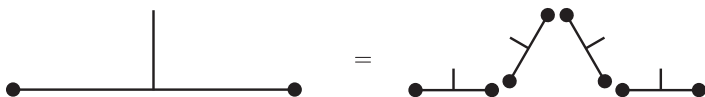


⁴⁾ Schémata použitá v tomto textu v zájmu názornosti neobsahují popisky délek a úhlů. Zjednodušeně řečeno však platí, že to, co vypadá jako úhel 30° , 60° , resp. 120° , jím také skutečně je.

Potom můžeme například celou Kochovu vložku znázornit takto

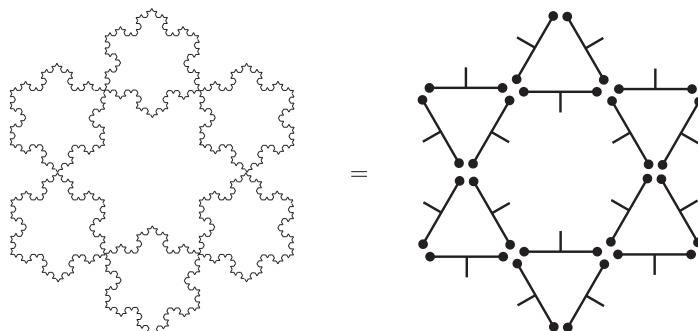


Zmíněnou soběpodobnost Kochovy křivky vyjadřuje následující „rovnost“

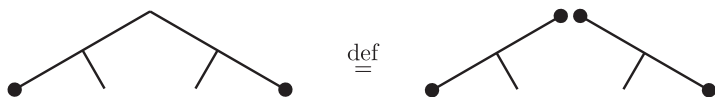


Důležité je, že Kochova křivka je jedinou omezenou křivkou, která vykazuje právě popsanou soběpodobnost. Tento fakt ponecháme bez důkazu. Zájemcům můžeme prozradit, že k němu lze použít tzv. Banachovu větu o kontrakci (někdy též zvanou Banachova věta o pevném bodě).

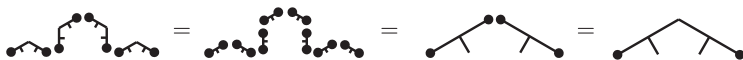
To však ještě stále není to, co bychom chtěli, protože jde o soběpodobnost křivky ohraničující Kochovu vložku. My se však zajímáme o samotnou plochu. Hodilo by se tedy nalézt soběpodobnost Kochovy vložky s některými jejími částmi. Zřejmě je rozumné soustředit se na šest cípů vložky. Každý z nich je totiž ze dvou stran ohraničen Kochovou křivkou. Pokud si podobně dokreslíme i třetí strany, dostaneme



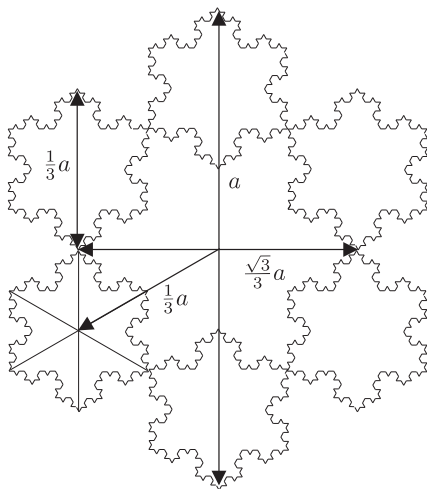
Situace začíná vypadat slibně. Kochova vložka se skládá z šesti třikrát menších vložek a jistého „zbytku“, který taktéž velmi silně připomíná vložku. Jak ale dokážeme, že zbylá vnitřní oblast je skutečně také Kochovou vložkou? K tomu by zřejmě stačilo ukázat, že každá dvojice sousedních stran oblasti tvoří dohromady Kochovu křivku. Zavedme si pro tyto dvojice schématické označení



Jednoduše lze ukázat, že takto napojená dvojice Kochových křivek vykazuje přesně stejnou soběpodobnost jako samotná Kochova křivka. Postup důkazu znázorňuje následující série rovností



První z nich je jednoduše rozepsáním každé značky pro dvojici křivek na dvě značky pro jednotlivé křivky. Druhá plyne ze soběpodobnosti Kochovy křivky (viz obrázek výše) a třetí opět vyjadřuje pouze přechod k symbolu pro dvojici křivek. Jelikož však, jak bylo uvedeno výše, je jedinou omezenou křivkou s touto soběpodobností právě Kochova křivka, musí s ní být skutečně každá dvojice stran uvažované oblasti totožná.



Obr. 11. Geometrie Kochovy vložky.

Tím jsme korektně⁵ dokázali něco, co je každému člověku „jasné z obrázku“, totiž že zbytek po odříznutí Kochových vloček představujících cípy původní vločky je také Kochovou vločkou.

Od vyřešení úlohy nás už dělí jen trocha elementární geometrie (viz obr. 11) a několik jednoduchých úvah. Využijeme skutečnost, že moment setrvačnosti dvourozměrného objektu o dané plošné hustotě roste se čtvrtou mocninou jeho charakteristického rozměru (v našem případě průměru vločky). Je-li moment setrvačnosti Kochovy vločky o průměru a (vzhledem k ose o procházející středem) roven I , pak je moment setrvačnosti vnitřní oblasti vzhledem k téže ose roven $I/9$. Moment setrvačnosti každého z cípů vůči ose procházející jeho vlastním středem je $I/81$ a vzhledem k ose o pak podle Steinerovy věty $I/81 + ma^2/81$ (hmotnost cípu je $m/9$). Celkový moment setrvačnosti I ale musí být roven součtu jednotlivých dílčích momentů, tj.

$$I = \frac{1}{9}I + 6 \left(\frac{1}{81}I + \frac{1}{81}ma^2 \right).$$

Odtud pak již snadno vyjádříme výsledek $I = \frac{1}{11}ma^2$.

Marek Pechal

marek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . P ... **masný papír** (5 bodů; průměr 2,06; řešilo 16 studentů)

Jistě jste se již setkali s tím, když kapka oleje ukápla na papír. Z bílého papíru se rázem stal papír průsvitný. Vysvětlete, čím to je. Najděte ve svém životě případy, kdy se uplatňuje stejný jev, avšak třeba v úplně jiné situaci.

Na problém narazil Peter Zalom při čtení o sněhových vločkách.

Právě teď se díváte na pokus o vyřešení záhady masného papíru, a pokud zrovna nebrouzdáte po stránce FYKOSu, díváte se na bílý papír s černými písmeny. Jednoduše řečeno s papírem přicházíme tak často do styku, že si toho ani nevšimáme. Jenomže tentokrát bude právě papír v centru dění. Proto se připoutejte a nezamastěte si brožurky.

Celulóza (pod starším názvem též buničina) je polysacharid sestávající se z beta-glukósy. Mezi samotnými glukosovými jednotkami je vazba beta 1,4. Takto tvoří celulóza dlouhé a nerozvětvené řetězce, které jsou zcela nerozpustné ve vodě. Vyrábí se ze dřeva odstraněním ostatních složek (lignin, hemicelulosa aj.). A proč nás zajímá právě celulóza? Protože je také mimo jiné základní surovinou na výrobu papíru. Jenomže ten má od téhle substance (celulózy) hodně daleko. Takže jak získáme krásný bílý papír?

