

Milí řešitelé!

FYKOSí XXI. ročník se dobral svého konce. Doufáme, že se vám líbil, bylo vám radostí řešit naše úlohy a že jste se také něčemu novému přiučili. Do budoucna se těšíme, až se s některými z vás, maturantů, budeme setkávat na chodbách naší fakulty a třeba i při organizování semináře. Ty mladší pak srdečně zveme do dalšího ročníku, jehož první sérii právě dokončujeme.

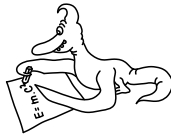
Obsahem této závěrečné brožurky jsou řešení 5. a 6. série včetně výsledkových listin. Ale pokud jste se neumístili tak vysoko, jak jste si v září představovali, rozhodně nesmutněte. Vězte, že není důležité vyhrát, ale zúčastnit se. A ve FYKOSu to platí dvojnásob. Vám všem patří naše gratulace za projevenou odvalu pustit se do toho. I nadále bychom byli rádi, kdybyste svůj zájem o fyziku rozvíjeli třeba řešením FYKOSu. A nestyďte se říct i kamarádům.

Během prázdnin připravíme ročenku XXI. ročníku, ve které naleznete všechny úlohy včetně řešení, reportáže ze soustředění i Týdne s aplikovanou fyzikou.

Připomínáme, že **29. září** se koná tradiční akce **Jeden den s fyzikou**, na které i my budeme mít krátký program.

Za všechny organizátory vám pěkné prázdniny přeje

Tomáš Jirotko



Řešení V. série

Úloha V.1 ... pozor, neudus se (4 body; průměr 3,38; řešilo 21 studentů)

Vstup do Rámy je otvor uprostřed jedné podstavy. Předtím, než vstoupíš a sundáš si skafandr, si však rozmysli, zda je na jeho ose dýchateľný vzduch. Jaká je jeho hustota v porovnání s hustotou na vnitřním povrchu, je-li teplota vzduchu všude stejná?

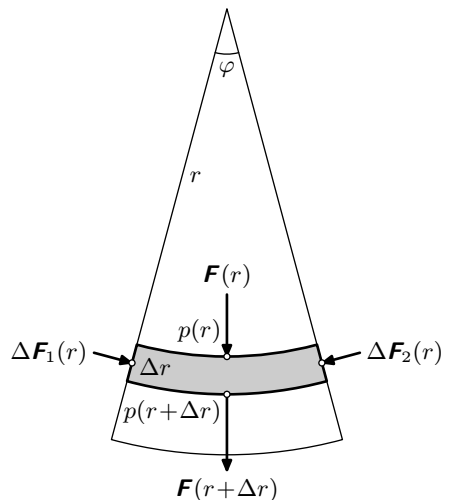
Tvrzení A. C. Clarka, že je na ose nulový tlak, zarazilo Martina Formánka i Jakuba Bendu.

Pro řešení je podstatný předpoklad, že vzduch uvnitř Rámy se otáčí spolu s Rámou. Tento stav je rovnovážný a dospěje se k němu v důsledku tření mezi vzduchem a okolím.

Ráma je symetrický dle své osy, stejně tak bude symetrické rozmístění molekul vzduchu. Tlak p i hustota ρ vzduchu závisí jen na vzdálenosti r od osy Rámy, přičemž dle zadání $p(R) = 1 \text{ atm}$ ($R = 8 \text{ km}$ je poloměr Rámy).

Z Rámovy atmosféry vyřízneme výseč s vrcholovým úhlem φ (viz obr. 1). Tuto výseč dále rozporcujeme na vrstvičky široké Δr . Rozeberme nyní síly působící na vzduch uvnitř jedné takové vrstvičky, která je vzdálená r od osy.

Tvar vrstvy je výhodný, neboť tlak vzduchu u horní strany je všude stejný, a to $p(r)$. Podobně u dolní strany je tlak $p(r + \Delta r)$. Šířku Δr zvolíme co nejmenší tak, aby se tlak a hustota vzduchu uvnitř



Obr. 1

vrstvičky měnily co nejméně. Toto nás bude také opravňovat bez komentáře zanedbávat sčítance úměrné $(\Delta r)^2$ (pokud se vám bude zdát, že jsme ve výpočtech na něco zapomněli, bude to pravděpodobně toto zanedbání). Řešení se podstatně zjednoduší pro malý vrcholový úhel φ (nejvýše 5°).

Plocha horní strany je $S(r) = r\varphi L$, kde L je délka Rámy, plocha dolní strany je $S(r + \Delta r) = (r + \Delta r)\varphi L$ a plocha boční strany je $\Delta S = \Delta r L$. Výslednici sil působících na horní stranu určíme snadno. Ačkoli každá elementární síla má jiný směr, směr libovolné síly se od svislého směru liší maximálně o $\varphi/2$ a $\cos(\varphi/2) \approx 1$ díky malosti φ . Tedy

$$F(r) = r\varphi L p(r) \quad \text{a také} \quad F(r + \Delta r) = (r + \Delta r)\varphi L p(r + \Delta r).$$

Výslednice sil působících na boční stranu (všechny elementární síly jsou rovnoběžné) má velikost $\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta r L p(r)$. Podstatná je výslednice sil působících na protější strany

$$|\Delta \mathbf{F}_1 + \Delta \mathbf{F}_2| = 2\Delta r L p(r) \sin(\varphi/2) \approx \Delta r \varphi L p(r).$$

Zbývá určit celkovou odstředivou sílu působící na vzduch o hmotnosti m ve vybrané vrstvě. Odstředivé zrychlení je rovno $\omega^2 r$ ($\omega = 2\pi/(4 \cdot 60) \text{ s}^{-1}$ je úhlová rychlost Rámy), tedy síla je $m\omega^2 r$. Hmotnost vzduchu vyjádříme pomocí hustoty $m = r\varphi L \Delta r \varrho(r)$. Jak plyne ze stavové rovnice ideálního plynu, hustota vzduchu (za předpokladu, že je ideální plyn) je přímo úměrná tlaku

$$\varrho(r) = \frac{M_m}{R_m T} p(r) \equiv A p(r),$$

kde $M_m = 28,96 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární hmotnost vzduchu, R_m je plynová konstanta a $T = 300 \text{ K}$ je teplota vzduchu. Pro přehlednost jsme zavedli konstantu A . Celková odstředivá síla působící na element vzduchu potom je

$$F_o = A\omega^2 r^2 \varphi L \Delta r p(r).$$

V rovnováze je celková síla působící na každou vrstvu vzduchu nulová, to implikuje rovnici

$$r\varphi L p(r) - (r + \Delta r)\varphi L p(r + \Delta r) + \Delta r \varphi L p(r) + A\omega^2 r^2 \varphi L \Delta r p(r) = 0,$$

po úpravě

$$\frac{p(r + \Delta r) - p(r)}{\Delta r} = \frac{A\omega^2 r^2 p(r)}{(r + \Delta r)} \approx A\omega^2 r p(r).$$

Této „přirůstkové rovnici“¹ vyhovuje řešení ve tvaru²

$$\frac{p(r)}{p(0)} = e^{A\omega^2 r^2/2}.$$

¹ Pro malé Δr přechází levá strana v derivaci $p'(r)$. Diferenciálního počtu znalí čtenáři tedy budou řešit diferenciální rovnici $p'(r) = A\omega^2 r p(r)$ separací proměnných

$$\int_{p(0)}^{p(r)} \frac{dp}{p} = \int_0^r A\omega^2 r dr.$$

² Jak se můžeme přesvědčit

$$\frac{p(r + \Delta r) - p(r)}{\Delta r} = \frac{p(0) \left(e^{A\omega^2 (r + \Delta r)^2/2} - e^{A\omega^2 r^2/2} \right)}{\Delta r} \approx \frac{p(0) e^{A\omega^2 r^2/2} \left(e^{A\omega^2 r \Delta r} - 1 \right)}{\Delta r} \approx A\omega^2 r p(r),$$

Za úkol bylo vyšetřit podmínky na ose Rámy. Tak tedy

$$p(0) = p(R)e^{-A\omega^2 R^2/2} \doteq 0,78p(R) = 0,78 \text{ atm}.$$

Hustota je přímo úměrná tlaku, takže pro ni bude platit stejné $\rho(0) = 0,78\rho(R)$. Uvedená hodnota tlaku odpovídá nadmořské výšce zhruba 2000 m n. m. Po sundání skafandru s vnitřním atmosférickým tlakem pocítíme tlakovou změnu odpovídající vynoření se z dvoumetrové hloubky bazénu. S dýcháním mít žádný problém nebudeme.

Vaše řešení mě velice potěšilo, většina z vás měla řešení správně, a dokonce si poradila i s řešením diferenciální rovnice (ať už analyticky nebo numericky na počítači jako *Jakub Klemsa*). Snad jen větší diskusi by si zasloužovalo odvození rovnice pro přírůstek tlaku na jedné vrstvě, o což jsem se pokusil v tomto řešení. Zvláštní pochvalu zaslouží *Jakub Michálek*, který úlohu vyřešil elegantně pomocí Boltzmannova vztahu.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.2 ... otázka přežití (4 body; průměr 2,56; řešilo 27 studentů)

Od vchodu vede k vnitřnímu povrchu žebřík. Již jsi po něm sestoupil kilometr, když vtom jsi neopatrně sklouzl a pustil se žebříku. Jakou rychlostí dopadneš na povrch Rámy a za jak dlouho? Máš šanci přežít? *Vymyslel šéf sekce psychotroniky a UFO Martin Formánek.*

Úlohu budeme řešit z inerciální soustavy, ve které se Ráma otáčí kolem své osy s periodou T , takže pustíme-li se žebříku, už na nás nebude působit dostředivá síla a budeme se pohybovat rychlostí, jakou jsme se pohybovali v okamžiku, kdy jsme se žebříku pustili. Tedy alespoň pokud při výpočtu zanedbáme odpor vzduchu. Jakou rychlostí jsme se pohybovali, vypočteme ze vztahu

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

kde T je perioda rotace Rámy a r je naše vzdálenost od osy Rámy v okamžiku uklouznutí. Pohybovat se budeme po tečně k rotaci, tedy musíme urazit vzdálenost

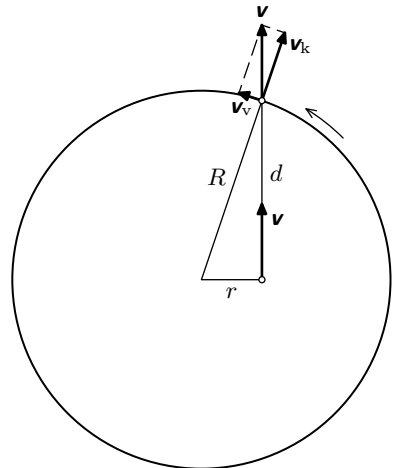
$$d = \sqrt{R^2 - r^2},$$

a čas dopadu tedy získáme ze vzorce

$$t = \frac{d}{v} = \frac{T\sqrt{R^2 - r^2}}{2\pi r} = 303 \text{ s}.$$

neboť s využitím aproximace pro malé hodnoty argumentu $e^x \approx 1 + x$ zjistíme, že

$$e^{A\omega^2 r \Delta r} = 1 + A\omega^2 r \Delta r.$$



Obr. 2. Skládání rychlostí

Rychlost dopadu bude vektorovým rozdílem rychlosti pádu a rychlosti pohybu povrchu. Rychlost pohybu povrchu je

$$v_p = \frac{2\pi R}{T}.$$

Složka rychlosti kolmá na povrch bude (z podobnosti trojúhelníků)

$$v_k = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} v = \frac{2\pi r \sqrt{R^2 - r^2}}{RT},$$

vodorovná složka rychlosti bude

$$v_v = \frac{r}{R} v = \frac{2\pi r^2}{RT}$$

a rychlost dopadu tedy bude

$$v_d = \sqrt{\left(\frac{2\pi r \sqrt{R^2 - r^2}}{RT}\right)^2 + \left(\frac{2\pi r^2}{RT} - \frac{2\pi R}{T}\right)^2} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{R^2 - r^2} = 208 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pokud tedy budeme při vstupu na Rámu takto neopatrní, dopadneme na povrch za čas 303 s rychlostí $208 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, a naše šance na přežití by byla tudíž malá.

Jan Jelínek

jjan@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.3 ... schody z nebe (4 body; průměr 2,39; řešilo 23 studentů)

Žebřík vede jen dva kilometry na plošinu, ze které se dále sestupuje po schodech, jež se mohutným obloukem klenou nad krajinou. Schodiště má zvláštní tvar. Je totiž postavené tak, že se na každý krok vynaloží stejná práce. Odvoďte, jak závisí výška schodu na vzdálenosti od osy Rámy, pokud je délka schodů konstantní. Také můžete určit, jaký tvar má onen oblouk.

Vymyslel čtenář Martin Formánek.

Zamysleme se nejdřív, jak úlohu chceme počítat. Nejdříve si musíme ujasnit, proti kterým silám budeme konat práci. Jde o rotující soustavu a hlavní slovo zde má síla setrvačná odstředivá. V neinerciální soustavě spojené s rotujícím Rámou také pozorujeme účinky Coriolisovy síly, ale tu zanedbáme, jelikož otáčení Rámy a rychlost a hmotnost člověka jdoucího po schodech jsou tak malé, že výsledná síla bude v jednotkách newtonů, což chodec ani nepozná.

Další věcí je tvar schodiště. Na obrázku ze zadání je schodiště vyvedeno jako křivka směřující podél osy Rámy, což je konstrukčně nevýhodné. Kvůli úspoře materiálu apod. je lepší schody postavit v podstavě válce.

K počítání výšky schodů v závislosti na poloměru se můžeme dobrat dvěma způsoby. Při prvním práci potřebnou na překonání jednoho schodu počítáme určitým integrálem ($W = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$), při druhém si řekneme, že výška schodů vůči Rámovi je zanedbatelná, a tedy síla, proti které konáme práci, se téměř nemění ($W = Fs$). Jak se vytrvalý čtenář může přesvědčit (a jak opravující udělal), oba postupy dávají kvantitativně téměř nerozlišitelné výsledky.

Ale fyzik zanedbá, co může, takže provedeme pouze ten způsob výpočtu, kde uvažujeme neměnné odstředivé zrychlení na výšce jednoho schodu.

Uvedme značení, které budeme používat. Ráma má vnitřní poloměr R , plošina je vzdálená H od osy rotace. Schody mají konstantní délku d a výška k -tého je h_k a jeho vzdálenost od Rámy je r_k . Pro počítání tvaru křivky uvažme, že $x = 0$ je u styku Rámovy podstavy s jeho pláštěm.

Nejdříve je potřeba určit, jaká práce bude nutná k překonání jednoho schodu. Tato práce musí být shodná pro všechny schody, tedy i pro první,

$$W = W_1 = m\omega^2 r_1 h_1 = m\omega^2 (R - h)h,$$

kde h je výška prvního schodu a $R - h$ je jeho vzdálenost od osy Rámy. Volíme tuto hodnotu proto, že chceme, aby první schod byl ten u paty schodiště a navíc aby vzdálenost plošiny posledního schodu od osy byla rovna H (čtenář si rozmyslí, proč je tedy $r_1 = R - h$).

Tedy obecně práce potřebná na překonání k -tého schodu bude rovna

$$W_k = m\omega^2 r_k h_k,$$

kteřá ovšem musí být rovna práci W potřebné na překonání každého schodu, proto

$$\begin{aligned} m\omega^2 r_k h_k &= m\omega^2 (R - h)h, \\ h_k &= \frac{(R - h)h}{r_k}. \end{aligned}$$

Nic nám nebrání funkci spojitě prodloužit na celý interval $r \in (H, R)$, tedy

$$h_s(r) = \frac{(R - h)h}{r}.$$

Toto je hledaná závislost výšky schodu na vzdálenosti od osy Rámy, funkce je zřejmě nepřímá úměrnost. Nicméně tvar křivky to stále není. Vypočítáme-li směrnici tečny ke křivce, můžeme potom integrací vypočítat, jak křivka vypadá. Uvažme, že schod je oproti Rámovi zanedbatelně malý, a tedy tečnu ke schodišti vypočteme jako poměr výšky ku délce schodu. Výšku schodu popisuje už objevená závislost $h_s(r)$

$$\Delta r = \frac{(R - h)h}{r}.$$

Délku schodu známe, je konstantní, rovná d

$$\Delta x = d.$$

Tedy tečna ke schodišti bude poměr $\Delta r/\Delta x$. Uvážíme-li, že jednotlivé schody jsou zanedbatelně malé, tento poměr přejde k derivaci.

$$\frac{\Delta r}{\Delta x} = \frac{(R - h)h}{dr} \rightarrow \frac{dr}{dx}.$$

Odseparujeme proměnné a vypočteme integrály

$$\begin{aligned} \int r dr &= \int \frac{(R - h)h}{d} dx, \\ r(x) &= \sqrt{2 \left(\frac{(R - h)h}{d} x + C \right)}. \end{aligned}$$

Konstantu C určíme z podmínky, že $r(0) = H$. Tedy $C = H^2/2$. Hledaná závislost popisující tvar schodiště je tedy

$$r(x) = \sqrt{\frac{2(R-h)h}{d}x + H^2} \approx \sqrt{\frac{2Rh}{d}x + H^2}$$

a tvarem schodiště je tudíž parabola.

Uvažujeme-li schodiště v podstavě, bude v polárních souřadnicích pro délku schodu platit

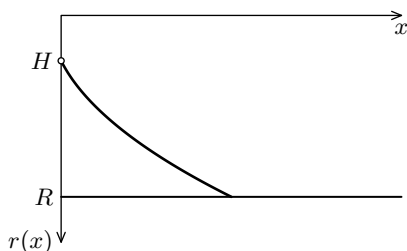
$$d = r\Delta\varphi.$$

A tedy docházíme k rovnici, kterou vyřešíme obdobně jako v minulém případě.

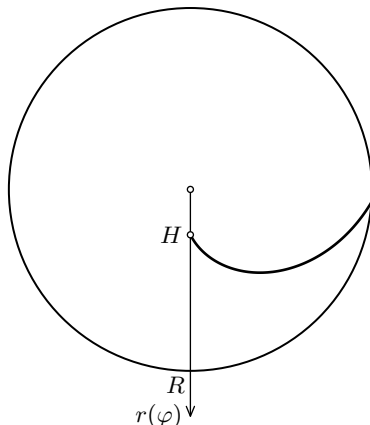
$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{(R-h)h}{d}, \\ \int dr &= \int \frac{(R-h)h}{d} d\varphi, \\ r(\varphi) &= \frac{(R-h)h}{d}\varphi + D. \end{aligned}$$

Konstantu D určíme tak, že stanovíme, že nulový úhel φ určuje začátek schodiště na plošině uprostřed podstavy, tedy $r(0) = H$, z čehož vyplývá, že i $D = H$. Hledaná závislost je tedy přímo úměrná úhlu φ .

$$r(\varphi) = \frac{(R-h)h}{d}\varphi + H \approx \frac{Rh}{d}\varphi + H.$$



Obr. 3. Tvar schodiště klenoucího se v Rámovi pro $d = 2h$



Obr. 4. Tvar schodiště v podstavě Rámově pro $d = 2h$

Z řešení vyplývá, že při obou způsobech konstrukce bude výška schodu klesat s první mocninou poloměru. Postavíme-li schodiště kolmo k podstavě Rámy, jeho tvarem bude parabola. Pokud jej ovšem postavíme v podstavě, bude to spirála.

