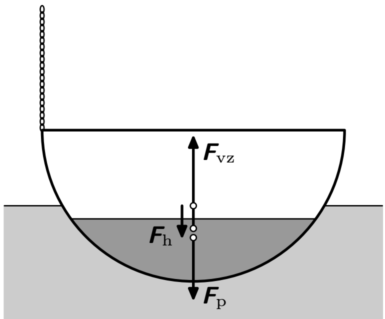
21. ročník, úloha VI . 3 ... hadí polévka *(4 body; průměr 2,52; řešilo 31 studentů)*

Když je hadí maso uvařené, kuchaři z něj připravují hadí polévku v měděných hrncích, které mají tvar polokoule o průměru 40 cm. Hrnec s polévkou dávají potom vychladit do nedalekého jezera. Když ho nechají plavat, ponoří se o 10 cm. K bodu na okraji hrnce je připevněn řetízek. Pokud za řetízek zatáhneme, a zvedneme tak okraj hrnce o 10 cm, nateče do hrnce voda?

Ze sebraných úloh.

V této úloze si lehce procvičíme způsob řešení problémů, kde hledáme rovnovážnou polohu mechanické soustavy. Pro rovnovážnou polohu platí, že vektorový součet všech sil, stejně jako součet všech momentů sil na soustavu působících, je nulový. Momenty působících sil (tedy skalární součin vektoru síly a ramena $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$) je vždy třeba vztáhnout k určitému bodu prostoru, od kterého toto rameno odměřujeme. Pro různě zvolené vztažné body je velikost momentu sil obecně různá. Když je moment nulový vůči nějakému vztažnému bodu, nemusí být nulový vůči jinému. Pokud má ale mechanická soustava být a zůstat nehybná, musí být její změna momentu hybnosti vůči libovolnému vztažnému bodu nulová, což implikuje nulovou výslednici momentů sil vůči libovolnému vztažnému bodu.



Obr. 1. Hrnec s polévkou plave na hladině

Poloměr polokulového hrnce je $r = 20\,\mathrm{cm}$. Na počátku je hrnec ponořen do hloubky $r/2$, čemuž odpovídá objem „vytlačené“ vody V_0, který bychom vypočetli jako objem kulové úseče. Tíhová síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{h}}$ působící na samotný hrnec, tíhová síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}$ působící na polévku v něm a vztlaková síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}}$ jsou v rovnováze, tedy jejich vektorový součet je roven nule[1]. Působiště síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{h}}$ klademe do těžiště polokulového hrnce, působiště $\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}$ do těžiště polévky a nakonec působiště $\boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}}$ můžeme klást do těžiště vytlačené vody. Vztlaková síla je podle Archimédova zákona dána jako tíha objemu vody rovné ponořené části tělesa, tedy

$$F_{\mathrm{vz}} = V_0 \varrho g\,.$$

Všechny síly leží v jedné přímce a jejich moment vůči libovolnému bodu je proto nulový.

Nyní levý okraj hrnce vyzvedneme o $r/2 = 10\,\mathrm{cm}$. Jak velká část hrnce bude ponořena, pokud by se pravý okraj dotýkal přesně hladiny (viz obr. 2)? Tuto novou polohu hrnce bychom dostali pouhým pootočením hrnce okolo středu myšlené koule, jejíž částí hrnec je, a ponořený objem se tedy oproti původní poloze vůbec nezmění. Aby i v této pootočené poloze byl hrnec v rovnováze, je třeba zajistit rovnováhu sil a momentů sil. Nadále platí

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{h}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}} = 0\,.$$

Síly už ale neleží v jedné přímce a hrnec má přirozeně tendenci otáčet se do původní stabilní polohy. Pro jeho udržení v nové poloze je třeba působit dvojicí sil, jejichž výslednice je nulová, ale působí silovým momentem. Museli bychom tedy hrnec na jednom okraji přizvedávat a na druhém stejnou silou přitlačovat.