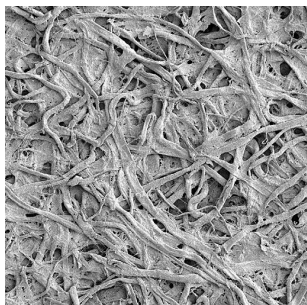
Poměrně jednoduše, můžeme si ho dokonce vyrobit vlastnoručně. Jako surovinu na výrobu můžeme použít průmyslově vyráběnou bělenou sulfátovou buničinu z jehličnanů. Následně celulózu pomeleme pomocí holandru (což je přístroj vhodný k tomuto účelu). Mletím se mimo jiné zkrátí vlákna, uvolní se fibrily z povrchu vlákna a jako vedlejší účinek se často objevuje komprese nebo prodloužení ve směru osy vlákna, zploštění a zkroucení vláken. Pomletou buničinu zředíme vodou a dobře promícháme, aby byla výsledná substance co nejvíce homogenní.

V následujícím kroku budeme potřebovat síto vhodného tvaru (zejména jeho otvory nesmějí být moc velké a síto by mělo být rovné). Síto následně ponoříme do této homogenní hmoty a třeseme s ním, až se zbavíme veškerého přebytečného odpadu. Třesením se také uspořádají vlákna a část vody oteče skrz síto. Síto přikryjeme (nejlépe vlnitým sukmem, které nasaje

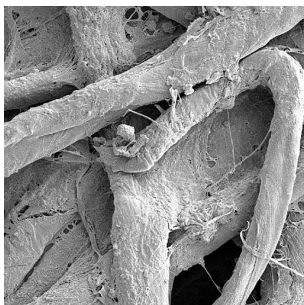
⁵⁾ I když šlo pouze o hrani s obrázky, daly by se popsané úvahy snadno zformulovat do „skutečného“ matematického důkazu. Jediným slabým místem je právě již zmíněná otázka jednoznačnosti křivky s uvedenou soběpodobností, jejíž důkaz jsme vynechali.

další část vody), překlopíme a znovu přikryjeme textilí. Přebytké vody se zbavíme pomocí válečku. Pak to celé slisujeme, usušíme a papír je na světě.⁶

Výsledkem je papír, který zblízka vypadá jako na následujících obrázcích:



Obr. 12. Zvětšeno 100×.



Obr. 13. Zvětšeno 1000×.



Obr. 14. Zvětšeno 2500×.

Vidíme tedy, že papír rozhodně není homogenní, spíše se skládá z nespočetného množství do sebe spletených vláken celulózy. Mezi nimi je však poměrně veliký prostor a ten bude hrát v našem zdůvodnění záhady mastného papíru podstatnou roli.

Předem si však shrneme pár velmi důležitých postřehů. Mastný papír je průsvitný. Papír vodu moc dobře nesaje. Navzdory tomu, když ho dostatečně navlhčíme, je také průsvitný. Když je papír mokrý, tak se velice snadno trhá. Mastnotu z papíru již tak lehce nedostaneme (proto také nejíme nad řešením FYKOSu). Voda se z mokrého papíru rychle odpaří, čímž je papír opět neprůsvitný a obvykle se výrazně zkroutí. To dokazuje, že v přítomnosti vody mají vlákna tendenci zkroutit se. Nic podobného však nepozorujeme na mastném papíru. Také je evidentní, že v mastném ani vlhkém papíru nedochází k žádné chemické reakci (minimálně se nejedná o tutéž reakci). Nanejvýš dochází k oslabení vazeb mezi vlákny (důsledkem toho se může papír rozložit na samotná vlákna).

Co se tedy stane, když posvítíme na obyčejný papír? Mezery mezi vlákny papíru jsou velmi malé. Když na sebe uložíme více takových vrstev, pak světlo nemůže projít skrz papír jenom tak. V cestě mu bude téměř vždy stát nějaké to vlákno, které ho rozptýlí do všech směrů. Jenom zlomek světla projde, dojde k difúzi světla (proto je rozptýlené světlo bílé, resp. papír je bílý, ač toto závisí také na přidaných barvivech). Papír, jenž je sám o sobě poměrně tenký, tedy není úplně neprůsvitný.

Jiná situace nastane, když jsou mezery vyplněné olejem nebo vodou. Vlákna celulózy jsou nesmáčivá jak vodou, tak i olejem, proto se rozhraní mezi olejem nebo vodou v papíře a vlákny vyhladí. To je něco velice podobného, jako když namočíme tabuli. Ta je pak tmavší, ale pod jistým úhlem odráží více světla a je světlejší. V případě světla tedy vyhlazení povrchu uvnitř papíru vede k tomu, že světlo, které se šíří olejem, bude častěji odraženo takovým způsobem, že projde skrz papír. Tohle poslední tvrzení by se dalo formulovat také tak, že dojde ke vzniku jakýchsi vlnovodů v papíře. Rozptýl světla na nepravidelnostech vláken se díky odrazu světla na rozhraní mezi olejem vlákny více (ale ne zcela) potlačí.

Kdy se uplatňuje stejný jev, avšak třeba v úplně jiné situaci? Ze stejného důvodu, proč není papír průhledný, je neprůhledný sníh (ale led ano), mají mraky bílou barvu a v mlze

⁶⁾ Tohle jsme si ještě osobně nevyzkoušeli, ale podrobnosti včetně barevných fotek najdete na stránce: <http://www.obnova.sk/modules.php?name=clanky&file=clanok&sid=1998>.

dohlédneme jen na několik metrů. S odrazem světla od povrchu vody se setkáváme doslova na každém kroku, třeba již na zmíněné tabuli.

A na závěr bych jenom dodal, že k rozlouštění záhady mastného papíru nedošlo rozhodně vůbec přesvědčivě a nevyvratitelně. Použil jsem spíše vědomost jistých analogických procesů. Jenomže některé analogie jsou problematické.

Peter Zalom

peter@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV. E ... vytřete nám zrak (8 bodů; průměr 5,61; řešilo 18 studentů)

Změřte, jak závisí součinitel smykového tření mezi dvěma vámi vybranými materiály na velikosti stykové plochy a na hmotnosti smýkajícího se tělesa. Nezapomeňte nám napsat, s čím a jak jste měřili.

Úloha napadla Honzu Prachaře při čtení Feynmanových přednášek z fyziky.

Teorie

Při měření součinitele smykového tření je důležité si uvědomit, že existují dva různé součinitele. Tedy že existuje součinitel klidového tření a součinitel smykového tření. Klidová třecí síla je definovaná jako síla působící na stojící těleso, kdežto smyková třecí síla je síla, která působí proti pohybu při smýkání jednoho tělesa po druhém. Pro klidové tření platí $F \leq f_0 N$ (rovnost nastává těsně před uvedením tělesa do smýkavého pohybu), pro smykové tření platí

$$F = f N,$$

kde N je přítláčná síla kolmá k podložce a F je výše definovaná třecí síla. Klidové třecí síle odpovídá součinitel klidového tření f_0 a smykové třecí síle zase součinitel smykového tření f . Součinitel klidového tření bývá zpravidla o něco vyšší než součinitel smykového tření.