Ve svých řešeních jste se většinou dopracovali ke správnému výsledku u výšky schodů, jen jste si častěji mohli zavést trochu jiné souřadnice (nejčastěji jste měli $r = 0$ u pláště Rámy). Bohužel se nenašlo moc řešitelů, kteří aspoň náznakem vypočítali tvar schodiště, a bylo dost takových, kteří si funkci popisující výšku schodu spletli s tvarem schodiště. Ale správná řešení jsem nenechával nepovšimnuta.

Aleš Podolník

ales@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.4 ... sluneční konzerva (4 body; průměr 2,44; řešilo 16 studentů)

Ráma cestuje mezi hvězdami tak, že polovinu času rovnoměrně zrychluje a polovinu času rovnoměrně zpomaluje. Právě se pohybuje kolem Slunce po parabole s vrcholem na orbitě Země. energii získává ze slunečního záření (žádný reaktor nebo obří baterie jsi na něm neobjevil) a jeho povrch absorbuje 80 % dopadající energie. Nasbírá při průletu sluneční soustavou dostatečnou energii, aby se dostal k Siriu, který je vzdálen 12 světelných let, za 24 let?

Nadhodil Jakub Benda.

Tato úloha se zaměřila na energetickou náročnost Rámových poutí, které se skládají ze svižného přesunu mezi různými hvězdnými systémy a interakce s živými bytostmi v nich. V knižní předloze je mechanismus získávání energie utajený, ledaže by se jednalo o mohutný gravitační prak kolem Slunce, nicméně ten příliš účinný být nemůže (alespoň ne na cestě k Siriu), neboť relativní radiální rychlost Slunce a Siria je pouhých 7,6 km/s.

Jestliže volíme parabolickou trajektorii při průletu kolem Slunce, lze rychlost vesmírného plavidla na okraji sluneční soustavy považovat za zanedbatelnou. Pro jistotu si určíme její hodnotu. Vyloučíme-li z našich úvah všechna tělesa vyjma Slunce a Rámy, je energie vesmírné lodě

$$E = \frac{1}{2}mv^2(r) - \frac{GM_{\odot}m}{r},$$

kde m je hmotnost Rámy a $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg hmotnost Slunce. Parabolu dostaneme pro mezní únikovou energii, $E = 0$, tudíž

$$v(r) = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}}. \quad (1)$$

Vezmeme-li jako hranici sluneční soustavy začátek *heliosférické obálky*, okraj oblasti čišťené slunečním větrem od mezihvězdného materiálu, což činí asi $r_h \approx 90$ AU, dostaneme $v(r_h) \approx 4,5$ km/s. To sice není nula, ale na uvažovaných vzdálenostech od ní není daleko.

Jestliže má Ráma po opuštění systému nulovou rychlost a půlku cesty zrychluje a půlku zpomaluje, je jeho maximální rychlost rovná dvojnásobku průměrné rychlosti. Takže protože průměrná rychlost je

$$v_p = \frac{12 \text{ ly}}{24 \text{ y}} = \frac{1}{2}c,$$

dosáhne maximální rychlosti rychlosti světla, což hmotný objekt podle teorie relativity nedokáže. Zdá se tedy, že zadaná čísla jsou chybná, což je na jednu stranu (naneštěstí) pravda – cesta trvala Rámovi podle knihy pouhých 12 let a vzdálenost k Siriovi od Země je správně 8,6 ly – na druhou stranu, když se zahledíme na tento nový pár čísel, dojdeme k závěru, že tím spíše je popsán manévr neproveditelný. Budeme tedy prozatím uvažovat nějakou bližší soustavu, například trojhvězdu Alfa Centauri ve vzdálenosti 4,4 ly a k otázce proveditelnosti v původním případě se vrátíme později.

Prvním úkolem je určení energie načerpané ze slunečního světla. Zářivý výkon Slunce (energie vyzářená za jednotku času) je $P_{\odot} = 385 \cdot 10^{24} \text{ W}$. Protože záření je kulově symetrické, na čelně nastavenou plochu S ve vzdálenosti r dopadá výkon

$$P = \frac{P_{\odot} S}{4\pi r^2}.$$

Protože Ráma záření o nižších frekvencích odráží, uloží podle zadání jen $\varkappa = 80\%$ z energie dopadajícího záření, což za jednotku času činí

$$dW^+ = \varkappa P dt = \frac{\varkappa P_{\odot} S}{4\pi r^2} dt.$$

Celková dodaná energie je pak integrál předcházejícího příspěvku po celé trajektorii³

$$W^+ = \frac{\varkappa P_{\odot} S}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^2}. \quad (2)$$

Pro jeho výpočet potřebujeme znát buď polohu Rámy v každém čase, nebo – lépe – ho trochu zjednodušit. Vyjděme z druhého Keplerova zákona o plochách opsaných průvodičem, totiž že se zachovávají. Je-li σ plošná rychlost, platí

$$\sigma \equiv \frac{1}{2} \omega r^2 \equiv \frac{1}{2} v r \sin \vartheta = \sigma_0, \quad (3)$$

přičemž ϑ je úhel sevřený vektorem rychlosti a průvodičem a σ_0 je konstanta. Toto platí i v přísluní ve vzdálenosti $R = 1 \text{ AU}$ od Slunce, kdy je rychlost Rámy tečná (radiální rychlost je v tu chvíli nulová), tedy $\vartheta = \pi/2$ a po dosazení dříve vypočtené rychlosti (1) do (3) máme

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} v(R) R = \sqrt{\frac{GM_{\odot} R}{2}}.$$

Pokud nyní z (3) vyjádříme úhlovou rychlost, dostaneme

$$\omega = \frac{1}{r^2} \sqrt{2GM_{\odot} R},$$

a jelikož $\omega = d\varphi/dt$, je konečně

$$\frac{dt}{r^2} = \frac{d\varphi}{\sqrt{2GM_{\odot} R}}.$$

Výsledným výrazem nahradíme připravený integrand v (2) a příslušně změňme meze, pak

$$W^+ = \frac{\varkappa P_{\odot} S}{4\pi \sqrt{2GM_{\odot} R}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{\varkappa P_{\odot} S}{2\sqrt{2GM_{\odot} R}}.$$

Osvětlenou plochu válce odhadneme jako obdélník o rozměrech $50 \text{ km} \times 20 \text{ km}$ (délka krát průměr). Vyjde

$$W^+ \doteq 2 \cdot 10^{19} \text{ J}.$$

³⁾ Příspěvek integrálu mimo sluneční soustavu je zanedbatelný a takto se nám bude snáze počítat.

Pokud by se někdo vůbec nechtěl pouštět do integrování, byť takto jednoduchého, velice podobný výsledek asi $3,5 \cdot 10^{19}$ J dostane následujícím odhadem. Většinu energie získá Ráma v periheliu, totiž na orbitě Země. Pokud se vzdálí, dopadá na něj méně světla, ale zato se podle Keplerových zákonů pohybuje pomaleji⁴. Při jednom svém oběhu tak Ráma získá skoro stejnou energii, jakou by načerpal na orbitě Země za jeden rok.

Nyní je na čase rozmyslet si cestu mezihvězdným prostorem. Z úvodních úvah je zřejmé, že se vesmírná loď neštítí relativistických rychlostí, použijeme tedy vzorec pro relativistickou kinetickou energii

$$W_k = m'c^2 - mc^2 = mc^2(\gamma(v) - 1),$$

kde $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Pokud loď zrychluje s konstantním zrychlením, D je vzdálenost mezi hvězdami a T plánovaná doba letu, je průměrná rychlost $v_p = D/T$ a maximální rychlost $v_{\max} = 2D/T$. Protože na začátku cesty se Ráma (téměř) nepohybuje, k urychlení na v_{\max} musíme dodat energii

$$\Delta W = mc^2 \left(\left(1 - \left(\frac{2D}{cT} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 \right),$$

Pokud Ráma stejným způsobem brzdí, je toto polovina celkové vydané energie⁵. Letíme-li na Alfa Centauri po dobu 12 let, spotřebujeme tak

$$W^- = 2\Delta W \doteq 4 \cdot 10^{16} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} m,$$

což pro vesmírnou loď těžší než trabant znamená nutnost vézt s sebou dodatečné zdroje energie. Mnohasettisícitunový Ráma fungující na sluníčko by tedy nikam daleko nedoletěl.

Na konci úvodu jsme slíbili, že se ještě vrátíme k otázce realizovatelnosti zadaného Ráma způsobu cestování od Slunce k Siriovi. V předcházejícím řešení jsme předpokládali, že „konstantní zrychlení“ v zadání je myšleno z pohledu vnějšího pozorovatele. Z teorie relativity plyne, že rychleji se pohybující objekt má větší setrvačnost (rozuměj hmotnost), a tedy stejnému urychlování klade větší odpor. To ale znamená, že aby udržel Ráma stejné *vnější* zrychlení (pozorované například od Slunce), musí vynakládat stále větší výkon s tím, jak jeho rychlost roste. Tak se ale ztrácí předpokládaná ekonomičnost Rámových přesunů, totiž stálý (a tedy i minimální) výkon a s ním spojené opotřebování motorů. Pohlédme proto nyní očima řidiče – bezvěkého tvora ovládajícího koráb Ráma, brázdícího na něm hvězdné hlubiny po eóny let. Řidič není svázaný relativitou v tom smyslu, že by jeho rychlost byla jakkoliv omezená; při vyšších rychlostech dochází z jeho pohledu ke kontrakci vzdáleností ve směru jeho rychlosti podle známého vzorce $\Delta l_{\text{řidič}} = \Delta l_0/\gamma(v)$, a pokud se jeho rychlost (vzhledem k soustavě počátek–cíl cesty) přiblíží k rychlosti světla, $\Delta l_{\text{řidič}}$ se zkracuje k nule a jím pozorovaná rychlost $v_{\text{řidič}}$ narůstá do nekonečna, neboť za stejný (vlastní) čas urazí γ -krát větší vzdálenost. Jinými slovy

$$v_{\text{řidič}} = v\gamma(v). \quad (4)$$

⁴ Nicméně intenzita je úměrná r^{-2} , zatímco perioda $r^{3/2}$, takže jejich součin přece jen klesá se vzdáleností – ale pomalu, jako $r^{-1/2}$.

⁵ *Jakub Michálek a Dalimil Mazáč* si uvědomili, že Ráma by mohl mít nějaký mechanismus, jak při zpomalování svoji kinetickou energii ukládat k opětovnému použití, a být tak nezávislý na energetických zdrojích. Pak by ale nebylo co počítat.

Řidič navíc jistě vede loď tak, že konstantně zrychluje ze svého pohledu, $v_{\text{řidič}} = a_{\text{řidič}} t$, působí na něj konstantní setrvačná síla a Ráma má stabilní výkon. Z (4) vyčíslíme v ,

$$v(t) = \frac{a_{\text{řidič}} t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_{\text{řidič}} t}{c}\right)^2}}, \quad (5)$$

což už stačí zintegrovat (s podmínkou $x = 0$ v čase $t = 0$) na

$$x(t) = \frac{c^2}{a_{\text{řidič}}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a_{\text{řidič}} t}{c}\right)^2} - 1 \right). \quad (6)$$

Jestliže si nakreslíme graf této závislosti, snadno nahlédneme, proč se pohybu, při němž urychlovaný pozorovatel pociťuje konstantní zrychlení, říká *hyperbolický pohyb*. Nyní jsme schopni, dosazením $x = D/2 = 4,3 \text{ ly}$ pro $t = T/2 = 6 \text{ y}$ do (6), vyčíslit potřebné zrychlení, resp. zpomalení Rámy při cestě k Sírui

$$a_{\text{řidič}} = \frac{4D}{T^2 - \left(\frac{D}{c}\right)^2} \doteq 4,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Zdá se tedy, že řidiči se ani příliš neodvápni kosti (má-li nějaké), ani ho v sirijském kosmodromu nebudou seškrabovat ze zadní stěny. Spotřebovanou energii získáme opět jako dvojnásobek kinetické energie Rámy letícího maximální rychlostí

$$W^- = 2mc^2 (\gamma(v_{\text{max}}) - 1),$$

kde v_{max} se vypočítá z (5) dosazením vypočteného zrychlení a $t = T/2$. Dohromady po úpravě je

$$W^- = \frac{4mc^2}{\left(\frac{cT}{D}\right)^2 - 1} \doteq 4 \cdot 10^{17} \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}m.$$

Závěr je tedy stejný jako pro cestu na Alfa Centauri při konstantním vnějším zrychlení s tím, že z trabantu by už zbyly jen nárazníky – Rámovi by nasbíraná energie nestačila.

Jakub Benda

jakub@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.P ... rámatřesení (4 body; průměr 2,46; řešilo 24 studentů)

Úspěšně ses dostal na povrch Rámy. Z ničeho nic se Ráma několikrát otrásl a zdá se ti, že se změnila rychlost jeho rotace. Tato otázka tě velice tíží. Navrhni proto několik způsobů, jak bys změněnou periodu rotace určil. Zamyslel se Martin Formánek.

Nejjednodušší způsob, který určitě napadne každého jako první, je pokusit se změřit odstředivé zrychlení a u povrchu Rámy. Ze známých vzorečků pro rotující soustavy

$$a = \frac{v^2}{R}, \quad v = \omega R$$

snadno dostaneme, že nová perioda rotace Rámy je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a}}.$$

Metod pro určení zrychlení a je mnoho. Prakticky můžeme použít jakýkoliv vztah, který známe ze Země, ve kterém vystupuje tíhové zrychlení. Průzkumníkům Rámy by tedy stačilo vyrobit si matematické kyvadlo. Hodně z vás navrhovalo měřit odstředivé zrychlení přímo, pomocí stopek. Tato metoda je však velmi nepřesná. Měření doby pádu tělesa bez optoelektronických prvků by nám dalo jen velmi hrubý odhad odstředivého zrychlení. Pouštění těles z větších výšek by zase poněkud zkomplikovalo výpočet, protože bychom museli uvažovat, že těleso odlétá po tečně k rotaci v daném místě. (Více se o tomto problému pojednává v úloze V.2.) Navíc ani u nás na Zemi se tato metoda k stanovení velikosti tíhového zrychlení nepoužívá.

Odstředivé zrychlení Rámy můžeme také jednoduše zjistit pomocí libovolných vah (až na ty rovnoramenné). Stačí totiž znovu zvážit libovolné těleso známé hmotnosti. Poměr pozemské a nové hmotnosti bude odpovídat podílu tíhového zrychlení Země s odstředivým zrychlením Rámy. Improvizované váhy si můžeme vyrobit i pomocí pružiny, jenom musíme nějakou metodou změřit její tuhost. Způsobů, jak to provést, aniž bychom použili tíhu nějakého tělesa, vás jistě napadne nepřeborně. Stačí vyrobit jakoukoliv sílu o známé velikosti, ať už elektrickou, magnetickou nebo jinou.

Máme však i možnosti, jak určit novou periodu rotace přímo. Jednou z nich je použití setrvačnicku. Roztočený setrvačnický totíž zachovává rovinu rotace vůči venkovnímu pozorovateli. Stačilo by tedy dívat se na setrvačnick a změřit dobu, za kterou vykoná obrátku. Setrvačnick by však musel být upevněn tak, aby mu bylo umožněno volné natáčení. Takovému uchycení říkáme Cardanův závěs. Dalším způsobem z této kategorie je zaměřit se na libovolný pevný bod mimo Rámu. Pokud Ráma není dostatečně odstíněná (bohužel jeho plášť funguje jako Faradayova klec), můžeme detekovat zdroje libovolného záření z vnějšku. Přinejhorším ho můžeme vždy opustit a zjistit, jak je to doopravdy.

Jak je vidět z první úlohy, uspořádání Rámovy atmosféry je závislé na periodě rotace. Teoreticky by tedy mohlo pomoci změřit nový tlak vzduchu u povrchu nebo i jinde. Prakticky to však bude horší, protože atmosféra se přeuspořádá až po určitém čase! Při roztáčení sklenice s vodou vytvoříte vír až po chvíli úsilí. Stejně tak rotující povrch Rámy bude strhávat atmosféru postupně a mnohem pomaleji než u analogie s vodou, protože vzduch má mnohem menší viskozitu. Každopádně změna rotace Rámy vyvolá uvnitř pěknou vichřici a je otázka, za jak dlouho budou údaje o tlaku vzduchu odpovídat nové periodě rotace, o přesnosti ani nemluvě.

Martin Formánek

`martin@fykos.mff.cuni.cz`

Úloha V. E ... životní etapy Rámy (8 bodů; průměr 4,31; řešilo 16 studentů)

Bude mít Rama jiné fyzikální vlastnosti, poté co ji roztavíte a opět necháte ztuhnout? Doporučujeme měřit hustotu, viskozitu či barvu.

Vytlačil Marek Pechal.

Rozpouštělo se všechno možné, většinou Rama, občas i máslo, Flóra, Perla, rostlinný tuk a na Slovensku došlo i na Veto. Určovali jste v první řadě změnu barvy, dále pak změnu hustoty, ti odváznější i změnu chuti a zápachu. Musíme vyzdvihnout řešení *Zuzany Dočekalové*, která na Ramě měřila hustotu, absorpční spektrum, reflektanci, fázový přechod, rozpustnost a pH.

Teorie

Ramu můžeme rozpouštět v běžných kuchyňských nádobách, nejlépe však ve vodní lázni, abychom zůstali v mezích rozumných teplot. Po opětovném ztuhnutí přestane emulgátor působit a Rama se nám začne rozdělovat na dvě složky. Pokud bychom Ramu ohřívali ve vhodné nádobě jako *Zuzana Dočekalová* a *Veronika Paštyková*, tak bychom obě složky od sebe rozdělili. Horní žlutá rychle tuhne a pod ní naopak složka bílé barvy, která za běžné teploty netuhne.

K měření hustoty použijeme definičního vztahu

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Objem i hmotnost dokážeme měřit poměrně přesně i v podmínkách běžné domácnosti, pokud bychom však potřebovali pouze rychlé orientační porovnání s hustotou např. vody, můžeme dle Archimédova zákona porovnat ponořenou část Ramy s jejím celkovým objemem.

K měření barvy použijeme digitální fotoaparát, jak jste správně poukázovali. Abychom však mohli výsledky porovnávat, je nutné zaručit stálost osvětlení a zbavit se automatického vyvážení bílé. Na jakou hodnotu však bílou vyvážit? Pokud výstup neměříme absolutně, ale pouze relativně, nastavme ji tak, aby rozdíly vynikly a my je mohli porovnat. Vhodné je umístit si do záběru libovolný referenční barevně stálý objekt, který by měl mít na obou fotografiích stejnou barvu. Pokud se nám to vše povede, můžeme na počítači provést barevný rozklad. S výhodou použijeme tzv. HSV⁶ model. Ještě podotkněme, že i měření subjektivní má svoji hodnotu a přímé porovnání může přinést své výsledky.