[1] Sílu jakožto vektor píšeme tučným písmem, obyčejným skloněným fontem označujeme velikost této síly.

V našem případě ovšem jen taháme za řetízek a působíme silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$ ve směru kolmo vzhůru. Aby byla i teď splněna rovnováha sil, musí platit

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{h}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{t}} = 0\,.$$

Síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}}$ musí být patrně menší než na počátku, a to právě o velikost síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$. Hrnec je proto ponořen do menší hloubky než $r/2$ a voda do něj nenateče (a ani z hrnce polévka nevyteče, protože pokud má hustotu srovnatelnou nebo větší než voda, je ji méně než objem V_0). Stejně tak uvažme moment sil vzhledem k bodu závěsu. Síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$ působí nulovým momentem a síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}}$ a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}$ mají stejné rameno, v důsledku vytažení se zkrátilo rameno síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{h}}$, a to musí být kompenzováno zmenšením síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}}$.

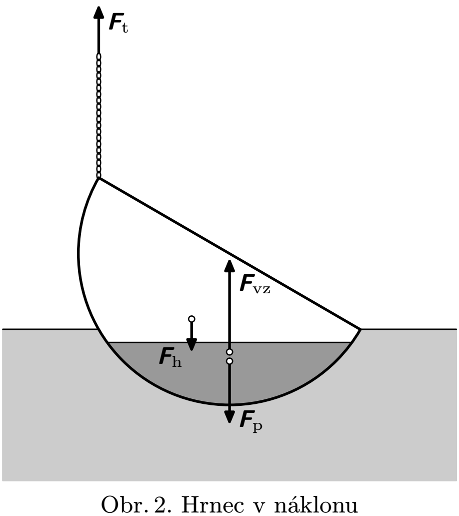
Zde bychom mohli skončit, ale pokusme se ještě nastínit, jak bychom vypočítali, v jaké poloze se hrnec ustálí a jakou silou musíme tahat za řetízek.

Nechť proměnná y udává výšku levého okraje hrnce oproti původní poloze a proměnná α sklon obruby hrnce vůči vodorovnému směru. Vše podstatné, co o naší mechanické soustavě víme, lze shrnout do následujících rovnic:

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{h}} + m_{\mathrm{p}} &= V_0 \varrho g\,,\\ \varrho g(V_0 - V(y,\alpha)) &= F_{\mathrm{t}}\,,\\ hF_{\mathrm{h}} \sin\alpha - rF_{\mathrm{t}}\cos\alpha &= 0\,, \end{aligned}$$

kde m_{h} je hmotnost hrnce a m_{p} hmotnost polévky.

Výraz $V(y,\alpha)$ značí ponořený objem hrnce, který závisí na proměnných y, α. Tento výraz nebude příliš pěkný a nebudeme ho konkrétně vyjadřovat. Písmeno h udává vzdálenost těžiště duté polokoule (hrnce) od středu koule. Nadšenci si mohou jako jednoduché cvičení na integrování vypočítat, že $h = r/2$. Druhá rovnice vyjadřuje myšlenku, že vztlaková síla poklesne o velikost tahové síly. Třetí z rovnic značí rovnováhu momentů sil vůči středu pomyslné koule, ramena sil $\boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}}$ a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}$ jsou vůči tomuto bodu nulová. Bod, vůči kterému momenty vztahujeme, volíme tak, aby se rovnice co nejvíce zjednodušila. Dosazením druhé rovnice do třetí získáme snadno rovnici pro neznámou α. Tato rovnice však představuje rovnici s parametrem m_{h}, který neznáme. Pokud ale třeba budeme znát poměr $m_{\mathrm{h}}/m_{\mathrm{p}}$, určíme m_{h} a rovnici pro neznámou α můžeme vyřešit například numericky metodou půlení intervalu.



Obr. 2. Hrnec v náklonu

Velká část řešitelů opomenula uvažovat vliv síly, kterou taháme za hrnec. Taková řešení jsme většinou hodnotili dvěma body.

Marek Scholz
mara@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.