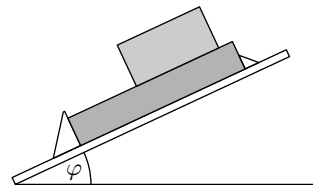
Pro měření těchto součinitelů se používají *tribometry*. Nejčastěji jste používali sklonný tribometr, který je na obrázku 15. Na tomto tribometru lze měřit jak součinitel klidového tření, tak součinitel smykového tření. Součinitel klidového tření se měří jednoduše tak, že položíme zkoumané těleso na smýkací plochu a zvětšujeme úhel náklonu φ , dokud se těleso nepočne pohybovat, a tento mezní úhel si zapíšeme.

Měření součinitele smykového tření je o něco komplikovanější, hledá se totiž úhel, při kterém se zkoumané těleso bude pohybovat po počátečním postrčení rovnoměrně přímočaře, tedy ani zrychleně, ani zpomaleně. Zde je znatelnější vliv subjektivního vnímání, a proto je lepší měření pro stejné parametry několikrát zopakovat, čímž snížíme statistickou chybu.

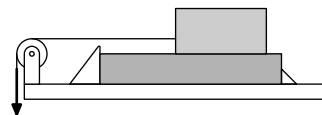
Z nalezeného úhlu φ určíme daný součinitel f díky jednoduché geometrii a rozkladu tíhové síly jako

$$f = \frac{F}{N} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Někteří z vás také použili vodorovný tribometr, vyobrazený na obrázku 16. Na tomto tribometru lze opět měřit jak součinitel klidového tření, tak součinitel smykového tření. Obdobně jako u sklonného tribometru součinitel klidového tření hledáme tak, že za konec provázku taháme stále větší silou, a hledáme mezní sílu, při které



Obr. 15. Sklonný tribometr.



Obr. 16. Vodorovný tribometr.

se začne těleso pohybovat. Součinitel smykového tření určujeme tak, že hledáme sílu, kterou tahat za provázek tak, aby se těleso po počátečním postrčení počalo pohybovat rovnoměrným přímočarým pohybem. Opět je zde významný vliv subjektivního vnímání a odhadu pro rovnoměrný pohyb. Z nalezené mezní síly F_m vypočítáme součinitel f opravdu triviálně, jelikož velikost F_m je díky kladce rovna velikosti F , tedy

$$f = \frac{F_m}{N}.$$

Měření

My jsme použili sklonný tribometr a měřili jsme klouzání nelakovaného tvrdého dřeva po tvrdém nelakovaném dřevu. Pro změnu hmotnosti jsme používali směs magnetů a železných kroužků připevněnou ke dřevu pomocí hřebíčků, čímž jsme dosáhli vcelku rovnoměrného rozložení přidávané hmotnosti. Pro změnu povrchu jsme vždy kousek dřeva uřízli. Nejdříve jsme zkoumali závislost součinitelů na hmotnosti tělesa, potažmo tedy na přítlačné síle. Pro každou hmotnost závaží jsme měřili pětkrát a v následující tabulce jsou uvedeny vždy průměrné hodnoty. V této tabulce uvádíme pouze statistické chyby měření, o celkové chybě měření se zmíníme v diskusi.

Měření závislosti součinitelů na hmotnosti.

$m[\text{g}]$	$\varphi[^\circ]$	f	$\varphi_0[^\circ]$	f_0
170	$28,1 \pm 0,4$	$0,533 \pm 0,005$	$32,7 \pm 0,5$	$0,641 \pm 0,006$
220	$28,3 \pm 0,4$	$0,537 \pm 0,004$	$32,7 \pm 0,5$	$0,643 \pm 0,006$
250	$27,8 \pm 0,6$	$0,527 \pm 0,007$	$32,5 \pm 0,4$	$0,638 \pm 0,005$
300	$28,7 \pm 0,6$	$0,548 \pm 0,006$	$33,1 \pm 0,6$	$0,651 \pm 0,007$
400	$30,4 \pm 0,5$	$0,588 \pm 0,006$	$33,0 \pm 0,5$	$0,650 \pm 0,006$

Obdobně jsme pro každou velikost styčného povrchu také měřili pětkrát a průměrnou hodnotu včetně statistické chyby jsme zanesli do tabulky. Závislost na povrchu jsme měřili při hmotnosti tělesa 250 g.

Měření závislosti součinitelů na velikosti styčné plochy.

$S[\text{cm}^2]$	$\varphi[^\circ]$	f	$\varphi_0[^\circ]$	f_0
150	$27,8 \pm 0,6$	$0,527 \pm 0,007$	$32,5 \pm 0,5$	$0,638 \pm 0,005$
120	$28,0 \pm 0,4$	$0,532 \pm 0,005$	$32,8 \pm 0,7$	$0,645 \pm 0,008$
100	$28,3 \pm 0,5$	$0,539 \pm 0,006$	$32,7 \pm 0,5$	$0,642 \pm 0,007$
80	$28,1 \pm 0,7$	$0,535 \pm 0,008$	$33,2 \pm 0,5$	$0,654 \pm 0,006$
50	$28,7 \pm 0,6$	$0,547 \pm 0,007$	$33,0 \pm 0,6$	$0,651 \pm 0,007$

Diskuse

V literatuře⁷ se lze dočíst, že pomocí výše popsaných tribometrů lze dosáhnout přesnosti kolem 10 %. Když vezmeme v potaz to, že samotné určování úhlu či zavěšené hmotnosti je zatíženo v amatérských podmínkách někdy i podobně velkou chybou, je zřejmé, že celková chyba měření je podstatně vyšší než výše uvedené statistické chyby, konkrétně v našem případě

⁷⁾ Brož, J.: *Základy fyzikálních měření (I)*. SPN, Praha 1983.

odhadujeme chybu kolem 15 % danou také tím, že reálná plocha či hmotnost zkoumaného tělesa jsou také o něco jiné než námi stanovené.

Výsledek experimentu silně závisí na zvoleném povrchu zkoumaného tělesa, povrchu skluzu a zkoumaném oboru parametrů. Dopředu nelze vyloučit prakticky žádné kvalitativní chování. Jediná „jistota“ je, že součinitel klidového tření by měl být vyšší než součinitel smykového tření. Nicméně závislost obou součinitelů by měla být velmi pozvolná, takřka konstantní. Při relativně malých hmotnostech může hrát velkou roli nedokonalé dosednutí třených ploch. Při vyšších hmotnostech sice těleso dosedne lépe, ale zase hrozí prohnutí kluzné plochy. Celkově mohou také ovlivnit měření jakékoliv nehomogenity třených povrchů.

Poznámky k došlým řešením

Většina řešitelů nezaznamenala žádnou závislost součinitelů ani na hmotnosti tělesa, ani na styčné ploše. Ti, kteří nějakou závislost zaznamenali, povětšinou nepřekonalí relativní rozdíl 10 % mezi největším a nejmenším naměřeným součinitelem, a je tedy diskutabilní, zda lze tuto závislost považovat za něco jiného než chybu měření. Při našem měření jsme se také pouze přiblížili k relativnímu rozdílu odpovídajícímu chybě měření, a tedy jsme neprokázali žádnou závislost součinitele smykového či klidového tření ani na hmotnosti tělesa, ani na velikosti styčné plochy.