Měření viskozity se nejlépe povedlo *Tereze Steinhartové*, která užila Poiseuillovu rovnici pro průtok kapaliny kapilárou o poloměru r a délce l

$$Q_V = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta p,$$

kde Q_V je objemový průtok Ramy, neboli $Q_V = V/t$, Δp přetlak v kapiláře a η námi měřená viskozita. Nejlépe bychom měli provádět měření relativní. Mějme tedy kapalinu se známou viskozitou η_{ref} , pak

$$\frac{\eta}{\eta_{\text{ref}}} = \frac{t}{t_{\text{ref}}} \cdot \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}},$$

kde t a t_{ref} jsou doby průtoku jistého objemu měřené a referenční kapaliny, ρ a ρ_{ref} pak hustoty kapalin, okamžitě můžeme použít předchozího měření.

Zápach, resp. chuť, měříme běžným přičichnutím, resp. ochutnáním. Pro lepší výsledky můžeme přizvat více pozorovatelů.

Výsledky měření

Použijme odměrného válce k měření hustoty a kuchyňských vah k určení hmotnosti jistého množství Ramy. K dispozici máme váhy s přesností ± 1 g. U válce máme rysky po 10 ml, jako chybu vezmeme půlku nejmenšího dílku, dostáváme se tak na ± 5 ml.

Po zvážení prvního kusu Ramy o hmotnosti (103 ± 1) g a změření jejího objemu (112 ± 5) ml vidíme, že relativní chyba měření hustoty je 5,4 %. Námi naměřená hustota je $\rho_0 = (920 \pm 50) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Změřením hodnot po opětovném ztuhnutí stejným způsobem zjistíme,

⁶⁾ Hue – barevný tón, odstín. Saturation – sytost, množství šedi. Value – hodnota jasu, množství bílého světla.

že $\rho_1 = (930 \pm 50) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Při dalších měření dojdeme ke stejným výsledkům. Můžeme tedy vysledovat jakési zvýšení hustoty, ale pouze v rámci chyby měření. Toto zvýšení lze připisat odpaření vody, která se z másla uvolní a má vyšší hustotu, nežli je průměrná hustota másla.

Zuzana Dočekalová měřila hustotu obou složek zvlášť, z jejich výsledků plyne nepatrně vyšší hustota žluté části v porovnání s Ramou v původním stavu a hustota bílé složky vyšší než hustota vody.

Při měření barvy uveďme jako výsledek pouze mírné ztmavnutí, které je pozorovatelné i lidským okem.

Viskozita másla je běžně udávána mezi hodnotami 150 až 250 Pa·s; měřením viskozity Ramy po ztuhnutí zjistíme, že poklesla řádově na jednu desetinu. Pěkné měření viskozity provedla Tereza Steinhartová.

Teplnou úpravou dochází ke zvýraznění vůně Ramy. Chuťové vlastnosti se mění až při vyšších teplotách, dochází ke zhořknutí.

Závěr

Hustota přetavené Ramy ve vodní lázni je nepatrně vyšší, dojde však k oddělení dvou složek, každé o jiné hustotě. Přetavením dochází k drobnému ztmavnutí, výraznému snížení viskozity a také ke zvýraznění vůně. Chuťově se Rama mění až vlivem výrazně vyšších teplot.

Poznámky k došlým řešením

Většina výsledků byla ve shodě s výše uvedeným závěrem, dávejte si však pozor na několik základních chyb. Popište pořádně metodu, jakou jste použili, každý měří jinak, a tak věta „Barvu jsem rozložil do RGB.“ není postačující. Dále zhodnoťte kriticky svou metodu a odhadněte přesnost, s jakou jste měřili. Výsledky uvádějte v běžném tvaru a správně zaokrouhľujte! Nakonec není bez zajímavosti, že dva naši řešitelé se shodli na hustotě poloviční, než jsme naměřili my.

Kryštof Touška

krystof@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V. S ... horká dutina a bílý trpaslík (7 bodů; průměr 3,25; řešili 4 studenti)

- a) Určete závislost koncentrace elektronů a pozitronů na teplotě při celkovém náboji $Q = 0$ v prázdné uzavřené horké dutině. (Bude-li se vám chtít, i při jiných vámi zvolených hodnotách Q .) Dále určete závislost poměru vnitřní energie U_e elektronů a pozitronů ku celkové vnitřní energii systému U (tj. součtu energie elektromagnetického záření a částic) na teplotě a určít hodnoty teploty odpovídající některým význačným hodnotám tohoto poměru (např. $3/4$, $1/2$, $1/4$, ...; může tento poměr nabývat všech těchto hodnot?).

Pokuste se své výsledky pěkně graficky zpracovat ve formě grafů (můžete zkusit i trojrozměrné).

Při vašem snažení vám může hodně pomoci, pokud si zavedete vhodné bezrozměrné jednotky (např. βE_0 místo β apod.).

- b) Řešte soustavu diferenciálních rovnic pro $M(r)$ a $\varrho(r)$ v modelu bílého trpaslíka pro několik vhodně zvolených hodnot $\varrho(0)$ a pro každou z nich sledujte hodnotu, ke které se blíží $M(r)$ při $r \rightarrow \infty$. Ta je zřejmě rovna hmotnosti celé hvězdy. Pokuste se prozkoumat závislost této celkové hmotnosti na $\varrho(0)$ a odhadnout její horní mez. Srovnajte váš výsledek s horní mezí hmotnosti bílého trpaslíka, kterou najdete v literatuře nebo na internetu. Uvažujte, že je hvězda tvořena héliem.

Zadali autoři seriálu Marek Pechal a Lukáš Strítěcký.

Horká dutina

Máme zadány vztahy⁷ pro hustotu elektronů a pozitronů v závislosti na teplotním parametru $\beta = (kT)^{-1}$ a chemickém potenciálu μ

$$n_-(\beta, \mu) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)) + 1} dp,$$

$$n_+(\beta, \mu) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} + \mu)) + 1} dp.$$

Stejný tvar má i závislost koncentrace fotonů $n_f(\beta)$, pouze s tím rozdílem, že platí $\mu = 0$, $E_0 = 0$ a nejde o fermiony, ale o bosony. Je tedy navíc třeba obrátit znaménko ve jmenovateli.

$$n_f(\beta) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta pc) - 1} dp.$$

Podobně výrazy pro hustotu energie elektronů, pozitronů, resp. fotonů nabývají tvaru

$$u_-(\beta, \mu) = \frac{U_-}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)) + 1} dp,$$

$$u_+(\beta, \mu) = \frac{U_+}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} + \mu)) + 1} dp,$$

$$u_f(\beta) = \frac{U}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^3 c}{\exp(\beta pc) - 1} dp.$$

Integrály ve vztazích pro $n_f(\beta)$ a $u_f(\beta)$ lze zjednodušit substitucí $\beta pc = x$. Dostaneme tak

$$n_f(\beta) = \frac{8\pi}{h^3 c^3 \beta^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp x - 1} dx,$$

$$u_f(\beta) = \frac{8\pi}{h^3 c^3 \beta^4} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx.$$

Zde vystupující integrály už nezávisí na žádných vnějších parametrech, jde tedy pouze o číselné konstanty. Snadno je můžeme vypočítat numericky. Jejich hodnoty je ovšem možno zapsat i v jednoduchém tvaru pomocí tzv. Riemannovy zeta funkce ζ (výpočet zde nebudeme rozepisovat – provádí se pomocí rozvoje integrandu v nekonečnou řadu). Výsledné vztahy jsou

$$n_f(\beta) = \frac{16\pi\zeta(3)}{h^3 c^3 \beta^3},$$

$$u_f(\beta) = \frac{48\pi\zeta(4)}{h^3 c^3 \beta^4} = \frac{8\pi^5}{15h^3 c^3 \beta^4},$$

kde $\zeta(3) \doteq 1,20206$ a $\zeta(4) = \pi^4/90 \doteq 1,08232$. Získaný vztah pro u_f mimochodem představuje známý vyzařovací zákon, podle kterého je hustota energie záření černého tělesa o teplotě T úměrná T^4 (vzpomeňme si, že $\beta = (kT)^{-1}$).

⁷⁾ Omlouváme se za chybu v zadání. Zapomněli jsme nahradit znaménko \pm z obecného vztahu znaménkem $+$ odpovídajícím fermionům.

Výrazy pro $n_{\pm}(\beta, \mu)$ a $u_{\pm}(\beta, \mu)$ takto jednoduše vypočítat nelze (jinak bychom tuto úlohu nezadávali do seriálu o numerických metodách). Můžeme si ovšem zavést bezrozměrné parametry $\gamma = \beta E_0$, $\nu = \beta \mu$ (ty nám budou od této chvíle sloužit jako parametry systému místo β a μ) a provést substituci $pc/E_0 = x$ a přepsat příslušné vztahy do tvaru

$$\begin{aligned} n_{-}(\gamma, \nu) &= \frac{8\pi E_0^3}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} dx, \\ n_{+}(\gamma, \nu) &= \frac{8\pi E_0^3}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} dx, \\ u_{-}(\gamma, \nu) &= \frac{8\pi E_0^4}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} dx, \\ u_{+}(\gamma, \nu) &= \frac{8\pi E_0^4}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} dx. \end{aligned}$$

Zavedeme-li jednotkovou hustotu částic $n_0 = 8\pi(E_0/hc)^3$, můžeme předchozí vztahy zapsat jednoduše jako

$$\begin{aligned} \frac{n_{\pm}(\gamma, \nu)}{n_0} &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} \pm \nu) + 1} dx, \\ \frac{u_{\pm}(\gamma, \nu)}{E_0 n_0} &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} \pm \nu) + 1} dx. \end{aligned}$$

Nábojová hustota ρ uvažovaného plynu v jednotkách en_0 (kde e je elementární náboj) je pak zřejmě rovna $(n_{+}(\gamma, \nu) - n_{-}(\gamma, \nu))/n_0$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\gamma, \nu)}{en_0} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} - \frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} \right) dx = \\ &= -2 \sinh \nu \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \exp(\gamma\sqrt{1+x^2})}{(\exp(\gamma\sqrt{1+x^2}) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu} dx. \end{aligned}$$

Podobně celková hustota energie $u_e(\gamma, \nu)$ elektronů a pozitronů je rovna $u_e(\gamma, \nu) = u_{+}(\gamma, \nu) + u_{-}(\gamma, \nu)$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{u_e(\gamma, \nu)}{E_0 n_0} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} + \frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} \right) dx = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2} (\exp(\gamma\sqrt{1+x^2}) \cosh \nu + 1)}{(\exp(\gamma\sqrt{1+x^2}) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu} dx. \end{aligned}$$

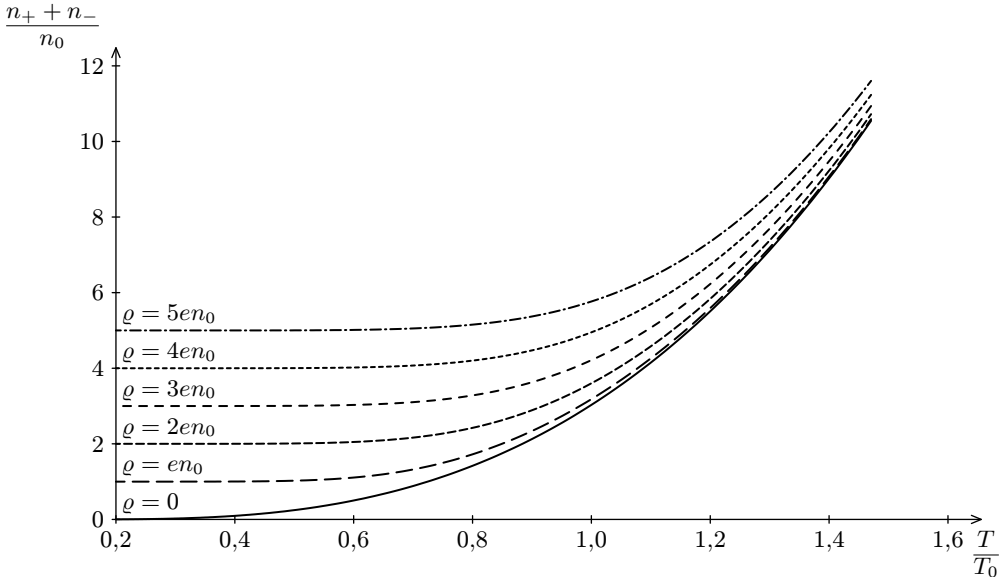
Jednoduchým dosazením pak dostaneme pro poměr $\Lambda(\gamma, \nu)$ energie elektronů a pozitronů k celkové energii soustavy vztah

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda(\gamma, \nu)} - 1 &= \frac{u_f(\gamma)}{u_{+}(\gamma, \nu) + u_{-}(\gamma, \nu)} = \\ &= \frac{\pi^4}{30\gamma^4} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2} (\exp(\gamma\sqrt{1+x^2}) \cosh \nu + 1)}{(\exp(\gamma\sqrt{1+x^2}) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu} dx \right)^{-1}. \end{aligned}$$

V klíčových vztazích, které budeme nakonec integrovat numericky (tj. vztahy pro $n_{\pm}(\gamma, \nu)$, $\varrho(\gamma, \nu)$ a $\Lambda(\gamma, \nu)$), použijeme v seriálu doporučenou substituci $t = (1 + x^2)^{-1/2}$, a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{n_{\pm}(\gamma, \nu)}{n_0} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^4(\exp(\gamma/t \pm \nu) + 1)} dt, \\ \frac{\varrho(\gamma, \nu)}{en_0} &= -2 \sinh \nu \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2} \exp(\gamma/t)}{t^4((\exp(\gamma/t) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu)} dt, \\ \frac{1}{\Lambda(\gamma, \nu)} - 1 &= \frac{\pi^4}{30\gamma^4} \left(\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2} (\exp(\gamma/t) \cosh \nu + 1)}{t^5((\exp(\gamma/t) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu)} dt \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ačkoliv tyto výrazy vypadají děšivě, nebude problém je zdolat numerickými metodami. Pro výpočty jsme zvolili v seriálu popsanou Rombergovu metodu. K invertování vztahu $\varrho(\gamma, \nu)$ (tj. nalezení ν splňujícího $\varrho(\gamma, \nu) = \varrho$ pro dané γ a ϱ) jsme použili jednoduchou metodu regula falsi pro řešení obyčejných rovnic, vysvětlenou ve studijním textu *Úvod do programování*. Takto jsme pak získali závislosti n_{\pm} a Λ na γ a ϱ/en_0 místo γ a ν , což bylo naším cílem. Pro $\varrho = 0$ přitom speciálně platí $\nu = 0$, v tomto případě tedy vztah $\varrho(\gamma, \nu)$ invertovat nemusíme.



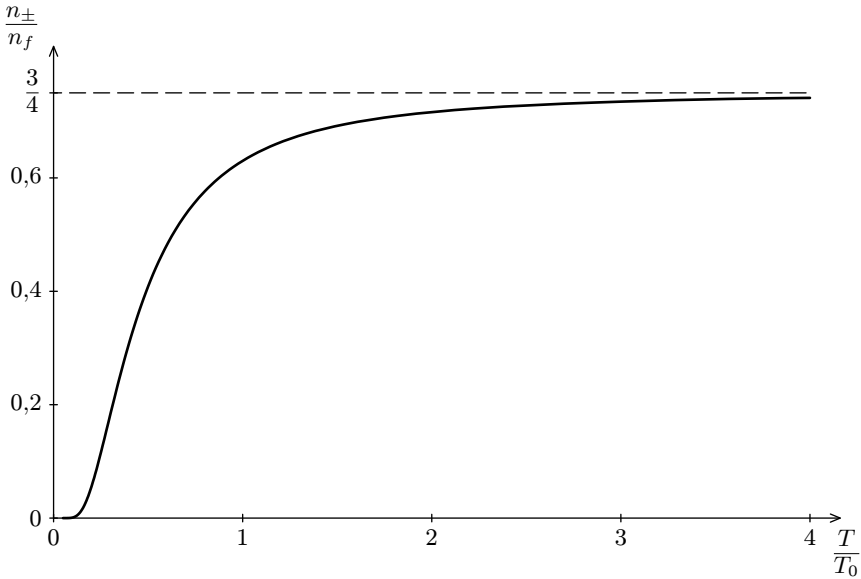
Obr. 5. Hustota elektronů a pozitronů v závislosti na teplotě pro několik hodnot nábojové hustoty

Stejným způsobem jsme zjišťovali i konkrétní hodnoty γ , při kterých nabývá poměr Λ určitých význačných hodnot.

Když už máme napsaný program⁸, nic nám nebrání začít kreslit grafy. Kvůli jejich názornosti je ještě vhodné přejít od parametru γ k γ^{-1} . Ten je stejně jako $\beta^{-1} = kT$ úměrný teplotě. Konkrétně představuje hodnotu teploty v jednotkách $T_0 = E_0/k$.

⁸) Viz program `elpoz.pas` na FYKOSím webu.

V grafu 5 můžeme vidět závislost úhrnné koncentrace elektronů a pozitronů na teplotě pro několik daných hodnot nábojové hustoty. Pro malé teploty se samozřejmě hodnoty koncentrace blíží koncentraci dané nábojovou hustotou (v systému se prakticky nalézají buď pouze elektrony, nebo pouze pozitrony podle toho, jaké znaménko má hustota náboje).



Obr. 6. Poměr hustoty elektronů (resp. pozitronů) k hustotě fotonů v závislosti na teplotě v neutrálním systému

Graf na obrázku 6 ukazuje závislost poměru koncentrací elektronů, resp. pozitronů ke koncentraci fotonů v neutrálním systému (tj. při $\nu = 0$). Je poměrně pozoruhodné, že tento poměr se při vysokých teplotách blíží hodnotě $3/4$ (tento závěr zde nebudeme dokazovat – lze jej ovšem poměrně jednoduše odvodit limitním přechodem $\gamma \rightarrow 0$ v příslušných integrálech).

V grafu na obrázku 7 pak vidíme teplotní závislost poměru hustoty energie elektronů a pozitronů k celkové hustotě energie v systému. Opět je možno ukázat, že vysokoteplotní limita tohoto výrazu je $7/11$, což nám naznačuje i provedený numerický výpočet.

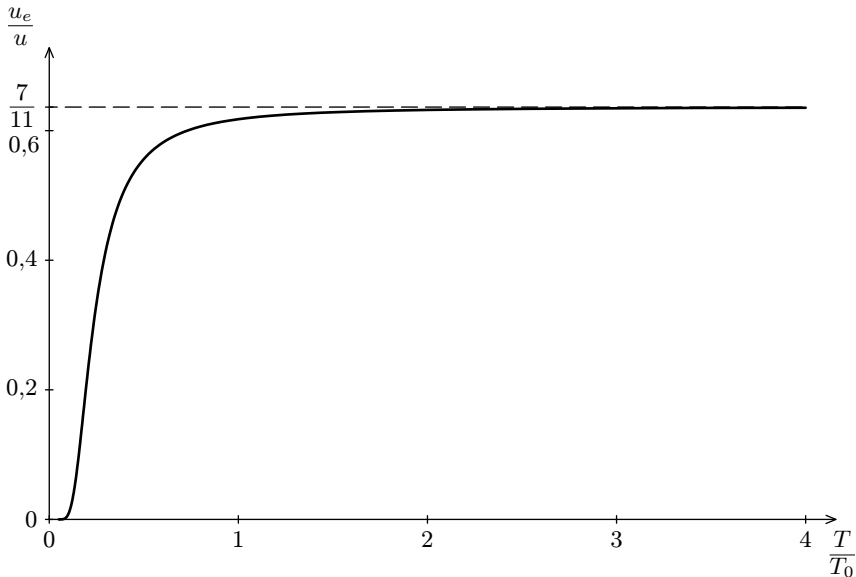
Podíl elektronů a pozitronů na celkové energii systému se začne výrazně projevovat při teplotách, které řádově odpovídají jednotkové teplotě T_0 . Konkrétně jsme numerickým výpočtem (metodou regula falsi) zjistili, že

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{u_e}{u} = \frac{1}{4} & \text{při} & \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0,2126, \\ \Lambda &= \frac{u_e}{u} = \frac{1}{3} & \text{při} & \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0,2498, \\ \Lambda &= \frac{u_e}{u} = \frac{1}{2} & \text{při} & \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0,3853. \end{aligned}$$

Na závěr ještě uvedme číselné hodnoty jednotkových veličin T_0 , n_0 , $E_0 n_0$ a en_0 . Po dosažení zjistíme, že

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{E_0}{k} \doteq 5,93 \cdot 10^{10} \text{ K}, \\ n_0 &= \frac{8\pi E_0^3}{h^3 c^3} \doteq 1,76 \cdot 10^{39} \text{ m}^{-3}, \\ E_0 n_0 &= \frac{8\pi E_0^4}{h^3 c^3} \doteq 1,44 \cdot 10^{27} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}, \\ en_0 &= \frac{8\pi E_0^3 e}{h^3 c^3} \doteq 2,81 \cdot 10^{20} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}. \end{aligned}$$

Oblasti, ve kterých se pohybují všechny studované veličiny, jsou tedy velmi extrémní. Například teploty, při nichž začíná být podíl elektronů a pozitronů v systému nezanedbatelný, jsou řádově desítky miliard kelvinů!



Obr. 7. Poměr úhrnné energie elektronů a pozitronů k celkové energii neutrálního systému v závislosti na teplotě

Jistě nepřekvapí, že pokud dosadíme do získaných vztahů pokojovou teplotu, vyjde nám koncentrace pozitronů, resp. elektronů v řádu 10^{-10^8} . Uvažovaný jev tedy v našich podmínkách nemůžeme pozorovat, ani kdybychom se snažili sebevice.

Bílý trpaslík

V 5. kapitole seriálu úlohy jsme dospěli k tomu, že rozložení hmoty ve sféricky symetrické hvězdě tvořené degenerovaným fermionovým plynem je dáno diferenciálními rovnicemi

$$\frac{1}{m} f' \left(\frac{\varrho(r)}{m} \right) \frac{d\varrho(r)}{dr} = - \frac{GM(r)\varrho(r)}{r^2},$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varrho(r),$$

kde $\varrho(r)$ je hustota hmoty ve vzdálenosti r od středu, $M(r)$ je hmotnost uzavřená ve sféře o poloměru r , G Newtonova gravitační konstanta, m hmotnost připadající na jeden fermion a konečně

$$f' \left(\frac{\varrho(r)}{m} \right) = \frac{E_0}{3} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho(r)}{mn_0} \right)^{2/3}}{\sqrt{\left(\frac{\varrho(r)}{mn_0} \right)^{2/3} + 1}},$$

přičemž n_0 je jednotková koncentrace definovaná jako (pozor, definiční vztah je jiný než v předchozí části úlohy!)

$$n_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{E_0}{hc} \right)^3.$$

Jako v předešlé úloze si i nyní zavedeme bezrozměrné veličiny, se kterými se nám pak bude lépe počítat. Jako jednotku hustoty je přirozené zvolit mn_0 . Budeme tedy dále používat bezrozměrnou hustotu $\tilde{\varrho} = \varrho/mn_0$.

Volba jednotky vzdálenosti už takto jednoznačná není. Chtěli bychom ovšem, aby nám při použití bezrozměrných veličin z rovnic zmizely veškeré fyzikální konstanty. Označme si zatím neznámou jednotku vzdálenosti jako α . Zavedeme pak bezrozměrnou vzdálenost $\tilde{r} = r/\alpha$.

Jednotka hmotnosti bude $mn_0\alpha^3$, tedy bezrozměrná hmotnost je definována jako $\tilde{M} = M/mn_0\alpha^3$. Nové neznámé funkce, které chceme najít jako řešení diferenciálních rovnic, jsou $\tilde{\varrho}(\tilde{r})$ a $\tilde{M}(\tilde{r})$. Dosadíme tedy do původních rovnic $\varrho(r) = mn_0\tilde{\varrho}(\tilde{r})$, $M(r) = mn_0\alpha^3\tilde{M}(\tilde{r})$ a $r = \alpha\tilde{r}$ a po úpravách dostaneme

$$\frac{\tilde{\varrho}^{2/3}(\tilde{r})}{3\sqrt{\tilde{\varrho}^{2/3}(\tilde{r}) + 1}} \cdot \frac{d\tilde{\varrho}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = -\frac{Gm^2n_0\alpha^2}{E_0} \cdot \frac{\tilde{M}(\tilde{r})\tilde{\varrho}(\tilde{r})}{\tilde{r}^2},$$

$$\frac{d\tilde{M}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = 4\pi\tilde{r}^2\tilde{\varrho}(\tilde{r}).$$

Zvolíme-li $\alpha = \sqrt{E_0/Gm^2n_0}$, multiplikativní faktor na pravé straně první rovnice bude roven jedné, rovnice pro bezrozměrné veličiny tedy můžeme zapsat v konečném tvaru

$$\frac{d\tilde{\varrho}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = -\frac{3\tilde{M}(\tilde{r})\tilde{\varrho}^{1/3}(\tilde{r})\sqrt{\tilde{\varrho}^{2/3}(\tilde{r}) + 1}}{\tilde{r}^2},$$

$$\frac{d\tilde{M}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = 4\pi\tilde{r}^2\tilde{\varrho}(\tilde{r}).$$

Počáteční podmínka pro \tilde{M} je zřejmě $\tilde{M}(0) = 0$, hustotu $\tilde{\varrho}(0)$ ve středu hvězdy si budeme volit jako parametr.

Nyní můžeme rovnice řešit numericky. Musíme si ovšem dát pozor na dvě věci. Zaprvé nemůžeme začínat s řešením od $\tilde{r} = 0$, protože tam pravá strana první rovnice není definována. Tento problém však můžeme obejít malým trikem. Budeme předpokládat, že malá kulová oblast o poloměru ε kolem středu hvězdy je homogenní s hustotou $\tilde{\varrho}(0)$. Začneme tedy integraci na poloměru $\tilde{r} = \varepsilon$ a budeme předpokládat $\tilde{\varrho}(\varepsilon) = \tilde{\varrho}(0)$ a $\tilde{M}(\varepsilon) = 4\pi\varepsilon^3\tilde{\varrho}(0)/3$. Druhou komplikací, na kterou si musíme dávat pozor, je neceločíselná mocnina $\tilde{\varrho}$ na pravé straně první rovnice.

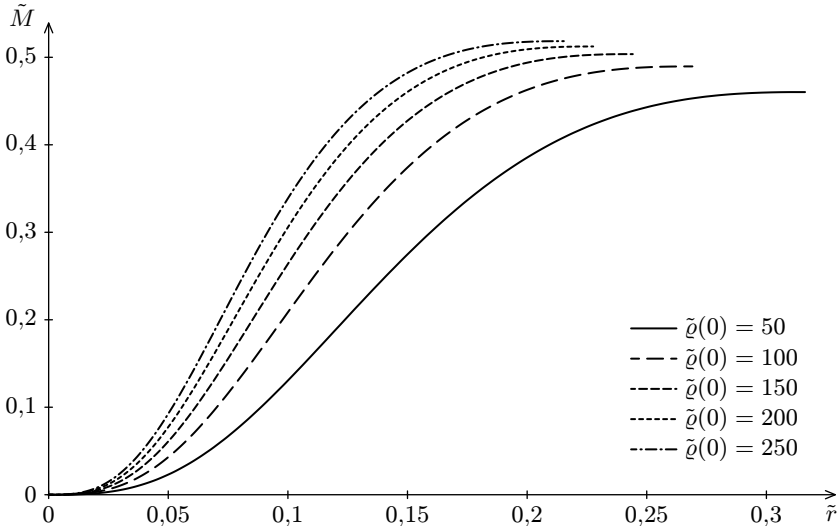
Pokud ji program počítá pomocí logaritmu, nemůže být umocňované číslo záporné. Hustota materiálu ve hvězdě se přitom s rostoucím poloměrem rychle blíží k nule. Je-li $\bar{\varrho}$ dostatečně malé, může při integračním kroku snadno přejít do záporných hodnot a algoritmus skončí chybou.

Abychom tomu předešli, můžeme testovat znaménko $\bar{\varrho}$, a je-li záporné, výpočet ukončit. Dále pak předpokládáme, že pro vyšší \tilde{r} je již hustota nulová. Další možností je poslední integrační krok, při kterém se změnilo znaménko $\bar{\varrho}$, opakovat s polovičním krokem.

V každém případě však nakonec dospějeme k poloměru \tilde{r} , nad kterým je již hustota $\bar{\varrho}$ zanedbatelná a \tilde{M} se dále prakticky nemění. Takto získaná hodnota \tilde{M} (označme ji $\tilde{M}(\infty)$) pak odpovídá celkové hmotnosti hvězdy v jednotkách

$$M_0 = mn_0\alpha^3 = \sqrt{\frac{3h^3c^3}{8\pi G^3m^4}} \doteq 5,0815 \cdot 10^{30} \text{ kg} \doteq 2,552M_\odot,$$

kde M_\odot je hmotnost Slunce. Za m jsme dosadili hmotnost připadající na jeden elektron v hvězdě složené pouze z hélia – tedy součet hmotnosti elektronu a poloviny hmotnosti heliového jádra.



Obr. 8. Závislost hmotnosti na poloměru v bílém trpaslíku pro několik hodnot centrální hustoty

Soustavu diferenciálních rovnic jsme řešili Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu⁹. V použitém algoritmu jsme aplikovali výše zmíněné zmenšování integračního kroku, pokud hustota přejde do záporných hodnot. Počáteční krok jsme přitom nastavili na 10^{-5} , jeho minimální hodnotu jsme omezili na 10^{-9} (je-li krok nižší, výpočet považujeme za skončený). Podobně testujeme i velikost hustoty $\bar{\varrho}$ – pokud klesne pod 10^{-9} , výpočet skončí. Poloměr \tilde{r} , na kterém výpočet zastavíme, pokud se tak již nestalo kvůli výše uvedeným ukončujícím podmínkám, jsme stanovili na 2,0.

⁹) Viz program `hvezda.pas` na FYKOSích internetových stránkách.

Pro několik různých hodnot hustoty ve středu hvězdy jsme tak dostali závislosti \tilde{M} na \tilde{r} . Jejich tvar můžete vidět v grafu 8.

Je vidět, že s rostoucí centrální hustotou se zmenšuje poloměr hvězdy a zvětšuje její celková hmotnost. Zdá se ovšem, že tempo růstu celkové hmotnosti se postupně snižuje. To odpovídá skutečnosti, že existuje jistá kritická hmotnost hvězdy, která se ještě dokáže díky tlaku degenerovaného elektronového plynu ubránit dalšímu gravitačnímu kolapsu. Je-li hvězda hmotnější, čeká ji buď osud neutronové hvězdy, nebo dokonce černé díry.

Abychom mohli odhadnout tuto limitní hmotnost, provedli jsme výpočet pro přibližně sto různých hodnot centrální hustoty a zjišťovali, jak na ní závisí celková hmotnost hvězdy $\tilde{M}(\infty)$.

Získanou závislost uvádíme v grafu 9.

Vypočtenými body jsme proložili závislost typu

$$\tilde{M}(\infty) = A + \frac{B}{\tilde{\rho}(0)} + \frac{C}{\tilde{\rho}^2(0)} + \dots + \frac{F}{\tilde{\rho}^5(0)}.$$

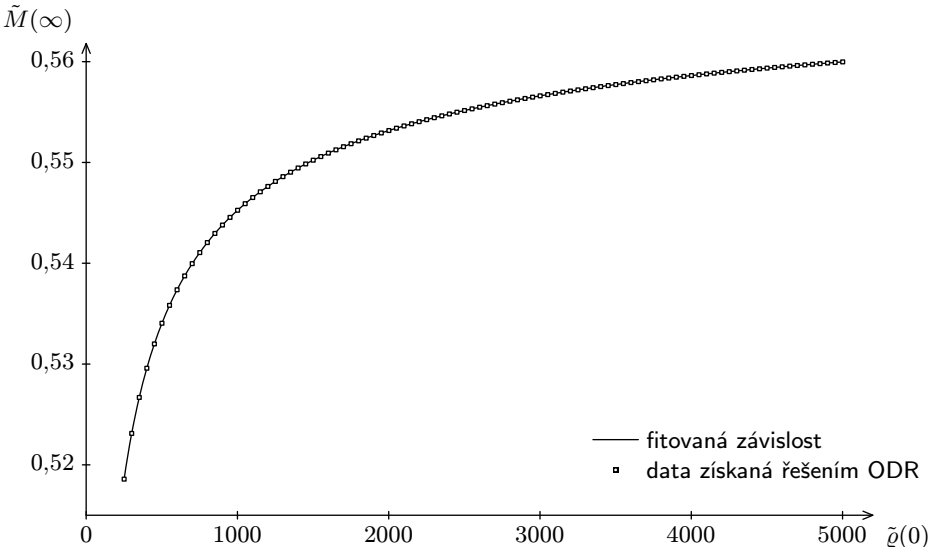
Hodnota A získaná pomocí gnuplotu je $0,56570 \pm 0,00004$. Toto číslo je ovšem také limitní hodnotou, ke které se blíží $\tilde{M}(\infty)$ pro $\tilde{\rho}(0) \rightarrow \infty$. Získali jsme tedy odhad maximální možné hmotnosti bílého trpaslíka

$$\tilde{M}_{\max} \doteq 0,5657.$$

Po vynásobení tohoto bezrozměrného čísla použitou jednotkou hmotnosti M_{\odot} dostáváme

$$M_{\max} \doteq 1,444M_{\odot}.$$

Wikipedia uvádí pro horní mez hmotnosti bílého trpaslíka tvořeného héliem podle S. Chandrasekhara (na jehož počest se nazývá *Chandrasekharovou mezí*) hodnotu cca $1,43M_{\odot}$. Ta se od naší vypočtené hodnoty liší pouze o cca 1 %, což je vzhledem k hrubosti použitého modelu jistě velmi uspokojivý výsledek.

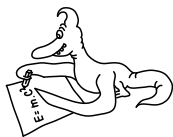


Obr. 9. Závislost celkové hmotnosti hvězdy na hustotě v jejím středu

Dodejme ještě, že jak naše, tak Chandrasekharova hodnota jsou založeny na řadě idealizací. Pro získání realističtějšího modelu by bylo nutno započítat efekty elektromagnetické interakce mezi elektrony a jádry hélia, obecně relativistické efekty atd.

Marek Pechal

marek@fykos.mff.cuni.cz



Řešení VI. série

Úloha VI.1 ... pterodaktyl sestřelen (3 body; průměr 2,62; řešilo 42 studentů)

Pterodaktyl letěl ve výšce 1 km nad pralesem rychlostí 4 m/s. Guerillový válečník, držící v ruce kalašnikov (kulka opouští hlaveň rychlostí 710 m/s), ho spatřil nad hlavou a vystřelil. Pták FYKOSák byl trefen do křídla a začal padat. Jak daleko od válečníka dopadl? (Odpor vzduchu si dovoďte zanedbat.)

Úlohu zplodil Jan Prachař císařským řezem.

Předpokládejme, že válečník vystřelí hned, jakmile má pterodaktyla nad sebou, a že tedy mezi spatřením a výstřelem neuplyne žádný čas. Dále předpokládejme, že kulka pterodaktylem pouze projde a nepředá mu žádnou kinetickou ani potenciální energii, pouze způsobí zranění.

Pohyb kulky rozdělíme do vodorovného a svislého směru, vodorovná složka bude rovná rychlosti pohybu pterodaktyla v_p a svislou dopočítáme na základě znalosti absolutní hodnoty rychlosti v_k .

$$v_s = \sqrt{v_k^2 - v_p^2}.$$

Pterodaktyl tedy bude sestřelen za čas, za který projektil vyletí do výšky, v níž pták FYKOSák letí,

$$h = v_s t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\sqrt{v_k^2 - v_p^2} - \sqrt{v_k^2 - v_p^2 - 2gh}}{g}.$$

Druhá rovnice má sice dvě řešení, ale to větší nás nezajímá, neboť vyjadřuje čas, kdy se trajektorie protnou, až bude kulka padat dolů. Za tuto dobu pterodaktyl uletí vzdálenost

$$s_1 = v_p t_1 = v_p \frac{\sqrt{v_k^2 - v_p^2} - \sqrt{v_k^2 - v_p^2 - 2gh}}{g}.$$

Nyní ještě musíme vypočítat, o kolik se vzdálí během pádu. Vzhledem k tomu, že zanedbáváme odpor vzduchu, budeme předpokládat, že se bolestí schoulí do klubíčka a bude padat volným pádem, místo aby se pokoušel plachtit. Dopadne tedy za čas

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

a za tento čas ještě uletí dráhu

$$s_2 = v_p t_2 = v_p \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Výsledná vzdálenost je součtem těchto dvou vzdáleností

$$s = s_1 + s_2 = v_p \left(\frac{\sqrt{v_k^2 - v_p^2} - \sqrt{v_k^2 - v_p^2 - 2gh}}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right).$$

Takže pterodaktyl dopadne 63 m od válečnicka.

Jan Jelínek

jjan@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.2 ... vaření hada (4 body; průměr 2,11; řešilo 27 studentů)

Ubohý pterodaktyl ze své klece s obavami pozoruje divokou zvěř v okolní džungli. Zejména ho zaujal párek bezstarostných hadů, kteří se chystali vlézt do jeho klece. Věznitelé je však neúprosně sevřeli klacky tvaru písmene Y. Z hadů bude výborná večere, malou radost z toho má i pták FYKOSák, ačkoliv dává přednost jinému než hadímu masu.

Tuhé maso jedovatých hadů se musí vařit při vyšší teplotě, k tomu se používá papíňák. Nádoba se naplní z poloviny vodou, v druhé polovině zůstane vzduch, potom se uzavře a pomalu zahřívá. Při jaké teplotě se začne voda v hrnci vařit? V jakých fázích voda existuje při rostoucí teplotě?