Petr Sýkora

petr@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV. S ... spinová precese (6 bodů; průměr 5,00; řešilo 6 studentů)

Uvažujme částici se spinem $1/2$ v magnetickém poli, které míří ve směru osy z , $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, a zanedbejme všechny stupně volnosti kromě těch spinových. Jako jeden příklad báze, kterou zde můžeme zvolit, je dvojice vektorů s ostrou hodnotou projekce spinu na osu z : $|S_3 = 1/2\rangle$, $|S_3 = -1/2\rangle$. Hamiltonián příslušný této částici lze napsat ve tvaru

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{S}_3,$$

kde $\omega = eB/2m$.

- a) Napište vlastní vektory a vlastní čísla hamiltoniánu \hat{H} . Určete, jak působí hamiltonián na obecný vektor $|\psi\rangle = a|S_3 = 1/2\rangle + b|S_3 = -1/2\rangle$. Taktéž vypočtete, jak působí operátor

$$\hat{U}(t, 0) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar).$$

- b) Předpokládejme, že v čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu s ostrou hodnotou z -ové projekce spinu, tj. $|\psi(0)\rangle = |S_3 = 1/2\rangle$. Určete, v jakém stavu se bude nacházet v čase $t = \tau$ a s jakou pravděpodobností naměříme částici ve stavu $|S_3 = 1/2\rangle$ a s jakou v $|S_3 = -1/2\rangle$.
- c) V případě, že v čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu s ostrou hodnotou projekce spinu na osu y nahoru, tj. ve stavu $|S_2 = 1/2\rangle$, určete, v jakém stavu se bude nacházet v čase $t = \tau$. Určete také pravděpodobnosti, že při měření spinu ve směru y naměříme hodnoty $+1/2$, resp. $-1/2$.

Definujme střední hodnotu operátoru vztahem

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_j w_j A_j,$$

kde w_j je pravděpodobnost, že naměříme hodnotu A_j . (Rozmyslete si, že je to přirozená definice střední hodnoty.) Předpokládejte, že se v čase $t = 0$ nachází částice ve stavu s ostrou hodnotou projekce spinu na osu y nahoru, tj. ve stavu $|S_2 = 1/2\rangle$.

- d) Určete střední hodnoty operátorů spinu, tj. $\langle \hat{S}_1 \rangle$, $\langle \hat{S}_2 \rangle$ a $\langle \hat{S}_3 \rangle$ v čase $t = 0$.
 e) Ty samé střední hodnoty vypočítejte v čase $t = \tau$. Okomentujte, jak výsledek souvisí s názvem úlohy.

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

- a) Protože hamiltonián je až na násobení reálným číslem $\hbar\omega$ přímo operátor třetí komponenty impulsmomentu \hat{S}_3 , má s ním společné vlastní vektory a vlastní čísla jsou

$$\begin{aligned}\hat{H}|S_3 = 1/2\rangle &= E_+|S_3 = 1/2\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|S_3 = 1/2\rangle, \\ \hat{H}|S_3 = -1/2\rangle &= E_-|S_3 = -1/2\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega|S_3 = -1/2\rangle.\end{aligned}$$

Působení hamiltoniánu na obecný vektor $|\psi\rangle$ je nyní už jasné.

Operátor $\hat{U}(t, 0)$ je funkce \hat{H} . Ze seriálu víme, že vlastní vektory jsou identické s vlastními vektory \hat{H} . Vlastní čísla pak nejsou nic jiného než příslušné funkce energie.

$$\begin{aligned}\hat{U}(t, 0)|S_3 = 1/2\rangle &= \exp(-iE_+t/\hbar)|S_3 = 1/2\rangle = \exp(-\frac{1}{2}i\omega t)|S_3 = 1/2\rangle, \\ \hat{U}(t, 0)|S_3 = -1/2\rangle &= \exp(-iE_-t/\hbar)|S_3 = -1/2\rangle = \exp(\frac{1}{2}i\omega t)|S_3 = -1/2\rangle.\end{aligned}$$

- b) Operátor časového vývoje z času $t = 0$ do času $t = \tau$ je pro náš systém přesně $\hat{U}(\tau, 0)$ (proto jsme ho v první úloze zkonstruovali). Už víme, jak působí na vektory $|S_3 = \pm 1/2\rangle$, které jsou pro něj vlastními. Tudíž pro vektor $|\psi(0)\rangle = |S_3 = 1/2\rangle$ dostaneme

$$|\psi(\tau)\rangle = \hat{U}(\tau, 0)|S_3 = 1/2\rangle = \exp(-\frac{1}{2}i\omega\tau)|S_3 = 1/2\rangle.$$

Bystrým okem snadno nahlédneme, že je to náš starý dobrý vektor $|S_3 = 1/2\rangle$ pouze vynásobený fázovým faktorem. Proto nás nepřekvapí, že pravděpodobnost, že naměříme v čase $t = \tau$ hodnotu z -ové komponenty spinu $+1/2$, bude

$$w_+ = |\langle S_3 = 1/2 | \exp(-\frac{1}{2}i\omega\tau) | S_3 = 1/2 \rangle|^2 = 1.$$

Logicky pak $w_- = 0$. Analogický výsledek bychom dostali i pro počáteční stav $|S_3 = -1/2\rangle$. Tento výsledek má obecnější platnost. Vektor se až na fázový faktor při časovém vývoji nemění, pokud je vlastním vektorem operátoru časového vývoje.

- c) Zde je výhodné rozložit si vektor $|S_2 = 1/2\rangle$ do báze tvořené vektory $|S_3 = \pm 1/2\rangle$. Vybaveni znalostmi ze seriálu nebudeme mít s tímto rozkladem problém.

$$|S_2 = 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = -1/2\rangle.$$

Analogicky pro druhý z vektorů platí

$$|S_2 = -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = 1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = -1/2\rangle.$$

Časový vývoj je opět zprostředkován operátorem $\widehat{U}(\tau, 0)$, kterým zapůsobíme na vektor $|\psi(0)\rangle = |S_2 = 1/2\rangle$. A teď je již jasné, proč je rozklad do námi zvolené báze výhodný.

$$\begin{aligned} |\psi(\tau)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{U}(\tau, 0)|S_3 = 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{U}(\tau, 0)|S_3 = -1/2\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|S_3 = 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|S_3 = -1/2\rangle. \end{aligned}$$

Pravděpodobnosti naměření y -ové komponenty spinu $\pm 1/2$ potom jsou

$$\begin{aligned} w_+ &= |\langle S_2 = 1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\exp\left(-\frac{1}{2}i\omega\tau\right) + \exp\left(\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|^2 = \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega\tau\right), \\ w_- &= |\langle S_2 = -1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\exp\left(-\frac{1}{2}i\omega\tau\right) - \exp\left(\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|^2 = \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\tau\right). \end{aligned}$$

- d) Velmi podobným postupem, jakým jsme řešili předchozí úlohy, budeme pokračovat i zde. Z definice dostaneme pro střední hodnotu operátoru \widehat{S}_i v čase $t = 0$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}_1 \rangle &= |\langle S_1 = 1/2|S_2 = 1/2\rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_1 = -1/2|S_2 = 1/2\rangle|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \\ \langle \widehat{S}_2 \rangle &= |\langle S_2 = 1/2|S_2 = 1/2\rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_2 = -1/2|S_2 = 1/2\rangle|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \\ \langle \widehat{S}_3 \rangle &= |\langle S_3 = 1/2|S_2 = 1/2\rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_3 = -1/2|S_2 = 1/2\rangle|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že jsme dostali přesně to, co bychom intuitivně očekávali.