Ze sebraných úloh.

Nejprve si ujasněme počáteční stav našeho problému. V čase t_0 těsně po uzavření hrnce je nad vodní hladinou atmosféra skládající se z dusíku, kyslíku a zanedbatelného množství ostatních plynů a vodní páry. Její tlak označme p_0 . Jakmile začneme hrnec zahřívát, voda uvnitř se bude snažit dostat do dynamické rovnováhy se svým okolím. Tedy bude se vypařovat do doby, než se nad hladinou vytvoří sytá pára o tlaku p_s , jenž se odvíjí od teploty vody. Nad vodní hladinou tedy bude tlak $p = p_0 + p_s$.

Nyní si ujasněme, co se děje během varu. Při varu vznikají uvnitř kapaliny bubliny syté páry o tlaku p_s , které vystupují k povrchu kapaliny. Ovšem aby k varu vůbec došlo, musí být nad hladinou kapaliny tlak menší nebo roven tlaku sytých par při dané teplotě. V našem případě je však tlak nad hladinou kapaliny větší o tlak p_0 , tedy k varu nikdy nedojde. Během dalšího zahřívání po vytvoření syté páry nad vodní hladinou se bude stav našeho systému pohybovat po křivce syté páry až ke kritickému bodu. Pro vodu je kritická teplota rovna 374°C a kritický tlak je roven $22,1\text{ MPa}$.

Zbývá ještě odpovědět na otázku, v jakých fázích se bude voda během zahřívání vyskytovat. Nejdříve se bude vyskytovat jako kapalina a plyn, po jisté době bude ve stavu kapaliny a její syté páry a konečně po dosažení kritického bodu bude voda existovat v superkritickém stavu.

Zdeněk Kučka

zdenek@fykos.mff.cuni.cz

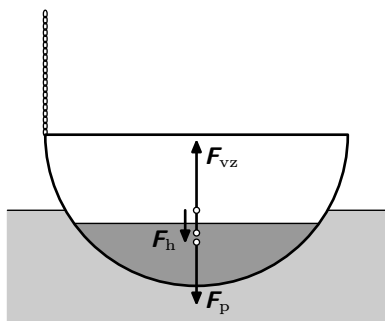
Úloha VI.3 ... hadí polévka (4 body; průměr 2,52; řešilo 31 studentů)

Když je hadí maso uvařené, kuchaři z něj připravují hadí polévku v měděných hrncích, které mají tvar polokoule o průměru 40 cm. Hrnec s polévkou dávají potom vychladit do nedalekého jezera. Když ho nechají plavat, ponoří se o 10 cm. K bodu na okraji hrnce je připevněn řetízek. Pokud za řetízek zatáhneme, a zvedneme tak okraj hrnce o 10 cm, nateče do hrnce voda?

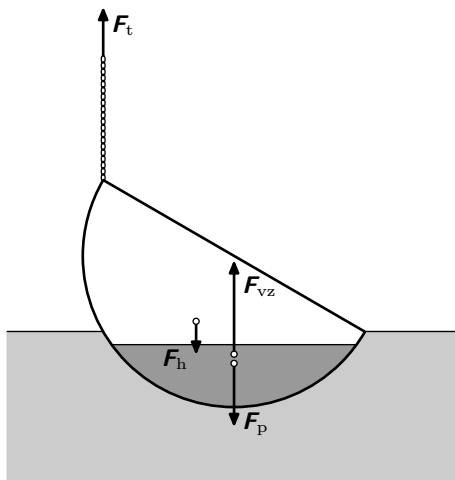
Ze sebraných úloh.

V této úloze si lehce procvičíme způsob řešení problémů, kde hledáme rovnovážnou polohu mechanické soustavy. Pro rovnovážnou polohu platí, že vektorový součet všech sil, stejně jako

součet všech momentů sil na soustavu působících, je nulový. Momenty působících sil (tedy skalární součin vektoru síly a ramena $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$) je vždy třeba vztáhnout k určitému bodu prostoru, od kterého toto rameno odměřujeme. Pro různě zvolené vztažné body je velikost momentu sil obecně různá. Když je moment nulový vůči nějakému vztažnému bodu, nemusí být nulový vůči jinému. Pokud má ale mechanická soustava být a zůstat nehybná, musí být její změna momentu hybnosti vůči libovolnému vztažnému bodu nulová, což implikuje nulovou výslednici momentů sil vůči libovolnému vztažnému bodu.



Obr. 10. Hrncel na hladině



Obr. 11. Hrncel v náklonu

Poloměr polokulového hrnce je $r = 20$ cm. Na počátku je hrncel ponořen do hloubky $r/2$, čemuž odpovídá objem „vytlačené“ vody V_0 , který bychom vypočetli jako objem kulové úseče. Tíhová síla \mathbf{F}_h působící na samotný hrncel, tíhová síla \mathbf{F}_p působící na polévku v něm a vztlačová síla \mathbf{F}_{vz} jsou v rovnováze, tedy jejich vektorový součet je roven nule¹⁰. Působíště síly \mathbf{F}_h klademe do těžiště polokulového hrnce, působíště \mathbf{F}_p do těžiště polévky a nakonec působíště \mathbf{F}_{vz} můžeme klást do těžiště vytlačené vody. Vztlačová síla je podle Archimédova zákona dána jako tíha objemu vody rovné ponořené části tělesa, tedy

$$F_{vz} = V_0 \rho g .$$

Všechny síly leží v jedné přímce a jejich moment vůči libovolnému bodu je proto nulový.

Nyní levý okraj hrnce vyzvedneme o $r/2 = 10$ cm. Jak velká část hrnce bude ponořena, pokud by se pravý okraj dotýkal přesně hladiny (viz obr. 11)? Tuto novou polohu hrnce bychom dostali pouhým pootočením hrnce okolo středu myšlené koule, jejíž částí hrncel je, a ponořený objem se tedy oproti původní poloze vůbec nezmění. Aby i v této pootočené poloze byl hrncel v rovnováze, je třeba zajistit rovnováhu sil a momentů sil. Nadále platí

$$\mathbf{F}_h + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{vz} = 0 .$$

¹⁰⁾ Sílu jakožto vektor píšeme tučným písmem, obyčejným skloněným fontem označujeme velikost této síly.

Síly už ale neleží v jedné přímce a hrnec má přirozeně tendenci otáčet se do původní stabilní polohy. Pro jeho udržení v nové poloze je třeba působit dvojicí sil, jejichž výslednice je nulová, ale působí silovým momentem. Museli bychom tedy hrnec na jednom okraji přizvedávat a na druhém stejnou silou přitlačovat.

V našem případě ovšem jen taháme za řetízek a působíme silou \mathbf{F}_t ve směru kolmo vzhůru. Aby byla i teď splněna rovnováha sil, musí platit

$$\mathbf{F}_h + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{vz} + \mathbf{F}_t = 0.$$

Síla \mathbf{F}_{vz} musí být patrně menší než na počátku, a to právě o velikost síly \mathbf{F}_t . Hrnec je proto ponořen do menší hloubky než $r/2$ a voda do něj nenateče (a ani z hrnce polévka nevyteče, protože pokud má hustotu srovnatelnou nebo větší než voda, je ji méně než objem V_0). Stejně tak uvažme moment sil vzhledem k bodu závěsu. Síla \mathbf{F}_t působí nulovým momentem a síly \mathbf{F}_{vz} a \mathbf{F}_p mají stejné rameno, v důsledku vytažení se zkrátilo rameno síly \mathbf{F}_h , a to musí být kompenzováno zmenšením síly \mathbf{F}_{vz} .

Zde bychom mohli skončit, ale pokusme se ještě nastínit, jak bychom vypočítali, v jaké poloze se hrnec ustálí a jakou silou musíme tahat za řetízek.

Nechť proměnná y udává výšku levého okraje hrnce oproti původní poloze a proměnná α sklon obruby hrnce vůči vodorovnému směru. Vše podstatné, co o naší mechanické soustavě víme, lze shrnout do následujících rovnic:

$$\begin{aligned} m_h + m_p &= V_0 \rho g, \\ \rho g(V_0 - V(y, \alpha)) &= F_t, \\ h F_h \sin \alpha - r F_t \cos \alpha &= 0, \end{aligned}$$

kde m_h je hmotnost hrnce a m_p hmotnost polévky.

Výraz $V(y, \alpha)$ značí ponořený objem hrnce, který závisí na proměnných y, α . Tento výraz nebude příliš pěkný a nebudeme ho konkrétně vyjadřovat. Písmeno h udává vzdálenost těžiště duté polokoule (hrnce) od středu koule. Nadšenci si mohou jako jednoduché cvičení na integrování vypočítat, že $h = r/2$. Druhá rovnice vyjadřuje myšlenku, že vztlaková síla poklesne o velikost tahové síly. Třetí z rovnic značí rovnováhu momentů sil vůči středu pomyslné koule, ramena sil \mathbf{F}_{vz} a \mathbf{F}_p jsou vůči tomuto bodu nulová. Bod, vůči kterému momenty vztahujeme, volíme tak, aby se rovnice co nejvíce zjednodušila. Dosazením druhé rovnice do třetí získáme snadno rovnici pro neznámou α . Tato rovnice však představuje rovnici s parametrem m_h , který neznáme. Pokud ale třeba budeme znát poměr m_h/m_p , určíme m_h a rovnicí pro neznámou α můžeme vyřešit například numericky metodou půlení intervalu.

Velká část řešitelů opomenula uvažovat vliv síly, kterou taháme za hrnec. Taková řešení jsme většinou hodnotili dvěma body.

Marek Scholz

mara@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.4 ... rychlý úprk (3 body; průměr 2,10; řešilo 20 studentů)

Pták FYKOSák statečně prchá chodbou (nemůže v ní letět), v patách má dva vojáky, kterým se před okamžikem vymkl z pout. Chodba zatáčí ve tvaru písmene L a pterodaktyl horlivě přemýšlí, jak dál.

Chodba je široká w , pterodaktyl běží rychlostí v_0 a zatáčka je ve vzdálenosti d . Pokud velikost ptákovy zrychlení dosáhne hodnoty a_0 , pterodaktyl uklouzne, spadne a bude chycen.

Po jaké dráze má běžet a jak se má naklánět, aby ho zatačka zdržela co nejméně?

Neodhadl Honza Jelínek při dobíhání tramvaje za rohem.

Podstatou této úlohy bylo najít dráhu, která minimalizuje čas projetí zatačkou. (Nikoli zrychlení jak se mnoho řešitelů mylně domnívalo). I když v následujícím autorském řešení postupujeme jinak, při opravování došlých řešení jsme akceptovali i předpoklad, že pták FYKOSák proběhne zatačkou po dráze složené jenom z přímek a částí kružnice. Správné řešení úlohy se totiž ukázalo být (oproti očekávání) poněkud komplikované. Dobře vypracované řešení tohoto typu však muselo obsahovat informaci o poloměru kružnice, po které pták poběží, zdůvodnění, proč je právě tehle poloměr nejlepší, a diskuzi podmínek úlohy.

Za předpokladu, že při pohybu po kružnici musí pták FYKOSák zpomalit, byl nejvýhodnější největší možný poloměr. Jinak to byl nejmenší poloměr, po kterém se mohl pohybovat svou maximální rychlostí a projel zatačkou (kratší dráha – menší čas). Když se totiž zapsal čas průchodu zatačkou jako funkce poloměru (čas = doba brzdění na požadovanou rychlost + doba rovnoměrného pohybu + doba rovnoměrného pohybu po kružnici + doba zrychlování), nejkratší vyšel pro maximální poloměr. Do diskuze by stačilo poznamenat, že když bude zrychlení potřebné na zastavení z počáteční rychlosti na vzdálenosti $d + b$ větší než a_0 , tak už nemůže před zatačkou ubrzdít, aniž by narazil do protější stěny (anebo došlo ke smyku). Dobře vypracované řešení tohoto typu měli například Petr Rysavý anebo Tereza Steinhartová.

Vágní formulace úlohy zde nemusela být vždy na škodu. Mohli jsme totiž předpokládat vstupní podmínky, které se nám zrovna hodily. K velice originálním řešením lze dojít, učiníme-li dodatečné předpoklady o velikosti či směru počáteční rychlosti (např. začíná z nuly, směřuje k rohu zatačky apod.). Lukáš Labor dostal bonusový bod za úvahu, kde předpokládal, že se běžec může odstrčit od stěny (proč ne?).

Ted' bychom měli vyjasnit, co jsme mysleli, když jsme v úvodu řekli „poněkud komplikované řešení“. V principu existují dvě metody, jak se úloha dala řešit. Praktická a teoretická. Tu první o něco jednodušší můžeme stručně nazvat „minimalizace času jako funkce parametrů s použitím downhill simplexové metody při dráze a průběhu rychlostí aproximovanými polynomiálními funkcemi“.

K dohledání aproximované dráhy a průběhu rychlosti použijeme počítač. Vysvětlení *downhill simplexové metody* by proto mělo patřit spíše do aktuálního seriálu. V principu se jedná o to, že namísto hledání přesné dráhy si ji budeme aproximovat nějakou polynomiální funkcí tvaru $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Čím více zvolíme členů této řady, tím bude naše aproximace přesnější. Podobně také rychlost zapíšeme jako $v = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$. Potom vypočítáme čas T jako integrální funkci rychlosti po dráze. Dostaneme funkci, která bude záviset na parametrech a_i, b_i . Minimum funkce mnoha proměnných najdeme downhill simplexovou metodou. Splnění podmínek úlohy docílíme vhodnou parametrizací a modifikací simplexové metody. Podrobněji můžeme postupovat následovně.

Řekněme, že v bodě A před zatačkou k ní pták FYKOSák utíká svou maximální rychlostí v_{\max} a stejně daleko za ní utíká přibližně tou samou rychlostí ale směrem od zatačky. Okrajové podmínky můžeme zvolit zcela libovolně, na postupu řešení se nic nezmění.

Pak zavedeme pravouhlou souřadnou soustavu s počátkem v rohu zatačky a osou y rovnoběžnou s její osou. Souřadnici x vyjádříme jako funkci času a souřadnici y jako funkci x . Budeme předpokládat, že tyto funkce mají tvar

$$x = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0,$$

$$y = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

kde jsme pro přehlednost zapsali obě funkce jen jako polynomy třetího řádu. Řád polynomů samozřejmě můžeme zvolit i vyšší, podle toho, jakou přesnost požadujeme. Můžeme dokonce zvolit i obecnější funkce (třeba nahradíme t za $\tau = t - T_0$).

Dále zapíšeme podmínky úlohy. Budeme chtít, aby pták FYKOSák v žádném okamžiku nepřišel do kontaktu se stěnami chodby. To v dané souřadnicové soustavě vyjádříme nerovnostmi

$$|x| < y < |x| + \frac{\sqrt{2}}{2}b.$$

V žádném čase nemůže běžet rychleji nežli maximální (tedy počáteční) rychlostí

$$v^2 < v_{\max}^2, \quad v^2 = (\dot{x})^2 + (y'\dot{x})^2,$$

kde tečkou značíme derivaci podle času a čárkou derivaci podle x . Požadavek na zrychlení menší než a_0 zapíšeme jako $a_t^2 + a_d^2 < a_0^2$, tedy

$$(\ddot{x}^2 + (y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x})^2) + (kv^2)^2 < a_0^2, \quad \text{kde křivost} \quad k = \frac{1}{r} = \left| \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \right|.$$

Podmínku, že za zatáčkou dosáhnou funkce polohy a rychlosti požadovaných hodnot zapíšeme jako

$$v = v_{\max}, \quad y' = y'|_{t=0} \pm 10\%, \quad x = -x_A. \quad (7)$$

A konečně pták FYKOSák musí projít bodem A a mít v něm požadovanou rychlost, tedy pro $t = 0$ musí být hodnoty x a y a jejich derivace rovny hodnotám v bodě A. Jako poslední musíme doplnit ještě $t < T_{\max}$. Význam této poslední podmínky spočívá v tom, že zavrhneme ty dráhy, pro které by průchod zatáčkou trval příliš dlouho. Použitá parametrizace může totiž teoreticky popsat i dráhu, při které bude dělat kolečka v chodbě.

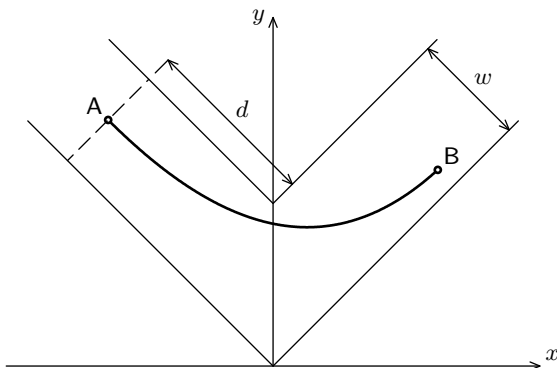
Podmínky pro povolené hodnoty parametrů a_i , b_i můžeme získat z předchozích vztahů tak, že do nich dosadíme funkce $x(t)$ a $y(x)$ v předpokládaném tvaru. Pro $t = 0$ plyne přímo z tvaru těchto vztahů podmínka $a_{00} = x_A$. Z podmínky na počáteční rychlost (derivace) plyne $a_1 = \dot{x}|_{t=0} = v_0^{(x)}$. To dosadíme do funkce $y(x)$ a můžeme vyloučit dva z koeficientů.

Nakonec zjistíme dobu průchodu zatáčkou. Při daných parametrech a_i , b_i zvolíme malý časový krok δt . Začneme v bodě A, vypočítáme \dot{x} a \dot{y} a zjistíme, kam se posune za δt . V tom bodě znovu vypočítáme rychlost stejně jako předtím atd. až dokud nejsou splněny podmínky (7) anebo celkový čas nepřesáhne povolené maximum.

Jestliže budeme uvažovat čas jako funkci parametrů a_i , b_i a souřadnice budeme uvažovat ve výše uvedeném tvaru, úloha se změní na hledání minima funkce několika proměnných. Celkem je jich osm, z počátečních podmínek však máme čtyři. Hledáme tedy minimum funkce čtyř proměnných. Problém je jen v tom, že nemáme její analytické vyjádření, ale jenom návod jak ji pro dané parametry vypočítat. A právě tenhle problém řeší simplexová metoda. Vysvětleme nyní její podstatu.

Představme si, že chceme najít minimum spojitě funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$. Graf takové funkce ve třech dimenzích vypadá jako reliéf (jáma, kopec, ...). Vybereme v rovině (x, y) tři body. Můžeme to udělat tak, že jeden bod vybereme zcela náhodně (anebo se zkusíme trefit do blízkosti minima) a zbylé body budou od něho posunutě o nějakou vzdálenost vždy ve směru jiné souřadnice. Vypočítáme hodnotu funkce ve všech třech bodech. Vezmeme bod, ve kterém má funkce největší funkční hodnotu (pokud je jich víc ekvivalentních, vybereme kterýkoli),

a zobrazíme ho symetricky podle přímky tvořené zbylými dvěma body. Teď by bod měl být blíže k minimu než zbylé dva, tj. funkční hodnota v něm by měla být menší. Jestliže tomu tak není, zmenšíme trojúhelník tvořený vybranými body (posuneme zbylé body podél stran blíže ke středu trojúhelníku) a dále postupujeme stejně. Algoritmus končí ve chvíli, kdy jsou body u sebe blíže, než je přesnost, se kterou chceme nalézt bod minima. Celý algoritmus si můžeme tedy představit tak, že „kutálíme“ trojúhelník po povrchu grafu funkce a v blízkosti minima ho postupně zmenšujeme. Pro funkci třech proměnných už nebudeme kutálet trojúhelník po rovině, ale čtyřtětěn v trojrozměrném prostoru. Tento postup jde zobecnit i do více dimenzí. Výhoda této metody je ta, že není potřeba hledat derivace minimalizované (maximalizované) funkce. Stačí nám pouze znát funkční hodnoty ve vyšetřovaných bodech.



Obr. 12. Počítačová simulace trajektorie ptáka FYKOSáka v nepřehledné zatáčce

Modifikace simplexové metody pro naši úlohu spočívá v tom, že ne všechny body budou přípustné. Při výpočtu času musíme zároveň kontrolovat splnění všech podmínek úlohy. Pokud by se měl některý z bodů simplexu posunout do nepřípustné polohy, dostaneme pro daný bod čas T_{\max} a dojde k zmenšení simplexu.

Při praktické implementaci jsme použili upravený kód z knihy Press et al.: *Numerical recipes in C*. Pro konkrétní hodnoty $d = 3$ m, $w = 2$ m a $v_{\max} = 8$ m/s jsme našli nejvýhodnější křivku pro průchod zatáčkou zobrazenou na obrázku. Doba pohybu po této křivce vyšla $t = 0,49$ s. Naproti tomu dostat se stejně daleko za zatáčku po nejvýhodnější čtvrtkružnici by trvalo přes 0,7 s. Už takhle jednoduchou aproximací jsme tedy zlepšili čas průchodu zatáčkou až o 30 %! Kdybychom zvolili lepší aproximaci, případně se více pohráli s počátečním a koncovým bodem, tento čas by určitě šel ještě vylepšit.

Úloha se v principu dala řešit také analyticky¹¹. Toto řešení však už bylo natolik komplikované, že zde poskytneme jen nástin toho, jak by se dalo postupovat. Abychom mohli vysvětlit podstatu tohoto řešení, budeme potřebovat alespoň základy variačního počtu. V následujícím „intermezzu“ si shrneme pár základních poznatků o něm.

Budeme se zabývat křivkami, které jsou definované pomocí intervalu $I = \langle x_A, x_B \rangle$ a funkce $y(x)$, která má v bodech x_A a x_B dané hodnoty y_A a y_B . Křivku potom tvoří všechny body $(x, y(x))$ pro $x \in I$. Rozdílu funkčních hodnot dvou různých funkcí $y_0(x)$ a $y(x)$ v některé přípustné hodnotě x říkáme *variační funkci*.

Zobrazení z množiny všech možných takových křivek do množiny reálných anebo komplexních čísel se nazývá *funkcionál*. Speciálně se budeme zabývat funkcionály typu $C(K) = \int_{x_A}^{x_B} F(x, y, y') dx$, kde K je křivka (daná intervalem a funkcí). Číslo $V = C(K_0) - C(K) = \int_{x_A}^{x_B} [F(x, y_0, y'_0) - F(x, y, y')] dx$ nazýváme *variační funkcionál* pro dvě křivky dané intervalem I a funkcemi y a y_0 . Řekneme, že dvě křivky jsou tím odlišnější, čím větší je jejich variace.

Základní úlohou variačního počtu je nalézt extrém funkcionálu ve výše uvedeném tvaru. Podobně jako pro minimum obyčejné funkce bude platit, že hodnota funkcionálu pro nějakou křivku bude větší (menší) než hodnota pro křivky z nějakého okolí (tedy pro křivky, kterých variace od uvažované je menší než něco). A tak jako pro extrém funkce existuje podmínka $y' = 0$, funkcionál uvažovaného tvaru má extrém pro křivku K , když y splňuje diferenciální rovnici

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Pro variační problém s vedlejšími podmínkami, který budeme řešit, se rovnice změní na

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y'} \right) = 0, \quad (8)$$

kde g je vazba ve tvaru $g(x, y, y') = 0$ a λ je tzv. Lagrangeův multiplikátor, který je potřeba z dané rovnice najít.

S touto teoretickou přípravou můžeme postoupit dál. Budeme hledat tvar křivky, po níž pták FYKOSák proběhne zatáčku za předpokladu, že jeho rychlost se mění spojitě. Ve vhodné souřadnicové soustavě vypočítáme čas jako integrál funkcí $x(t)$ a $y(t)$, který bude ve tvaru funkcionálu, jehož minimum potom nalezneme pomocí uvedené podmínky (8).

Zvolíme počáteční a koncový bod dráhy jako dva body, kterými musí pták FYKOSák projít, a také složky jeho rychlosti v nich. Jako další parametr vezmeme bod, ve kterém projde osou zatáčky. Ve finálním výsledku pak budeme ještě muset hledat minimum času jako funkce polohy tohoto bodu, to je už však relativně snadná operace. Dráhu rozdělíme na dvě části (před zatáčkou a po zatáčce) a v každé zvolíme jiné souřadnice. Osa y bude vždy rovnoběžná se stěnami chodby, osa x kolmá na ně. Celkový čas bude součtem časů potřebných k projetí od začátku do bodu na ose a z bodu na ose do koncového bodu. Druhá část dráhy bere jako vstupní parametry rychlost na konci první části. Tohle řešení není úplně obecné (nezahrnuje všechny možné dráhy, např. x nemůže být menší než x_A), ale dalo by se na něj převést vhodnou transformací souřadnic. Pro názornost ukážeme jenom nalezení dráhy v jedné části. Pro výpočet celkového času, za který se projdou obě pak už stačí do těch samých vzorečků dosadit součet dvou funkcí místo jedné.

¹¹⁾ Tento postup byl inspirován řešením úlohy o *brachystroně*.

Budeme uvažovat $x = x(t)$ a $y = y(x(t))$ a najdeme celkový čas, za který pták proběhne po dráze mezi dvěma body popsané těmito funkcemi. Jelikož $v = ds/dt$, tak

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v}, \quad (9)$$

kde se integruje od začátku do konce dráhy. Rozepíšeme ds pomocí vzorce pro délku křivky

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

a zapíšeme její složky ds_x a ds_y . Průmět ds na osy x a y získáme pomocí $y' = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je sklon k ose x . Z toho

$$ds_x = \cos \alpha ds = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} ds \quad \text{a} \quad ds_y = \sin \alpha ds = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} ds.$$

Rychlosti zapíšeme jako \dot{x} , resp. \dot{y} .

Požadujeme, aby $v_x^2 + v_y^2 \leq v_{\max}^2$ a $a_x^2 + a_y^2 < a_0^2$. Vazbu g , která je formálně v požadovaném tvaru a tyto požadavky zahrnuje, můžeme zapsat např. takto

$$g_v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - v_{\max}^2) = 0 \quad \text{a} \quad g_a = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - a_0^2) = 0,$$

kde z je cokoli. Za g dosadíme součet $g_v + g_a$.

Dosazením těchto vyjádření do integrálu (9) dostaneme dvě složky funkcionálu. Dvě funkce F_x a F_y dosadíme do rovnice (8). Odsud dostaneme soustavu dvou nelineárních diferenciálních rovnic druhého ze které dostaneme soustavu pro Lagrangeovy multiplikátory. Z nich máme dostat y a \dot{x} , odkud bychom měli získat parametrický popis dráhy. Zájemci si mohou tyto rovnice zkusit napsat sami (nezapomeňte, že \dot{x} je také funkce x). Ostatní raději jejich explicitním vyjádřením děsit nebudeme.

Zde uvedený analytický postup byl jen náznakový. Jeho cílem nebylo úlohu vyřešit, ale ukázat myšlenkovou cestu a potřebný aparát, které by byly potřeba pro analytické řešení neboli ukázat, proč jsme úlohu řešili raději na počítači. I po tomto nástinu jistě oceníte jednoduchost a účelnost první ukázané metody.

Peter Greškovič

grepe@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. P ... *mission impossible* (3 body; průměr 2,78; řešilo 23 studentů)

Naplánujte záchrannou misi a vysvobodte ptáka FYKOSáka. Nezapomeňte na plán B, příp. C. *Vymyslel militantní Honza Prachař.*

„Neletím nad tím pralesem už nějak dlouho?“ zamyslel se pták FYKOSák, když pod sebou už pátou hodinu neviděl nic než vrcholky stromů. A vtom se pod ním z ničeho nic objevila paseka, na které někdo poskakoval a mával jakousi holí. Kdo by si myslel, že to byl kmenový šaman, a letěl se podívat blíž, udělal by stejnou osudovou chybu jako pterodaktyl. Hůl nebyla hůl, ale kalašnikov, a než se FYKOSák stačil rozkoukat, už padal s prostřeleným křídlem mezi mahagony a další vzácné dřeviny. „¡Chupacabras, chupacabras!“ křičeli neznámí útočníci a mávali útočnými puškami ve vzduchu, načež si ptakoještěr uvědomil, že být zaměněn s legendární příšerou, která domorodcům drancuje stáda, není zrovna nadějná vyhlídka.

Když se za nějakou dobu probudil, už nebyl v pralese, ale v rezavé kleci uprostřed dvora neznámé haciendy. Ve stínu u vchodu poklímávaly strážce a u hlavní brány ležel nepřípoutaný pes. A všude okolo hejna much a komárů. Najednou se rozletěly dveře a po dalších dvou gorilách z nich vyšel postarší, rovněž omaskáčovaný, muž, okolo kterého jako další otravný hmyz poletoval malý zavalitý hispánc a stále něco španělsky brebentil. V ruce držel FYKOSákův batoh a když došli ke kleci, zašmátral, našel ročenku FYKOSu a podal ji šéfovi.

„¿Qué es?“ španělsky se zeptal velitel.

„Ročenka FYKOSu,“ odpověděl česky pták FYKOSák.

Obě strany brzo shledaly, že takhle to dál nepůjde, a po chvíli handrkování a hrozeb zbrani FYKOSák nalistoval v ročence tiráž a ukázal na email, na který po nějaké době došla žádost o výkupné. Ale o tom vůbec nic nevěděl, a tak se rozhodl, že zkusí uprchnout sám, až se mu křídlo aspoň trochu zahojí.

Výkupné stále nepřicházelo, ale aspoň už jej nedrželi v kleci. Ochránka chytila jaguára, a tak rukojmí muselo z klece do cely a chudák šelma s klecí do cirkusu. Křídlo sice ještě trochu bolelo, ale kožní blána už byla vcelku srostlá a nějakou desítku kilometrů by snad už odletěl. Ale z rozhovorů mezi vojáky a personálem haciendy odposlechl, že jej zajala teroristická organizace FARC a že momentálně je na venkovském sídle jejího nejvyššího velitele, což byl ten stařík, kterého viděl první den. Z takového vězení se špatně utíká.

Ale rozhodně nepropadl zoufalství a pomalu, ale jistě se připravoval k útěku. V měkkých cihlách okolo dveří a oken vyškrabal drážku, kterou postupně zvětšoval. Jednou bude stačit mocný pterodaktylí kop a poletí ven i s „futrama“. Už jen čekal na správnou příležitost.

„¡Alarma!“ ozvalo se z chodby. Stráž sedící naproti FYKOSákově cele spadla ze židle a zbystrila. Pterodaktyl koukl škvírou ve dveřích ven a v tu ránu mu před nosem přeběhla skoro celá vojenská posádka a jeden doktor, který za nimi vlál jak praporek ve víchřici. Vojáci na chudáka felčara pokřikovali nějaké španělské nadávky, ze kterých FYKOSák pochytil jenom *infarkt* a *Tiروفijo*, což byla přezdívka velitele, a pomyslel si, že taková příležitost už se mu nenaskytne. Skočil na dveře, které podle očekávání povolily, a v oblaku prachu z vylámaných cihel dopadl na nic nečekajícího hlídače a utíkal směrem ke světlu. Ve shonu, který před chvílí vypukl, skoro nikdo nepostřehl, že vězeň chybí. Kdyby nenarazil na dva vojáky právě se vracející z latriny, které brzo setřásl, když bleskově proběhl rohem chodby a za sebou zvrhl pytel kuličkových ložisek (jaká náhoda, že tam zrovna byl), na kterých si pronásledovatelé doslova vylámali zuby, nikdo by si ho ani nevšiml. Dvůr byl prázdný, jak se všichni nahrnuli do budovy zjistit, co se děje s jejich velitelem. Mimochodem, dostal infarkt. FYKOSák na nic nečekal, zamával křídly a hned stoupal mimo dostřel kalašnikovů.

Aleš Podolník

ales@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. E ... magnetický zámek (8 bodů; průměr 4,74; řešilo 27 studentů)

Cela, ve které je pterodaktyl vězněn, je uzamčena pomocí magnetického zámku. Americké tajné služby vlastní prototyp tohoto zámku a kousek z jeho magnetu vám posíláme v obálce se sérií. K otevření zámku bez klíče je nutné znát, jak závisí síla mezi dvěma magnety na jejich vzdálenosti. Změřte co nejpřesněji tuto závislost!

Návod: Mezi oba magnety postupně vkládejte tenké listy papíru a měřte sílu nutnou na odtržení magnetků od sebe. K vymyšlení úlohy donutila situace Honzu Prachaře.

Teorie

Látka se skládá z atomů. Některé atomy mají nenulový celkový spin – moment hybnosti a tedy i magnetický moment. Můžeme si to představit tak, že elektron obíhající kolem jádra vytváří proudovou smyčku a ta má, jak známo, magnetický moment. Když se stane to, že všechny atomární magnetické momenty mají stejný směr (feromagnet), máme magnet. Každý magnetický dipól (proudová smyčka) kolem sebe vytváří magnetické pole, prostřednictvím kterého působí na okolní dipóly.

Skutečný magnet se sice skládá z malých atomárních dipólů, jako celek však dipólem není. Abychom byli schopni vyřknout alespoň nějakou teoretickou předpověď, jako nejjednodušší přiblížení předpokládejme, že magnet dipól je.

Jak se píše v učebnicích, magnetické pole dipólu klesá ve velkých vzdálenostech od něj jako $1/r^3$. Energie dipólu \mathbf{m} v poli \mathbf{B} je $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$, tudíž síla mezi dipóly klesá jako $1/r^4$. Na druhou stranu, pokud jsou dva magnety velice blízko, takže každá indukční čára vycházející z jednoho magnetu skončí ve druhém, je síla konstantní – nezávisí na vzdálenosti. Co bude platit v našem případě?

Vzdálenosti, na kterých budeme sílu mezi magnety měřit, bude srovnatelná s velikostí magnetů. Nemůžeme tedy mluvit o tom, že bychom byli v režimu velké vzdálenosti, kdy platí $F \sim 1/r^4$. Naopak síla není ani konstantní, neb měříme její pokles, dokud udrží dva magnety u sebe.

Zdá se, že jsme ve svízelné situaci. To nás však nesmí mrzet. Úlohu jsme proto zadali jako experimentální, abychom si onu závislost síly na vzdálenosti magnetů proměřili. Můžeme očekávat, že síla bude klesat pomaleji než $1/r^4$.

Na závěr teoretického úvodu uvedme, že v analogii z elektrostatikou bychom mohli sílu mezi dvěma kolineárními dipóly (dipóly leží na jedné přímce, dipólové momenty mají opačný směr) zapsat jako

$$F = \Upsilon \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2L)^2} - \frac{2}{(x+L)^2} \right), \quad (10)$$

kde Υ je konstanta závislá na materiálu a rozměrech magnetu a L je charakteristický rozměr magnetu. Pro $x \gg L$ se lze přesvědčit¹², že síla klesá podle vztahu $F = 6L^2\Upsilon/x^4$. V opačné limitě $x \ll L$ však síla diverguje, vztah tedy pro velice krátké vzdálenosti nedává správné předpovědi. Uvidíme, jak bude odpovídat naměřeným hodnotám.

Měření

Měřili jsme sílu mezi magnety, mezi těmi stejnými, jako každý řešitel obdržel v obálce se šestou sérií. Jak měřit, jsme vám napověděli. Mezi magnety budeme vkládat listy papíru a budeme měřit sílu nutnou na odtržení magnetů od sebe. Je vhodné použít nějaký jemný papír, jednak kvůli malé hmotnosti a jednak kvůli malé tloušťce.

Vzdálenost magnetů můžeme určit jako počet listů papírů mezi magnety krát tloušťka papíru. Tloušťku papíru pak nejlépe zjistíme opakovaným měřením tloušťky několika desítek

¹²⁾ Formulí pro sílu přepíšeme

$$F = \Upsilon \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{1}{(1+2L/x)^2} - \frac{2}{x^2} \frac{1}{(1+L/x)^2} \right)$$

a využijeme Taylorův rozvoj $1/(1+\xi)^2 = 1 - 2\xi + 3\xi^2 + O(\xi^4)$.

vrstev papíru, čímž podstatně snížíme chybu měření i chybu statistickou. Jinou možností je měřit vzdálenost mikrometrem pro každé měření zvlášť.

Sílu nutnou k odtržení magnetů od sebe lze měřit siloměrem nebo vážením. Měření siloměrem bude zatíženo velkou chybou. Jednak proto, že siloměry nejsou většinou konstruovány k dostatečně přesnému měření. Podstatnější je však fakt, že k odtržení magnetů dojde náhle a neočekávaně a maximální výchylka siloměru půjde odečíst jen během krátkého okamžiku.

Lepší metoda je následující. Jeden magnet upevníme tak, že rozhraní mezi magnety bude vodorovné, a na ten druhý spodní budeme zavěšovat závaží, dokud nedojde k odtržení. Jako závaží lze použít cokoli, nejlepší je však něco, co lze přidávat po malých kouscích, jako například písek nebo voda. Po odtržení změříme hmotnost závaží včetně spodního magnetu a případné pomocné konstrukce připevněné k magnetu (tj. miska), do které umísťujeme závaží. K měření hmotnosti použijeme dostatečně přesné váhy. Síla, která způsobila odtržení magnetů od sebe, je, jak tušíte, tíhová síla. Tu určíme snadno z hmotnosti vztahem $F = mg$. Jediné úskalí spočívá ve velikosti tíhového zrychlení, za kterou budeme dosazovat hodnotu $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Tím se dopustíme systematické chyby, ale zanedbatelné vůči ostatním chybám.

Výsledky

Dovolili jsme si převzít hodnoty naměřené *Terkou Jeřábkovou*, která provedla nejpreciznější měření, za což ji velice chválíme. Považte sami. Měřila sílu pro 30 různých vzdáleností (tedy až 29 vrstev papírů) a pro každou vzdálenost měřila sílu pětkrát. Tloušťka jednoho papíru byla $(0,100 \pm 0,002) \text{ mm}$. Naměřené hodnoty naleznete v tabulce a v grafu na obrázku 13. Kromě hodnot zobrazujeme i chybu měření síly Δ_F pomocí chybových úseček. Chybu určení vzdálenosti magnetů považujeme za zanedbatelnou oproti chybě změřené síly, a proto ji do grafu nezakresluje.