- e) Podstatně zajímavější je situace v případě, že necháme systém časově vyvíjet. Postup výpočtu je však zcela analogický. Systém tentokrát nemáme popsáný počátečním vektorem $|\psi(0)\rangle = |S_2 = 1/2\rangle$, ale časově vyvinutým vektorem $|\psi(\tau)\rangle$, který již známe

$$|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|S_3 = 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|S_3 = -1/2\rangle.$$

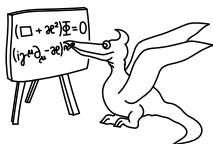
Počítáním maticových elementů dostaneme

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}_1 \rangle &= |\langle S_1 = 1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_1 = -1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin\omega\tau, \\ \langle \widehat{S}_2 \rangle &= |\langle S_2 = 1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_2 = -1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\omega\tau, \\ \langle \widehat{S}_3 \rangle &= |\langle S_3 = 1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_3 = -1/2|\psi(\tau)\rangle|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Tyto výsledky ospravedlňují název úlohy. Střední hodnoty spinového vektoru „konají“ precesní pohyb v rovině xy , střední hodnota projekce na osu z zůstává neměnná.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 6: Pokročilé partie kvantové mechaniky

V předposledním díle našeho seriálu letem světem zabrouzdáme do některých složitějších partií kvantové mechaniky.

Poruchová teorie

Jednou ze základních metod výpočtů v kvantové mechanice je tzv. *poruchová teorie* (též *perturbační teorie*). Její princip je jednoduchý. Mějme nějaký systém popsaný hamiltoniánem \hat{H}_0 a předpokládejme, že známe jeho vlastní vektory $|\psi_n\rangle$ i vlastní čísla E_n^0 . Klíčová otázka pak zní, jak se situace změní, pokud je v systému malá porucha popsaná hamiltoniánem $\hat{H}' \ll \hat{H}_0$. Obecně se tato metoda provádí iteračně, tj. v prvním kroku zjistíme první opravu k energii i k vlastním vektorům a v každém dalším kroku tuto korekci zpřesňujeme. Samozřejmě s tím, že druhá oprava je o hodně menší než ta první atd. Zájemce, kteří chtějí tento nástroj solidně ovládnout, odkazují na některé z učebnic kvantové mechaniky. Kvůli nedostatku prostoru zde jen pro ilustraci uvedu, jakým způsobem se počítá první oprava k energii systému. Jak i zde uvidíme, často se stane, že se původní energie v důsledku poruchy rozštěpí.

Korekce k energii E_n^0 v důsledku poruchy má v prvním řádu tvar

$$\Delta E_n = \langle \psi_n | \hat{H}' | \psi_n \rangle,$$

kde $|\psi_n\rangle$ je vlastní stav původního hamiltoniánu \hat{H}_0 příslušejícího energii E_n^0 . Samozřejmě tato korekce může záviset i na dalších kvantových číslech, což je příčinou již zmíněného rozštěpení energetických hladin. Konkrétní výpočet si ukažme na příkladě.

Uvažujme částici v radiálním elektrostatickém poli (často se mu říká coulombické pole), jako příklad může sloužit elektron v atomu vodíku. Příslušný hamiltonián má tvar

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Vlastní energie jsou

$$E_n^0 = -\frac{m_e^2 e^4}{8h^2 \epsilon_0^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Operátory \hat{H}_0 , \hat{L}^2 a \hat{L}_3 tvoří úplnou množinu pozorovatelných, vlastní vektory můžeme označit jako $|n, l, m\rangle$. Přesto pro pevné n , což je tzv. radiální kvantové číslo, náleží všem vektorům $|n, l, m\rangle$ stejná energie E_n^0 (prostě energie E_n^0 nezávisí ani na l , ani na m). Toto berme jako vstupní fakta našeho problému.

Vložme tento systém do vnějšího magnetického pole, které reaguje s orbitálním impulsmomentem a způsobí malou interakci popsanou hamiltoniánem

$$\hat{H}' = \mu \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}.$$

Úkolem je pak určit, jak se změní energetické spektrum v důsledku této malé poruchy. Protože volba souřadnicových os je zcela na nás, zvolíme výhodně osu z ve směru vektoru \mathbf{B} . Podle definice má pak změna energie podobu

$$\Delta E_n = \langle n, l, m | \widehat{H}' | n, l, m \rangle = \mu B \langle n, l, m | \widehat{L}_3 | n, l, m \rangle,$$

kde $B = |\mathbf{B}|$. Vypočítat tento maticový element je však nadmíru snadné, neboť vektory $|n, l, m\rangle$ jsou vlastními vektory \widehat{L}_3 , tedy

$$\Delta E_n = \mu B m.$$

To je zvláštní výsledek. Korekce energie k n -té hladině sice nezávisí na radiálním kvantovém čísle n , nicméně závisí na třetí komponentě orbitálního impulsmomentu m . To tedy znamená, že každá z energií E_n^0 se $(2l + 1)$ -krát rozštěpí. Výsledná energie se započtením první poruchy má tedy podobu

$$E_{n,m} = E_n^0 + \mu B m, \quad \text{kde } m \in \{-l, -l + 1, \dots, l\}.$$

Např. pokud je elektron v prvním excitovaném stavu ($l = 1$), jeho druhá energetická hladina ($n = 2$) se třikrát rozštěpí

$$E_2^0 = -\frac{m_e^2 e^4}{32h^2 \epsilon_0^2} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} E_{2,-1} = E_2^0 - \mu B, \\ E_{2,0} = E_2^0, \\ E_{2,1} = E_2^0 + \mu B. \end{cases}$$

Druhé kvantování

Doposud jsme kvantovou mechaniku formulovali v termínech operátorů a jejich vlastních vektorů. Tomuto přístupu se říká *první kvantování*. Jiný postup při budování kvantové mechaniky, který je s tím prvním samozřejmě ekvivalentní, je tzv. *druhé kvantování*. Důraz je zde kladen na stavové vektory a jejich částicovou interpretaci. Základem je tzv. *vakuum*, což je stav systému, který nemá žádnou částici. Nejčastěji ho označujeme jako $|0\rangle$. Systém, v němž máme částici se spinem s a hybností p , popíšeme vektorem $|p, s\rangle$. Tento vektor dostaneme z vakua pomocí *kreačního operátoru* $\widehat{a}^\dagger(p, s)$, který tuto částici vytvoří

$$|p, s\rangle = \widehat{a}^\dagger(p, s)|0\rangle.$$

Opačnou práci vykoná *anihilační operátor* $\widehat{a}(p, s)$, který danou částici vymaže ze světa

$$\widehat{a}(p, s)|p, s\rangle = |0\rangle.$$

Samozřejmě na vektor $|p, s\rangle$ lze zapůsobit dalším kreačním operátorem $\widehat{a}^\dagger(p', s')$, jenž vytváří částici s hybností p' a spinem s' . Výsledkem pak bude vektor popisující dvoučásticový systém

$$\widehat{a}^\dagger(p', s')|p, s\rangle = |p, s; p', s'\rangle.$$

Naopak zapůsobením anihilačního operátoru $\widehat{a}(p', s')$ na výsledný stav dostaneme

$$\widehat{a}(p', s')|p, s; p', s'\rangle = |p, s\rangle.$$

Pokud zapůsobíme anihilačním operátorem částice na vektor, který tuto částici neobsahuje, nemá co anihilovat a celý vektor zruší, tj.

$$\hat{a}(p', s')|p, s\rangle = 0.$$

Kreační a anihilační operátory splňují velmi důležité relace

$$\begin{aligned} [\hat{a}(p, s), \hat{a}^\dagger(p, s)] &= 1, & [\hat{a}(p, s), \hat{a}^\dagger(p', s')] &= 0, \\ [\hat{a}^\dagger(p, s), \hat{a}^\dagger(p, s)] &= 0, & [\hat{a}(p, s), \hat{a}(p, s)] &= 0 \end{aligned}$$

a navíc pro ně platí, že jsou k sobě hermitovskys sdružené (proto ten křížek u kreačního operátoru). Často se zde logika věcí obrací, tj. dva operátory, které jsou spojeny hermitovským sdružením a splňují výše uvedené relace, nazveme kreačním a anihilačním. Částicová interpretace však není jediná možná. Jak za chvíli uvidíme, má smysl je definovat i pro systém jako celek, který je v n -tém excitovaném stavu popsán vektorem $|n\rangle$. Kreační operátor potom tento systém posune o hladinu nahoru, anihilační naopak o hladinu dolů⁸

$$a^\dagger|n\rangle \rightarrow |n+1\rangle, \quad a|n\rangle \rightarrow |n-1\rangle.$$

Již víme, že všechny vektory z Hilbertova prostoru jdou kreovat z vakua $|0\rangle$. Jak ale v tomto formalismu naložit s operátory? No, vtip je právě v tom, že je vyjádříme pomocí kreačních a anihilačních operátorů! A u těch už víme, jak na daný stav působí. Proto v jistých případech je tento postup velmi výhodný při hledání vlastních stavů a vlastních hodnot.

Vše si ukážeme na klasickém příkladě, jež lze najít ve všech základních učebnicích.

Lineární harmonický oscilátor

Lineární harmonický oscilátor je popsán hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\hat{X}^2.$$

Samozřejmě úlohu nalezení vlastních vektorů a vlastních čísel lze řešit standardním způsobem, nicméně příslušná bezčasová Schrödingerova rovnice je velmi ošklivou diferenciální rovnicí a není lehké ji řešit. Druhé kvantování vyžaduje nalezení kreačních a anihilačních operátorů tohoto systému⁹. Rozumný nástřel by mohl být lineární kombinace operátorů \hat{X} a \hat{P} (ty vystupují v hamiltoniánu)

$$\hat{a} = \alpha\hat{X} + \beta\hat{P}, \quad \hat{a}^\dagger = \alpha^*\hat{X} + \beta^*\hat{P}.$$

Platnosti komutačních relací a rozměrové důvody ihned vedou k výsledku

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left(\hat{X} + \frac{i}{M\omega}\hat{P} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left(\hat{X} - \frac{i}{M\omega}\hat{P} \right).$$

⁸⁾ Rovnítko není v těchto vztazích kvůli tomu, že se zde může objevit nějaký normalizační faktor.

⁹⁾ Zvědavější čtenáře by mohla napadnout otázka, zda takových dvojic operátorů nemůžeme najít více. Vezte, že můžeme, nicméně všechny jsou unitární ekvivalentní, tj. jednu dvojici na druhou lze převést pomocí unitární transformace.

Zpětně lze také vyjádřit \hat{X} a \hat{P} jako

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{P} = i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}).$$

Odtud již snadno dostaneme i podobu hamiltoniánu

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right).$$

Všechny stavy lineárního harmonického oscilátoru dostaneme zapůsobením kreačními operátory na vakuum. Protože zde máme pouze jeden kreační operátor (žádné částice zde nejsou), každý stav lze charakterizovat pomocí čísla n , které říká, kolikrát jsme zapůsobili kreačním operátorem na vakuum¹⁰

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger \right)^n |0\rangle.$$

Na základě této definice pak snadno zjistíme, že platí

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle.$$

Kombinovaným zapůsobením dostaneme¹¹

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle.$$

Ale to je přesně kombinace kreačního a anihilačního operátoru, která se vyskytuje ve výrazu pro hamiltonián. Jeho působení na vektor $|n\rangle$ dává

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle.$$

Vektor $|n\rangle$ je tedy vlastní vektor hamiltoniánu příslušný vlastní hodnotě $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Vlastní energie jsme tedy dostali poměrně snadno, vlastní stavy známe jen v termínech kreačních operátorů. Nalezení příslušných vlnových funkcí $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ je úloha složitější a nebudeme ji zde řešit.¹²

¹⁰⁾ Číselný faktor je zde zvolen tak, aby vektory byly normovány na jednotku. Vektory jsou samozřejmě na sebe také kolmé, tj. platí $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$.

¹¹⁾ Tento operátor se často označuje jako $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ a nazývá se *operátor počtu částic*.

¹²⁾ Postup je následující. Vyjdeme z rovnice $\hat{a}|0\rangle = 0$, kterou přepíšeme v x -reprezentaci

$$\left(x + \frac{\hbar}{M\omega} \frac{d}{dx} \right) \psi_0(x) = 0,$$

kde $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$. Řešení této rovnice je funkce

$$\psi_0(x) = \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{M\omega}{2\hbar} x^2 \right).$$

V dalších krocích budeme na tuto funkci působit kreačními operátory vyjádřenými v x -reprezentaci, což vždy povede na diferenciální rovnici, vždy však o poznání snazší, než by byla bezčasová Schrödingerova rovnice pro tento případ.

Na tomto místě je nutné udělat drobnou poznámku. Obě formulace kvantové mechaniky – první i druhé kvantování – jsou zcela ekvivalentní a dávají identické výsledky. První kvantování je více intuitivní, protože máme pod kontrolou hodnoty fyzikálně měřených veličin. V druhém kvantování se některé operátory špatně vyjadřují pomocí kreačních a anihilačních operátorů, nicméně příklad lineárního harmonického oscilátoru ukázal, že tento postup je často výhodnější. Navíc druhé kvantování představuje jakýsi spojovací můstek mezi kvantovou mechanikou a kvantovou teorií pole.

Fermiony a bosony

V předchozích dílech jsme již zavedli pojem spinu částice. Přesto jsme prozatím neviděli žádný velký rozdíl mezi stavem popisujícím částici se spinem $1/2$ či 1 . Fundamentální rozdíl zde však je a souvisí se *vztahem mezi spinem a statistikou*. Ten říká, že částice s poločíselným spinem – nazýváme je *fermiony* – se mohou nacházet pouze v antisymetrických stavech. Naopak *bosony*, což jsou částice s celočíselným spinem, mohou být pouze v symetrických stavech.¹³ Hned to vysvětlíme na dvoučásticovém příkladu.