Změřené hodnoty síly mezi magnety pro různé vzdálenosti

x [mm]	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40
F [N]	2,12	1,90	1,65	1,49	1,34	1,20	1,11	0,99	0,88	0,82	0,79	0,72	0,67	0,61	0,57
Δ_F [N]	0,05	0,09	0,05	0,12	0,09	0,07	0,10	0,05	0,08	0,04	0,02	0,05	0,04	0,03	0,05
x [mm]	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90
F [N]	0,54	0,49	0,44	0,42	0,36	0,36	0,32	0,30	0,27	0,25	0,25	0,23	0,22	0,19	0,17
Δ_F [N]	0,03	0,03	0,03	0,02	0,03	0,02	0,03	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03

Změřením 30 bodů závislosti naše úsilí samozřejmě skončit nesmí. Naměřenými body proložíme křivku. Předpokládejme nejprve mocninnou závislost $F(x) = A(x/b - 1)^{-c}$ a hledáme hodnoty parametrů A , b a c . Výsledkem je

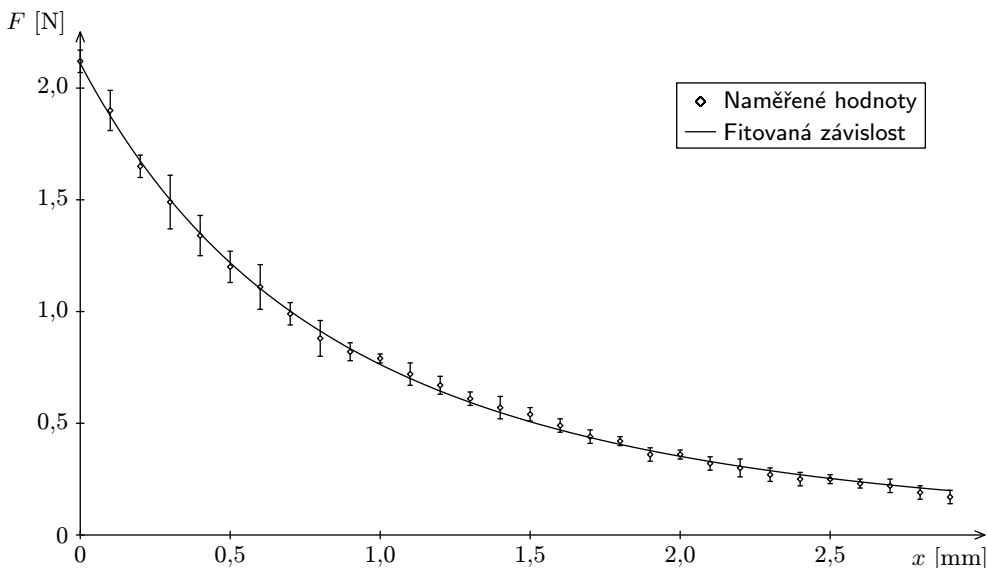
$$A = (2,1 \pm 1,5) \text{ N}, \quad b = (2,8 \pm 0,6) \text{ mm}, \quad c = (3,3 \pm 0,6).$$

Křivka této fitované závislosti je vynesena v grafu na obrázku 13.

Rovněž můžeme změřené body fitovat funkcí ve tvaru (10), kterou jenom zkoriguje posunem počátku souřadnic o a . Námí zvolená nulová vzdálenost mezi magnety totiž nemusí odpovídat nulové vzdálenosti podle teoretického modelu. Parametry vyjdou

$$\Upsilon = (12 \pm 9) \text{ N}\cdot\text{mm}^2, \quad L = (2,7 \pm 1,7) \text{ mm}, \quad a = (2,0 \pm 0,4) \text{ mm}.$$

Výsledná funkce má téměř identický průběh jako předchozí mocnná závislost, v grafu jí tedy odpovídá stejná křivka (v daném zvětšení by mezi křivkami nebyl patrný rozdíl).



Obr. 13. Graf závislosti síly mezi magnety na jejich vzdálenosti

Diskuse a závěr

Sílu mezi magnety v závislosti na jejich vzdálenosti jsme měřili v rozmezí od nulové vzdálenosti, až dokud byla síla mezi magnety našimi možnostmi měřitelná, tj. v rozmezí 0–3 mm. Měření se dalo realizovat relativně přesně, což lze vidět i z grafu, protože body leží na hladké křivce a nejsou kolem ní „příliš rozházené“.

Hledali jsme mocnnou závislost, která nejvíce odpovídá změřeným bodům, a výsledkem byl pokles zhruba se třetí mocninou vzdálenosti $c = (3,3 \pm 0,6)$. To je očekávaný závěr (pokles je pomalejší než se čtvrtou mocninou).

Při fitování teoretického vztahu (10) jsme dospěli k výsledku, který také výborně vystihuje závislost změřenou, a navíc jsme získali odhad pro rozměr magnetu $L = (2,7 \pm 1,7)$ mm, což odpovídá realitě.

Sluší se ještě okomentovat výsledné chyby. Jistě jste si všimli, že chyby fitovaných parametrů jsou poměrně velké. To je způsobeno tím, že parametrů je hodně, nemáme pro ně žádná omezení a změřené body postihují relativně krátký interval. Například pokud výrazně změním hodnotu parametru Υ , můžeme to kompenzovat posunem funkce ve směru osy x , tedy změnou parametru a a dostaneme srovnatelně dobrou křivku. Pokud bychom znali b při prvním fitu či a ve druhém, výsledky by se výrazně zpřesnily.

Při měření bylo také nutné neopomenout fakt, že síla se může měnit i při vzájemném otáčení magnetů. To je způsobeno tím, že magnety byly uchyceny v kovových pouzdrech, do kterých mohly být vlepeny trochu nakřivo.

Poznámky k došlým řešením

S většinou řešení jsem byl spokojen a sešlo se jich hojně. Obzvlášť jsem oceňoval řešitele, kteří měřili pečlivě a nebyli líní změřit sílu pro co nejvíce vzdálenosti. Také jsem oceňoval ty, kteří neskončili u měření a pustili se do fitování a vyhodnocení chyb, což by měl být neopomenutelný fakt při měření závislosti dvou veličin. Někteří řešitelé fitovali exponenciální závislosti, což je vzhledem k fyzikální povaze úlohy neopodstatněné.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. S ... na přání (7 bodů; průměr 4,50; řešili 2 studenti)

Pokuste se o řešení libovolného problému z šesté kapitoly seriálu.

Zadal, nezadal Marek Pechal.

Vyhlička na Zemi

Rovnici trajektorie světelného paprsku v okolí černé díry

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} + \frac{3M}{r^2}$$

nejdříve převedeme do tvaru poněkud vhodnějšího pro numerické řešení. Všimneme si, že

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{dx},$$

kde dx je element vzdálenosti ve směru úhlové souřadnice φ . Označíme-li α úhel, který s tímto směrem svírá směr paprsku v daném bodě (znaménko α volíme kladné, pokud paprsek obíhá v kladném smyslu a přitom se zmenšuje jeho vzdálenost od centra), pak platí

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \alpha.$$

Odtud pak opětovným derivováním dostaneme, že

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{d\varphi} \right) = \frac{1}{r \cos^2 \alpha} \frac{d(\alpha + \varphi)}{d\varphi} - \frac{1}{r}.$$

Dále zřejmě úhel $\alpha + \varphi$ vyjadřuje směr světelného paprsku v daném bodě (tj. natočení vektoru k němu tečného vůči jistému pevně danému vektoru). Označme $\alpha + \varphi \equiv \varphi$. Součin $r d\varphi$ je opět roven elementu dx a ten lze vyjádřit jako $\cos \alpha ds$, kde ds je element dráhy paprsku. Dosazením pak dostáváme

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{\cos^3 \alpha} \frac{d\varphi}{ds}.$$

Použijeme-li pak zadanou rovnici trajektorie, získáme jednoduchý výsledek

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{3M}{r^2} \cos^3 \alpha.$$

Protože však při numerickém výpočtu bude výhodnější pracovat spíše se samotným tečným vektorem než s úhlem popisujícím jeho směr, provedeme ještě další úpravy. Jako \mathbf{n} budeme

označovat jednotkový vektor ve směru paprsku, jako \mathbf{r} vektor směřující z počátku souřadnic do příslušného bodu trajektorie a \mathbf{e}_z budiž vektor kolmý k rovině pohybu paprsku (zvolený tak, že vektory \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ a \mathbf{e}_z tvoří kladně orientovanou bázi). Jelikož vektor \mathbf{n} má konstantní jednotkovou velikost, platí $d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0$, tedy $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} = 0$. Navíc $\mathbf{n} \times d\mathbf{n} = \mathbf{e}_z \sin(d\varphi) \approx \mathbf{e}_z d\varphi$, odkud plyne $\mathbf{n} \times d\mathbf{n} = \mathbf{e}_z d\varphi$. Vynásobením této rovnosti vektorově vektorem \mathbf{n} zleva a využitím známé identity $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ dostaneme $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n}) - d\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z d\varphi$, neboli $d\mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z d\varphi$. Odtud pak ihned dostaneme

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{3M}{r^2} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z \cos^3 \alpha.$$

Využijeme-li dále zřejmé rovnosti $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = r\mathbf{e}_z \cos \alpha$, získáme dosazením

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{3M}{r^5} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) |\mathbf{n} \times \mathbf{r}|^2.$$

Výhodou této vektorové rovnice je, že platí obecně, a nejen pro pohyb v jediné zvolené rovině. Doplníme-li ji o druhou rovnici, která popisuje, jak se při pohybu mění vektor \mathbf{r} , tedy

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{n},$$

dostaneme soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé vektorové funkce $\mathbf{n}(s)$ a $\mathbf{r}(s)$, které můžeme snadno řešit například některou z Runge-Kuttových metod. Získáme tak rovnou trajektorii paprsku parametrizovanou dráhou s .

Můžeme tedy přikročit k samotnému raytracingu, jehož princip byl popsán v zadání. Jednoduše začneme s polohovým vektorem $\mathbf{r}(0)$, který je roven polohovému vektoru pozorovatele, a směrovým vektorem $\mathbf{n}(0)$, který představuje směr pozorovatelova pohledu. Pak řešíme výše uvedenou soustavu ODR a sledujeme, jestli paprsek nezasáhl povrch některého z objektů, které jsme si do 3D scény umístili. Jestliže ano, vykreslíme na příslušné místo promítací roviny bod (jeho barva může být odvozena např. z barvy, struktury a osvětlení zasaženého bodu objektu). Jestliže paprsek nic nezasáhl ani po předem zvoleném maximálním počtu výpočetních kroků, bod nevykreslíme (nebo vykreslíme bod s barvou pozadí¹³). Stejně tak, pokud paprsek zmizel pod horizontem černé díry (tj. jeho vzdálenost od ní se zmenšila pod hranici $2M$).

Princip algoritmu, který jsme použili my, je jednoduchý. Každý z objektů ve 3D scéně je reprezentován určitou reálnou funkcí f v třírozměrném prostoru. Kladná hodnota funkce znamená, že příslušný bod je vně objektu, záporná označuje vnitřní body objektu (pro kouli o poloměru 2 a střed v bodě $(1, 2, 3)$ by taková funkce mohla být např. $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 4$). Při numerickém integrování soustavy ODR tedy opakovaně počítáme hodnotu funkce f v bodě \mathbf{r} . Pokud je kladná, pokračujeme ve výpočtu. Jakkmile změní znaménko, víme, že paprsek narazil na objekt. Vrátime se tedy o krok nazpátek, zmenšíme krok (např. na polovinu) a postupujeme dále. Tuto proceduru opakujeme, dokud není krok menší než požadovaná přesnost, s jakou chceme průsečík paprsku s povrchem objektu najít.

Náš program jsme obohatili o některé spíše kosmetické drobnosti, jako je možnost stínování objektu podle libovolně rozmístěných světelných zdrojů (nepočítáme však se stíny, které vrhají

¹³) Ta ovšem nemusí být konstantní. Můžeme předpokládat, že paprsek se dále pohybuje rovnoměrně (provedli jsme velký počet výpočetních kroků, předpokládáme tedy, že se paprsek nachází někde daleko od centra), a vypočítáme, kde protne námi zvolené vzdálené objekty. Těmi může být například krajina, hvězdné nebe apod.

samotné objekty, s odrazy ani s ohybem světla ze zdrojů v gravitačním poli – řešení podobných detailů není pro náš účel nezbytné) či nanesení textury na objekt.

Vykreslovali jsme vzhled scény sestávající ze Země, v jejímž okolí se vznáší černá díra. Přitom jsme samozřejmě nebrali v potaz fakt, že by naše drahá planeta byla slapovými silami od takto masivního objektu v okamžiku roztrhána na kousky (naším cílem je pouze znázornit deformaci vzhledu objektů v okolí velmi masivního tělesa). Také jsme neuvažovali frekvenční posuv v gravitačním poli, který by způsobil změnu barvy přicházejícího světla.

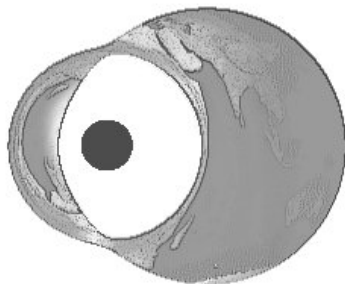
V jedné ze simulací jsme pozorovatele posadili do počátku souřadnic a Zemi do bodu o souřadnicích $(0, 0, -3)$. Jednotka délky je zvolena tak, že poloměr Země je roven 0,4. Do bodu $(-0,2; 0; -1,5)$ jsme umístili černou díru o poloměru $2M = 0,02$ (to odpovídá cca stonásobku hmotnosti Slunce – fatální důsledky pro Zemi i pozorovatele zřejmě netřeba zdůrazňovat). Pozorovatel se dívá proti směru osy z , tedy přímo k Zemi. Značně pokřivený obraz, který uvidí, je znázorněn na obrázku 14.¹⁴

Závěrem ještě drobné doznání. Zatajili jsme před vámi jednu nepřesnost našeho modelu. Sférické souřadnice, ve kterých popisujeme pohyb paprsku, jsou pouze matematicky zavedené objekty. Ve velké vzdálenosti od černé díry sice mají stejný význam jako „obyčejné“ sférické souřadnice, čím více se však přibližujeme k horizontu události, tím více se od nich liší. Sférické souřadnice, které jsou ze své definice souřadnicemi v plochém časoprostoru, nemůžeme v jejich původním významu přenést do časoprostoru zakřiveného. Jedním z důsledků této komplikace je, že při přechodu od námi použitých „sférických“ souřadnic do souřadné soustavy pozorovatele stojícího v určité vzdálenosti¹⁵ R od černé díry musíme vzdálenosti v radiálním směru vydělit faktorem $1 - 2M/R$, zatímco vzdálenosti v tangenciálním směru zůstávají stejné. Striktně vzato tedy námi získané obrázky nejsou zcela přesné, protože směrový vektor paprsku je třeba před začátkem výpočtu netriviálně přetransformovat z pozorovatelových souřadnic do globálních (podobně jako v případě speciálně relativistického raytracingu uvedeného jako příklad v zadání). Oprava však naštěstí spočívá pouze v přeškálování obrázků právě zmíněným faktorem $1 - 2M/R$. Ten se navíc pro naše obrázky liší od jedničky jen řádově o setiny.

Chaotické dvojkyvadlo

Z pohybových rovnic dvojkyvadla jsme si vyjádřili $\ddot{\vartheta}_1$ a $\ddot{\vartheta}_2$ jako funkce $\dot{\vartheta}_1$, $\dot{\vartheta}_2$, ϑ_1 a ϑ_2 . Přitom jsme zvolili $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$ (tedy $\mu = 1/2$ a $\kappa = 1$) a $\omega = 1$.

Soustavu ODR jsme řešili Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu. Tato metoda je pro většinu aplikací dostatečně přesná, v případě chaotických systémů však ani ona nedokáže po-



Obr. 14. Vzhled scény složené ze Země se středem v bodě $(0, 0, -3)$ a poloměrem 0,4 a černé díry o středu $(-0,2; 0; -1,5)$ a poloměru 0,02 z hlediska pozorovatele v počátku

¹⁴⁾ Další obrázky i program `raytracing_console.pas`, kterým byly vytvořeny, můžete najít na FYKOSích webových stránkách.

¹⁵⁾ Dalším příkladem zvrhlého chování prostoru v obecně relativistických situacích je to, že i samotný pojem vzdálenosti přestává být tím, čím se zdá. Pokud například změříme vzdálenost mezi dvěma body pomocí radiolokace, dostaneme jiný výsledek než při „fyzickém“ měření pomocí tuhých tyčí.

skytnout zcela spolehlivé výsledky. Pokud bychom chtěli skutečně precizně simulovat chování dvojkvyadla, bylo by třeba použít některý ze sofistikovaných algoritmů navržených speciálně pro řešení pohybových rovnic (např. tzv. *symplektické integrátory*). Nás ale spíše než konkrétní stav kyvadla po určité době zajímají statistické aspekty jeho časového vývoje. Můžeme se tedy spokojit i s „méně přesnou“ metodou.

Při každé simulaci jsme nejdříve náhodně nastavili polohu jednoho kyvadla (zvolili jsme náhodně ϑ_1 a ϑ_2 z intervalu $[0, 2\pi)$) a počáteční rychlosti jsme položili rovny nule. Úhly ϑ'_1 a ϑ'_2 pro druhé kyvadlo jsme pak nastavili na k_1 , resp. k_2 -násobek úhlů ϑ_1 , resp. ϑ_2 , kde

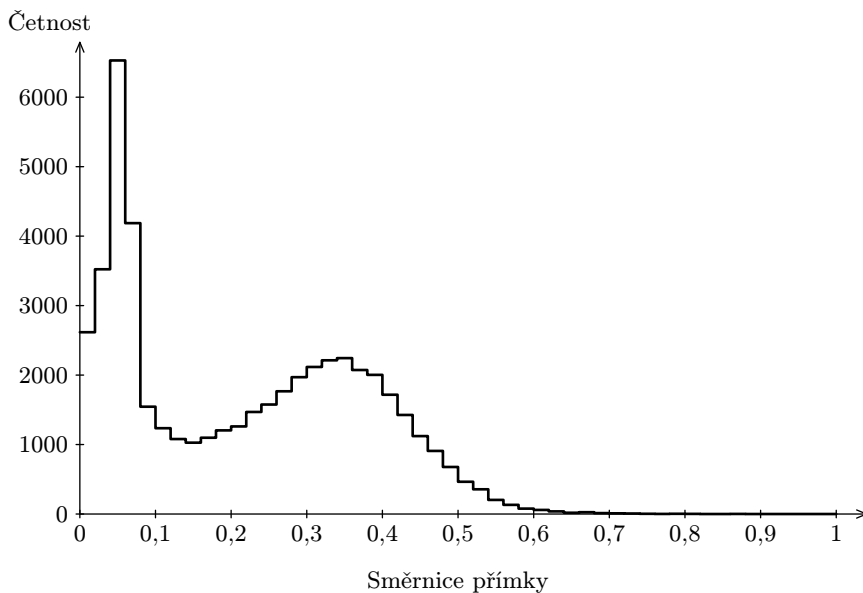
$$k_1 = 1 + \varepsilon \sin \alpha,$$

$$k_2 = 1 + \varepsilon \cos \alpha.$$

Tato procedura zajistí, aby relativní odchylka poloh obou dvojkvyadel byla přibližně rovna danému ε a přitom byla náhodně rozdělena mezi úhly ϑ_1 a ϑ_2 podle náhodného parametru α . Pro náš výpočet jsme zvolili $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-10}$ (jde tedy skutečně o velmi malou odchylku).

Po nastavení počátečních podmínek jsme prováděli simulaci obou kyvadel (použili jsme integrační krok $dt = 2 \cdot 10^{-4}$) a průběžně sledovali hodnotu odchylky

$$d = (\vartheta_1 - \vartheta'_1)^2 + (\vartheta_2 - \vartheta'_2)^2 + (\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}'_1)^2 + (\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}'_2)^2.$$



Obr. 15. Histogram směrnice přímek proložených závislostmi $\log d(t)$

Simulaci¹⁶ jsme zastavili po dosažení času $t = 36$, případně pokud d překročilo hodnotu 1.

¹⁶⁾ Program `chaos_dvojkjv.pas` naleznete na FYKOSích webových stránkách.

Jestliže se vzdálenost obou kyvadel ve fázovém prostoru skutečně zvětšuje přibližně exponenciálně, pak hodnota veličiny $\log d$ roste zhruba lineárně. Závislosti $\log d(t)$ získanou výpočtem jsme tedy proložili přímkou použitím metody nejmenších čtverců a zaznamenali její směrnici (která souvisí s Lyapunovovým koeficientem).

Celý výpočet jsme opakovali 5000krát a vypočtené směrnice jsme znázornili ve formě histogramu (viz obrázek 15).

Vidíme, že typicky se hodnota směrnice pohybuje v řádu desetin. Maximální hodnota je přibližně 0,6. V histogramu se sice vyskytují i vyšší hodnoty, ale jejich zastoupení je zanedbatelné. Uvědomme si také, že použitá metoda trpí několika těžko odstranitelnými neduhy – například závislost $\log d(t)$ je lineární jen v dlouhodobém průměru, pro přesnější určení směrnice by tedy bylo třeba provést mnohem delší simulaci (pokud možno v časovém úseku řádově větším, než je typická perioda pohybu dvojkyvadla). To ovšem není možné, právě protože je studovaný systém chaotický. Aby si obě dvojkyvadla zůstala po celou dobu výpočtu blízka, musíme jejich počáteční podmínky volit co nejbližší, tedy ε musí být co nejmenší. Zde ovšem narazíme na omezené možnosti počítačové aritmetiky. Jestliže ε příliš zmenšíme, nebude použitý reálný datový typ schopen zachytit takto malé rozdíly v polohách obou dvojkyvadel.

Získaný výsledek tedy je nutně zatížen chybou, kterou musíme určitým způsobem odhadnout. Provedeme jen velmi hrubý odhad podle charakteru získaného histogramu. Hodnoty směrnice okolo 0,5 jsou již zřejmě zastoupeny statisticky významně, zvolíme tedy chybu cca 0,1 a za maximální hodnotu směrnice vezmeme $0,6 \pm 0,1$.

Nyní již zbývá jen určit hodnotu maximálního Lyapunovova koeficientu. Vzdálenost dvojkyvadel ve fázovém prostoru se, jak víme, mění s časem přibližně jako $A \exp(\lambda t)$. Veličina d je však druhou mocninou této vzdálenosti, a její logaritmus se tedy mění jako

$$\log d(t) \approx 2(\log A + \lambda t \log e).$$

Směrnice, které jsme počítali, jsou tedy rovny $2\lambda \log e$. Odtud již jednoduše zjistíme, že maximální Lyapunovův koeficient je

$$\lambda_{\max} = (0,7 \pm 0,1).$$

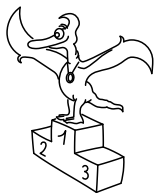
Podívejme se, co to znamená. Maximální Lyapunovův koeficient udává míru předvídatelnosti systému. Co když si sestrojíme dvojkyvadlo a chceme předvídat, jak se bude pohybovat, když jej vypustíme z dané polohy? Na jak dlouhý časový úsek budeme moci udělat spolehlivou předpověď?

Předpokládejme, že máme k dispozici zázračné experimentální vybavení, které nám umožní při určování počáteční polohy soupeřit s dosud nejpřesnějším měřením vůbec, kterým je určení frekvence hyperjemného přechodu v atomu rubidia na 15 platných číslic. Naše dvojkyvadlo se tedy stane nepředvídatelným přibližně po uplynutí času T , pro nějž

$$\exp(\lambda T) \approx 10^{15}.$$

Odtud dostaneme $T \approx 50$. Vzhledem k tomu, že jsme na počátku zvolili $\omega = 1$, odpovídá tento časový úsek asi osmi kmitům dvojkyvadla, což není nikterak oslnivý výsledek.

Marek Pechal
marek@fykos.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po V. sérii



Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	7	35	100	168
1. Stanislav Fořt	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	2	2	3	1	–	12	<i>42</i>	49
2. Zuzana Bogárová	G Ludovita Štúra, Trenčín	–	3	–	2	2	–	–	7	<i>59</i>	38
3. Ondřej Maslikiewicz	SPŠ Hronov	3	4	2	–	3	–	–	12	<i>45</i>	30
4. Barbora Drozdová	G Ludovita Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	5	–	5	<i>55</i>	27
5. Tomáš Bartoněk	G O. Havlové, Ostrava - Poruba	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>27</i>	18
6. Tomáš Volf	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>65</i>	13
7. Ji-Hong Min	1st Internat. School, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>44</i>	12
8. Michal Gallovič	G Ludovita Štúra, Trenčín	–	–	–	–	0	5	–	5	<i>24</i>	10
9. Barbora Veselková	G Ludovita Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>44</i>	7
10. Michal Pokorný	G Děčín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>67</i>	4
11. Ondřej Palla	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>17</i>	3
12. Petr Pecha	SPŠ strojnická Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>50</i>	2

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	7	35	100	168
1. Zuzana Dočekalová	G Ostrava - Hrabůvka	4	3	2	–	2	9	–	20	<i>71</i>	103
2. Petr Ryšavý	G J. Heyrovského, Praha	2	3	2	4	2	5	–	18	<i>64</i>	93
3. Tereza Steinhartová	G J. K. Tyla, Hradec Králové	5	3	4	4	4	6	–	26	<i>81</i>	91
4. Petr Cagaš	G Lesní čtvrť, Zlín	3	2	2	0	2	1	5	15	<i>56</i>	81
5. Ján Bogár	G Ludovita Štúra, Trenčín	–	3	3	2	2	–	–	10	<i>64</i>	73
6. Tereza Jeřábková	SPŠ a SOU Letohrad	5	3	–	–	4	–	–	12	<i>75</i>	62
7. Veronika Paštyková	G J. Ortena, Kutná Hora	1	2	2	2	1	5	–	13	<i>41</i>	53
8. Kateřina Honzáková	G Jana Keplera, Praha	3	3	2	–	3	–	–	11	<i>74</i>	50
9. Jana Bazová	G Ludovita Štúra, Trenčín	–	–	–	–	2	5	–	7	<i>49</i>	43
10.–11. Jakub Klemsa	G J. Vrchlického, Klatovy	5	1	2	–	2	2	–	12	<i>67</i>	38
Michal Müller	G Jevíčko	1	2	2	–	2	–	–	7	<i>56</i>	38
12. Petra Kňázeková	G Ludovita Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>53</i>	31
13. Lada Peksová	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>62</i>	21
14. Martin Chudjak	SPŠ Martin	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>35</i>	17
15. František Steinhauser	G Dačice	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>50</i>	10
16. Lukáš Křípner	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>82</i>	9
17. Adam Mohammad	1st Internat. School, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>21</i>	7
18.–19. Michal Španko	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>38</i>	5
Anna Vacířová	VOŠ a SPŠ G Evropská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>25</i>	5
20. Irena Pavlíčková	G a SOŠ Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>100</i>	3
21.–23. Michal Bajcar	G F. Živného, Bohumín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>67</i>	2
Veronika Drgoňová	G Hlohovec	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>29</i>	2

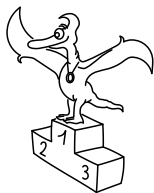
<i>Simona Laňková</i>	G Havlíčkův Brod	-	-	-	-	-	-	-	-	0	17	2
24. <i>Martina Bartoňová</i>	G Hlohovec	-	-	-	-	-	-	-	-	0	33	1

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	7	35	100	168
1. <i>Pavel Malý</i>	G Ch. Dopplera, Praha	5	3	2	3	3	5	2	23	74	94
2. <i>Hana Šustková</i>	G Trutnov	2	2	2	0	3	6	3	18	52	88
3. <i>Karel Kolář</i>	G Špitálská, Praha	4	2	2	3	4	-	-	15	66	87
4. <i>Michal Koutný</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	4	4	4	2	3	-	3	20	73	82
5. <i>Peter Vanja</i>	G Jura Hronca, Bratislava	4	4	2	2	2	2	-	16	62	72
6. <i>Zuzana Chlebohnová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	-	-	-	-	-	-	-	0	69	44
7.-8. <i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	4	2	2	2	2	-	-	12	75	43
<i>Alžběta Kadlecová</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	66	43
9. <i>Michal Maizner</i>	G Žilina - Vlčince	-	-	-	-	-	-	-	0	71	42
10. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠ strojnická Vsetín	0	1	1	-	-	4	-	6	51	40
11. <i>Jana Figulová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	3	-	-	-	4	-	7	70	37
12. <i>Jakub Töpfer</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	55	35
13. <i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	89	33
14.-15. <i>Katarína Baxová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	56	32
<i>Miroslav Klimoš</i>	G M. Koperníka, Bílovec	-	-	-	-	-	-	-	0	58	32
16. <i>Dana Suchomelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	4	-	4	66	25
17. <i>Martin Zahradník</i>	G Třeboň	-	1	-	-	-	-	-	1	62	24
18. <i>Václav Obrázek</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	74	20
19. <i>Eva Hašková</i>	G a SOŠ Úpice	-	-	-	-	-	-	-	0	34	15
20. <i>Lukáš Čimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	-	-	-	-	-	-	-	0	52	12
21. <i>Josef Tkadlec</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	69	11
22. <i>Vojtěch Tuma</i>	G Roudnice nad Labem	-	-	-	-	-	-	-	0	67	8
23.-24. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	-	-	-	-	-	-	-	0	50	6
<i>Ondřej Růžička</i>	G a SOŠ Hořice	-	-	-	-	-	-	-	0	38	6
25. <i>Matej Dzuvo</i>	G Hlohovec	-	-	-	-	-	-	-	0	21	3
26. <i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	20	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	7	35	100	168
1. <i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	6	4	2	2	-	-	-	14	81	109
2. <i>Airidas Korolkovas</i>	G Trutnov	4	2	4	4	3	-	-	17	84	89
3. <i>Lukáš Ledvína</i>	PČG Karlovy Vary	-	4	3	-	3	-	-	10	82	80
4. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	0	91	75
5. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	0	82	51
6. <i>Peter Ondáč</i>	G Humenné	-	-	-	-	-	-	-	0	58	42
7. <i>Prabhat Rao Pinnaka</i>	G Trutnov	4	-	-	-	-	-	-	4	39	34
8. <i>Juraj Hartman</i>	Jiráskovo G Náchod	-	1	4	-	-	-	-	5	61	27
9.-10. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	5	-	-	-	5	133	12
<i>Hana Šírová</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	-	-	-	-	-	-	-	0	109	12
11. <i>Lukáš Drápal</i>	G Ch. Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	88	7
12. <i>Lukáš Labor</i>	G Třinec	-	2	2	-	2	-	-	6	50	6



Pořadí řešitelů po VI. sérii



Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	3	3	8	7	32	100	200
1. Stanislav Fořt	G P. de Coubertina, Tábor	3	1	2	1	-	0	-	7	41	56
2. Zuzana Bogárová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	4	-	-	3	-	-	10	65	48
3. Ondřej Maslikiewicz	SPŠ Hronov	3	-	2	2	2	6	-	15	52	45
4. Barbora Drozdová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	3	-	-	3	4	-	14	61	41
5. Tomáš Bartoněk	G O. Havlové, Ostrava - Poruba	3	-	1	-	2	3	-	9	32	27
6. Tomáš Volf	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	65	13
7. Ji-Hong Min	1st Internat. School, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	0	44	12
8.-9. Peter Kosec	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	4	-	-	-	4	-	11	73	11
<i>Patrik Švančara</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	4	-	-	-	4	-	11	73	11
10. Michal Gallovič	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	24	10
11. Barbora Veselková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	44	7
12. Petr Pecha	SPŠ strojnická Vsetín	3	-	-	1	-	-	-	4	60	6
13. Michal Pokorný	G Děčín	-	-	-	-	-	-	-	0	67	4
14. Ondřej Palla	SPŠ Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	17	3

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	3	3	8	7	32	100	200
1. Jakub Michálek	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	81	109
2. Airidas Korolkovas	G Jana Keplera, Praha	3	2	4	-	-	7	-	16	84	105
3. Lukáš Ledvína	PČG Karlovy Vary	-	-	-	-	-	-	-	0	82	80
4. Jan Hermann	G Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	0	91	75
5. Marek Nečada	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	0	82	51
6. Prabhat Rao Pinnaka	G Jana Keplera, Praha	1	4	4	-	-	5	-	14	45	48
7. Peter Ondáč	G Humenné	-	-	-	-	-	-	-	0	58	42
8. Juraj Hartman	Jiráskovo G Náchod	-	-	-	-	-	-	-	0	61	27
9. Lukáš Labor	G Třinec	3	1	4	4	-	-	-	12	69	18
10.-11. Dalimil Mazáč	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	133	12
<i>Hana Šírová</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	-	-	-	-	-	-	-	0	109	12
12. Lukáš Drápal	G Ch. Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	88	7

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	3	3	8	7	32	100	200
1. <i>Zuzana Dočekalová</i>	G Ostrava - Hrabůvka	2	1	–	–	3	7	–	13	71	116
2. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	3	1	2	3	3	8	–	20	66	113
3. <i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	3	4	4	3	–	7	–	21	83	112
4. <i>Petr Cagaš</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	3	1	4	3	3	2	4	20	57	101
5. <i>Ján Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	4	2	4	–	3	4	–	17	66	90
6. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	3	–	–	–	3	10	–	16	80	78
7. <i>Veronika Paštyková</i>	G J. Orteny, Kutná Hora	1	2	2	2	3	6	–	16	45	69
8. <i>Jana Bazová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	4	4	–	–	3	4	–	15	55	58
9. <i>Kateřina Honzáková</i>	G Jana Keplera, Praha	3	2	2	–	–	–	–	7	72	57
10. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	3	1	3	–	–	3	–	10	63	48
11. <i>Michal Müller</i>	G Jevíčko	3	–	3	–	–	3	–	9	57	47
12. <i>Petra Kňážíková</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	–	3	–	–	5	56	36
13. <i>Lada Peksová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	–	2	–	3	–	–	7	64	28
14. <i>Martin Chudjak</i>	SPŠ Martin	–	–	–	–	–	–	–	0	35	17
15. <i>Adam Mohammad</i>	1st Internat. School, Ostrava	1	1	1	1	2	–	–	6	25	13
16. <i>František Steinhauser</i>	G Dačice	–	–	–	–	–	–	–	0	50	10
17. <i>Lukáš Kripner</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	–	–	–	–	–	–	0	82	9
18. <i>Kristýna Onderková</i>	G Budějovická, Praha	3	0	1	1	3	–	–	8	47	8
19.–20. <i>Michal Španko</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	38	5
<i>Anna Vacířová</i>	VOŠ a SPŠ G Evropská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	5
21. <i>Irena Pavlíčková</i>	G a SOŠ Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
22.–24. <i>Michal Bajcar</i>	G F. Živného, Bohumín	–	–	–	–	–	–	–	0	67	2
<i>Veronika Drgoňová</i>	G Hlohovec	–	–	–	–	–	–	–	0	29	2
<i>Simona Laňková</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	17	2
25. <i>Martina Bartoňová</i>	G Hlohovec	–	–	–	–	–	–	–	0	33	1

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	3	3	8	7	32	<i>100</i>	200
1. <i>Pavel Malý</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	–	2	3	3	5	–	16	<i>74</i>	110
2. <i>Karel Kolář</i>	G Špitálská, Praha	3	4	2	2	3	4	–	18	<i>67</i>	105
3.–4. <i>Michal Koutný</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	3	1	2	–	–	9	5	20	<i>74</i>	102
<i>Hana Šustková</i>	G Trutnov	3	2	2	1	3	3	–	14	<i>53</i>	102
5. <i>Peter Vanya</i>	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>62</i>	72
6. <i>Alžběta Kadlecová</i>	G Jana Keplera, Praha	3	–	2	2	–	6	–	13	<i>67</i>	56
7. <i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	1	3	4	–	–	–	–	8	<i>75</i>	51
8. <i>Jana Figulová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	3	4	–	10	<i>70</i>	47
9.–10. <i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bilovec	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>69</i>	44
<i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	1	2	4	3	1	–	–	11	<i>81</i>	44
11. <i>Jakub Töpfer</i>	G Jana Keplera, Praha	1	–	2	–	–	5	–	8	<i>54</i>	43
12. <i>Michal Maizner</i>	G Žilina - Vlčince	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>71</i>	42
13. <i>Katarína Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	2	2	3	–	–	9	<i>59</i>	41
14. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠ strojnická Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>51</i>	40
15. <i>Dana Suchomelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	1	2	–	3	–	–	8	<i>63</i>	33
16. <i>Miroslav Klmoš</i>	G M. Koperníka, Bilovec	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>58</i>	32
17. <i>Václav Obrázek</i>	G Jana Keplera, Praha	3	1	3	1	–	2	–	10	<i>61</i>	30
18. <i>Martin Zahradník</i>	G Třeboň	3	–	–	2	–	–	–	5	<i>64</i>	29
19. <i>Eva Hašková</i>	G a SOŠ Úpice	2	1	2	1	3	–	–	9	<i>39</i>	24
20. <i>Josef Tkadlec</i>	G Jana Keplera, Praha	3	–	2	4	–	3	–	12	<i>68</i>	23
21.–22. <i>Lukáš Čimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>52</i>	12
<i>Vojtěch Tuma</i>	G Roudnice nad Labem	2	–	2	–	–	–	–	4	<i>63</i>	12
23.–24. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>50</i>	6
<i>Ondřej Růžička</i>	G a SOŠ Hořice	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>38</i>	6
25. <i>Matej Dzuro</i>	G Hlohovec	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>21</i>	3
26. <i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>20</i>	1



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.