Mějme dvě částice, které samostatně popíšeme pomocí stavových vektorů $|\psi_1\rangle$, resp. $|\psi_2\rangle$. Pokud tyto částice popisujeme dohromady jako dvoučásticový systém, pak zavedeme vektor

$$|\psi_1, \psi_2\rangle \equiv |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle.$$

Analogickou situaci jsme už zažili při skládání impulsmomentů. Pokud jsou částice stejné¹⁴ a navzájem je vyměníme, může se změnit jen fáze vlnové funkce, neboť její absolutní hodnota, která určuje hustotu pravděpodobnosti a výsledky experimentů, musí zůstat stejná.

$$|\psi_2, \psi_1\rangle = e^{i\varphi} |\psi_1, \psi_2\rangle.$$

Při opětovné výměně částic se fáze znovu změní o φ , ale musíme dostat původní vlnovou funkci, takže platí $e^{2i\varphi} = 1$, a tedy jsou jediné dvě možnosti $e^{i\varphi} = \pm 1$. Kladné znaménko odpovídá bosonům, záporné fermionům

$$\text{fermiony } |\psi_2, \psi_1\rangle = -|\psi_1, \psi_2\rangle, \quad \text{bosony } |\psi_2, \psi_1\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle.$$

Obecně při prohození dvou stejných fermionů se změní znaménko vlnové funkce, u bosonů ne. Toto vede k naprosto zásadnímu tvrzení. Zvolme teď $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle = |\psi\rangle$, tj. obě částice jsou ve stejném stavu. V případě bosonů se nic zajímavého neděje, dvoučásticový stav je popsán vektorem

$$|\psi_1, \psi_2\rangle = |\psi_2, \psi_1\rangle = |\psi, \psi\rangle.$$

V případě fermionů je situace daleko zajímavější. Jednoduchou manipulací totiž dostaneme

$$|\psi, \psi\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle = -|\psi_2, \psi_1\rangle = -|\psi, \psi\rangle.$$

Takže jako výsledek dostaneme $|\psi, \psi\rangle = 0$. Dva fermiony se tedy nemohou nacházet ve stejném stavu, tj. nemohou mít všechna kvantová čísla stejná. Tuto zkušenost máme již ze středoškolské

¹³⁾ Ačkoliv tento teorém je použitelný na úrovni kvantové mechaniky, jeho odvození vyžaduje aparát kvantové teorie pole.

¹⁴⁾ Případem různých částic se zde zabývat nebudeme, ale tento formalismus se dá rozšířit i na ně.

chemie při kreslení chlívčeků a šipek v elektronových konfiguracích atomů. Sada chlívčeků představuje stav s konkrétní hodnotou l a každý z chlívčeků pak stav s daným m . Každá z nakreslených šipek představuje elektron, jenž je ve vlastním stavu operátorů \hat{L}^2 a \hat{L}_3 . Elektron má však ještě spin, jehož projekce na třetí osu může nabývat hodnoty $\pm 1/2$. To znamená, že pro pevné l a m (tj. do každého chlívčku) můžeme nakreslit dva elektrony – jeden s projekcí spinu nahoru a druhý s projekcí spinu dolů. Tomu také odpovídají příslušné šipky. Proč ale nemůžeme dvě stejné šipky nakreslit do jednoho chlívčku? Odpověď jsme dostali před chvílí. Znamenalo by to totiž, že tyto elektrony mají naprosto shodná kvantová čísla a nacházely by se v úplně stejném stavu. To však nelze, neboť elektrony jsou fermiony. Kdyby byly bosony, situace by byla úplně jiná, v každém chlívčku by klidně dvě stejné šipky být mohly (tj. dva bosony ve stejném stavu). A nejen dva, i milion stejných elektronů by se tam vešlo. U bosonů totiž žádné omezení není.

Toto vše se dá formulovat i na úrovni kreačních a anihilačních operátorů. Označme $\hat{a}^\dagger(\psi)$ kreační operátor částice popsané stavem $|\psi\rangle$, analogicky anihilační operátor je $\hat{a}(\psi)$. Potom platí

$$|\psi_1, \psi_2\rangle = \hat{a}^\dagger(\psi_1)\hat{a}^\dagger(\psi_2)|0\rangle$$

a rovněž pro anihilační operátor platí stejné relace, např.

$$\hat{a}(\psi_2)|\psi_1, \psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \quad \text{či} \quad \hat{a}(\psi_1)|\psi_2\rangle = 0 \quad \text{pro } |\psi_1\rangle \neq |\psi_2\rangle.$$

V případě bosonů opět platí intuitivní vztahy, nicméně u fermionů je situace o trochu složitější. Víme totiž, že platí

$$\hat{a}^\dagger(\psi_1)\hat{a}^\dagger(\psi_2)|0\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle \neq |\psi_2, \psi_1\rangle = \hat{a}^\dagger(\psi_2)\hat{a}^\dagger(\psi_1)|0\rangle.$$

Odtud vidíme, že $\hat{a}^\dagger(\psi_1)\hat{a}^\dagger(\psi_2) \neq \hat{a}^\dagger(\psi_2)\hat{a}^\dagger(\psi_1)$.

Vlastnosti fermionů i bosonů na úrovni stavových vektorů se dají přenést i na úroveň kreačních a anihilačních operátorů. Pro bosony platí

$$[\hat{a}(\psi), \hat{a}^\dagger(\psi)] = 1, \quad [\hat{a}(\psi), \hat{a}(\psi)] = [\hat{a}^\dagger(\psi), \hat{a}^\dagger(\psi)] = 0.$$

Pro operátory dvou stejných částic v různých stavech (tzn. jsou to stejné částice, jen mají např. jinou orientaci spinu či orbitální impulsmoment) platí

$$[\hat{a}(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)] = [\hat{a}(\psi_1), \hat{a}(\psi_2)] = [\hat{a}^\dagger(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)] = 0.$$

Všechny tyto vztahy se dají zkonenzovat do následujících

$$[\hat{a}(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)] = \delta_{\psi_1\psi_2}, \quad [\hat{a}(\psi_1), \hat{a}(\psi_2)] = [\hat{a}^\dagger(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)] = 0,$$

kde $\delta_{\psi_1\psi_2}$ je naše staré známé Kroneckerovo delta.

Relace pro fermiony jsou téměř stejné, jen se komutátory nahradí antikomutátory¹⁵, což je zcela zásadní rozdíl, tj.

$$\{\hat{a}(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)\} = \delta_{\psi_1\psi_2}, \quad \{\hat{a}(\psi_1), \hat{a}(\psi_2)\} = \{\hat{a}^\dagger(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)\} = 0.$$

¹⁵⁾ Pro připomenutí – komutátor je definován jako $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$, zatímco antikomutátor $\{a, b\} = a \cdot b + b \cdot a$.

Z těchto vztahů dostaneme ihned i naše zjištění, že dvě částice se nemohou nacházet ve stejném kvantovém stavu. Z poslední antikomutační relace máme

$$\{\hat{a}^\dagger(\psi), \hat{a}^\dagger(\psi)\} = \hat{a}^\dagger(\psi)\hat{a}^\dagger(\psi) + \hat{a}^\dagger(\psi)\hat{a}^\dagger(\psi) = 0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{a}^\dagger(\psi)]^2 = 0,$$

pak platí

$$|\psi, \psi\rangle = \hat{a}^\dagger(\psi)\hat{a}^\dagger(\psi)|0\rangle = [\hat{a}^\dagger(\psi)]^2|0\rangle = 0.$$

Úloha VI. S ... lineární harmonický oscilátor ve vnějším poli

Uvažujme lineární harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\hat{X}^2.$$

a) Určete maticové elementy

$$X_{mn} = \langle m|\hat{X}|n\rangle, \quad P_{mn} = \langle m|\hat{P}|n\rangle,$$

kde $|n\rangle$ (resp. $|m\rangle$) jsou vektory zkonstruované v textu seriálu.

b) Vypočítejte střední hodnotu energie ve stavu $|n\rangle$ a určete, jaká část této energie pochází od kinetického členu $\hat{P}^2/2M$ a jaká od členu potenciální energie $M\omega^2\hat{X}^2/2$.

Vložme celý systém do slabého homogenního elektrického pole. Interakce se systémem je pak popsána hamiltoniánem

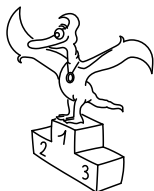
$$\hat{H}' = -F\hat{X},$$

kde F je konstanta a platí $\hat{H}' \ll \hat{H}_0$.

c) Vypočítejte v prvním řádu poruchové teorie opravu k energii n -té hladiny.

d) Řešte tuto úlohu přesně a srovnajte výsledek s poruchovým řešením.

Nápověda: Jak neporušený hamiltonián \hat{H}_0 , tak i celkový hamiltonián $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ jsou translačně invariantní, tj. hodnota energie se nezmění, pokud operátor souřadnic posuneme o konstantní hodnotu $\hat{X} \rightarrow \hat{X} - \xi$.



Pořadí řešitelů po IV. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	5	5	8	6	35	<i>100</i>	136
1. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	2	3	–	–	4	7	6	22	<i>97</i>	116
2. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	2	2	2	5	2	3	4	20	<i>71</i>	91
3. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>86</i>	69
4. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	6	6	<i>97</i>	62
5. <i>Tomáš Tintěra</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>98</i>	55
6. <i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	–	–	–	–	–	–	6	6	<i>96</i>	54
7. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	2	–	1	–	5	–	11	<i>69</i>	50
8. <i>František Příbýl</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>49</i>	48
9. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>79</i>	42
10. <i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>77</i>	37
11. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>68</i>	32
12. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>64</i>	27
13. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>100</i>	23
14. <i>Michal Pavelka</i>	G Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>48</i>	21
15. <i>Jakub Hromádka</i>	G Frýdlant nad Ostravicí	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>79</i>	19
16. <i>Petr Šácha</i>	G Tachov	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>60</i>	15
17. <i>Aleš Pilgr</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	<i>83</i>	10
18. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>58</i>	7
19. <i>Martin Judiny</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>42</i>	5
20. <i>Matyáš Řehák</i>	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>36</i>	4
21.–22. <i>Pavel Kunšta</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>25</i>	2
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>22</i>	2

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	5	5	8	6	35	<i>100</i>	136
1. <i>Petr Cagaš</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	2	3	4	2	4	6	2	23	<i>56</i>	67
2. <i>Ján Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	2	–	1	3	4	–	14	<i>61</i>	60
3. <i>Jana Baxová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	6	–	6	<i>69</i>	38
4. <i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	2	2	5	1	4	7	–	21	<i>72</i>	21
5. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	–	–	–	–	–	6	–	6	<i>67</i>	14
6. <i>Šimona Laňková</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>28</i>	5
7.–8. <i>Lumír Gago</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>67</i>	4
<i>Tomáš Kohlschttter</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>40</i>	4
9. <i>Vojtěch Mrázek</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>50</i>	2

Kategorie třetích ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ		
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK	4	3	4	5	5	8	6	35	100	136
1.	<i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	5	–	–	6	11	<i>91</i>	102		
2.	<i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	2	–	–	5	–	–	–	7	<i>80</i>	69		
3.	<i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>82</i>	64		
4.	<i>Lukáš Ledvína</i>	PČG Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>82</i>	59		
5.	<i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>88</i>	58		
6.	<i>Airidas Korolkovas</i>		3	3	3	4	–	–	–	13	<i>85</i>	39		
7.	<i>Pavel Trudič</i>	SPŠ Hronov	–	3	1	–	–	–	–	4	<i>73</i>	38		
8.	<i>Jakub Michálek</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	<i>90</i>	35		
9.	<i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	1	3	–	–	0	–	–	4	<i>43</i>	33		
10.	<i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	2	–	–	2	1	6	–	11	<i>64</i>	28		
11.–12.	<i>Tomáš Talanda</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>75</i>	24		
	<i>Jan Valášek</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>73</i>	24		
13.	<i>Juraj Hartman</i>	Jiráskovo G Náchod	2	1	–	2	–	–	–	5	<i>61</i>	23		
14.	<i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>88</i>	22		
15.–16.	<i>Jakub Marian</i>	G Litoměřická Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>52</i>	12		
	<i>Pavel Motal</i>	SPŠ a SOU Kuřim	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>28</i>	12		
17.	<i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>73</i>	11		

Kategorie druhých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ		
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK	4	3	4	5	5	8	6	35	100	136
1.	<i>Helena Paschkeová</i>	G Terezy Novákové, Brno	2	3	–	2	2	6	–	15	<i>57</i>	63		
2.	<i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	2	1	2	2	0	6	–	13	<i>51</i>	55		
3.	<i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	1	3	1	3	3	–	13	<i>49</i>	49		
4.	<i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>94</i>	48		
5.	<i>Peter Vanya</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	2	1	5	–	10	<i>46</i>	45		
6.	<i>Katarína Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	2	–	–	–	5	–	10	<i>69</i>	35		
7.	<i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	–	–	–	1	1	6	–	8	<i>67</i>	33		
8.	<i>Alžběta Pechová</i>	SPŠS Vsetín	–	1	–	3	0	7	–	11	<i>62</i>	31		
9.	<i>Jana Figulová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	2	–	–	1	6	–	11	<i>52</i>	25		
10.	<i>Michal Maizner</i>	G Žilina - Vlčince	2	2	4	2	4	7	–	21	<i>72</i>	21		
11.	<i>Dana Suchomelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>75</i>	18		
12.	<i>Jan Šedek</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>69</i>	11		
13.	<i>Lenka Bendová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>83</i>	10		
14.	<i>Radek Kříček</i>	G Děčín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>45</i>	9		
15.	<i>Jan Hylmar</i>	SSŠ výp. techniky Praha	2	3	–	0	3	–	–	8	<i>47</i>	8		
16.	<i>Dmytro Mishchuk</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>22</i>	6		
17.–18.	<i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>100</i>	3		
	<i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>43</i>	3		

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.