22. ročník, úloha I . 4 . . . praktická motoristická *(4 body; průměr 1,00; řešilo 27 studentů)*

Na nepřehledných křižovatkách či v ostrých zatáčkách někdy bývá vypuklé zrcadlo. Snadno si všimneme, že zrcadlo zkresluje jak vzdálenost, tak i rychlost přijíždějících aut. Naši vzdálenost od zrcadla označíme d, vzdálenost přijíždějícího auta od zrcadla L, jeho skutečnou rychlost v a poloměr křivosti zrcadla R. Na základě toho, co vidíme v zrcadle, určete, jak daleko se nám přijíždějící auto jeví? Jakou zdánlivou rychlostí se přibližuje? A jak se liší skutečná doba, za kterou přijíždějící auto vjede do křižovatky, od doby, kterou odhadneme z jeho zdánlivé vzdálenosti a zdánlivé rychlosti? Zvolte si rozumné hodnoty parametrů a rozhodněte, zda může být tento rozdíl dob nebezpečný. *Při cestě na soustředění zažil Marek Scholz.*

Pro začátek je důležité objasnit si, co je vlastně ona „zdánlivá vzdálenost“. Lidské oko je schopno rozlišit úhel, pod kterým dva různé body vidí. Máme-li představu o tom, jak je určitý předmět velký, jsme schopni odhadnout vzdálenost právě v závislosti na úhlu, pod kterým předmět vidíme. Mějme třeba nějakou tyč o délce l, na niž se díváme kolmo, a vidíme její konce pod úhlem δ. Její vzdálenost a pak určíme jako $a = 2l/\operatorname{tg}(\delta/2)$. Užívajíce aproximace $\operatorname{tg} x \approx \sin x \approx x$ (předpokládáme, že se jedná o malý úhel), dostáváme

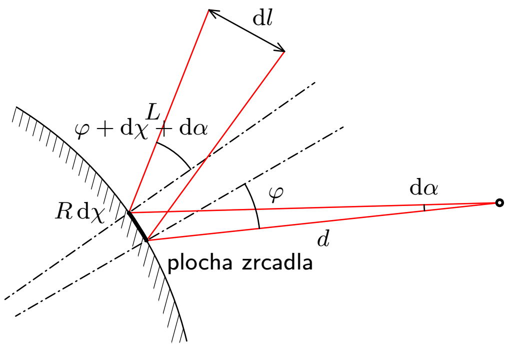
$$a = \frac{l}{\delta}\,.$$

Budeme hledat řešení pro malé předměty, abychom mohli užívat uvedené aproximace $\sin x \approx x$ a zanedbat některá zkreslení obrazu v zrcadle, jež se pro větší objekty objeví a jež by mohla naše počty výrazně zkomplikovat.

Nyní bychom mohli zkoumat, pod jakým úhlem bude v určité vzdálenosti od zrcadla daný předmět vidět, hledáním takových paprsků, jež vycházejí z krajních bodů předmětu, odráží se od zrcadla a sbíhají se v místě pozorovatele. Takovýto přístup by však byl asi vcelku složitý a pracný. Podívejme se tedy na problém z druhého konce.

Mějme pozorovatele ve vzdálenosti d od zrcadla. Z tohoto bodu vypustíme pod velmi malým úhlem $\mathrm{d}\alpha$ dva paprsky, jež dopadnou na určité místo na ploše zrcadla. Pak vyšetříme, jak se rozbíhají paprsky ve vzdálenosti L od zrcadla (tam, kde se nachází předmět), rozteč paprsků v tomto místě bude skutečnou velikostí předmětu. Je zřejmé, že tento přístup by měl dát stejný výsledek jako přístup opačný (poněvadž paprsky se odrážejí v obou směrech stejně).

Nechť tedy dopadá paprsek na zrcadlo a svírá s kolmicí roviny tečné k zrcadlu úhel φ. Druhý paprsek dopadá pod úhlem o $\mathrm{d}\alpha$ větším, ale díky zakřivení zrcadla je tečná rovina zrcadla též pootočená o úhel $\mathrm{d}\chi$. Druhý paprsek bude tudíž od prvního odchýlen navíc ještě o úhel $2\,\mathrm{d}\chi$. (Dopadá-li paprsek na rovinné zrcadlo a zrcadlo pootočíme, odražený paprsek se vychýlí oproti původnímu odraženému paprsku o dvojnásobek úhlu pootočení zrcadla. Kdo nevěří, sám jistě ověří. Vyplývá to ze zákona odrazu.)



Obr. 1. Schéma situace

Pootočení imaginárního tečného rovinného zrcadla $\mathrm{d}\chi$ určíme ze sinové věty. Oblouk o délce $R\,\mathrm{d}\chi$, na zrcadle ohraničený body odrazu paprsků, lze považovat za úsečku za předpokladu, že $\mathrm{d}\chi$ je dostatečně malý. Tato úsečka pak spolu se dvěma paprsky scházejícími se v bodě pozorovatele tvoří trojúhelník; jelikož jsou úhly $\mathrm{d}\chi$ a $\mathrm{d}\alpha$ vůči úhlu φ zanedbatelné, dostáváme vztah

$$\frac{R\,\mathrm{d}\chi}{\sin\mathrm{d}\alpha} = \frac{d}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\,,$$

z čehož po jednoduchých úpravách a s užitím $\sin\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\alpha$ dostáváme hledané pootočení

$$\mathrm{d}\chi = \frac{d}{R\cos\varphi}\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Nyní již lze poměrně snadno určit rozteč paprsků v oblasti přijíždějícího předmětu. Při dopadu na zrcadlo mají paprsky rozteč $d\cdot\mathrm{d}\alpha$, tato rozteč se těsně po dopadu zachovává. Po dopadu se však úhel rozbíhání paprsků změní z $\mathrm{d}\alpha$ na $\mathrm{d}\alpha+2\,\mathrm{d}\chi$, tudíž rozteč paprsků $\mathrm{d}l$ (neboli skutečná velikost předmětu) v místě předmětu vzdáleného L od místa odrazu na zrcadle bude

$$\mathrm{d}l = d\,\mathrm{d}\alpha + L\,(\mathrm{d}\alpha + 2\,\mathrm{d}\chi) = \mathrm{d}\alpha\left(d + L + \frac{2Ld}{R\cos\varphi}\right)\,.$$

Zdánlivou vzdálenost, jak jsme ji na počátku zavedli (zde ji označme třeba z), určíme jako

$$z_{\parallel} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\alpha} = d + L + \frac{2Ld}{R\cos\varphi}\,.$$

Nyní však ještě hotovi nejsme – všimněme si, že doposud jsme uvažovali pouze zvětšení v „radiálním“ směru, tj. paprsek jsme vychylovali pouze v rovině určené pozorovatelem, předmětem a středem křivosti zrcadla. Jelikož se však obraz promítá na naši sítnici (a na zrcadlo) dvourozměrně, je třeba ještě vyšetřit, jak se mění obraz ve směru kolmém.

Postupujme tedy podobně jako doposud – z místa pozorovatele vyšleme dva paprsky pod velmi malým úhlem $\mathrm{d}\beta$, ovšem v „tečném“ směru – rovina daná těmito paprsky je kolmá na rovinu procházející středem křivosti zrcadla. Paprsky nechť opět svírají s kolmicí zrcadlové plochy, na niž dopadají, nějaký úhel φ. Ty vytínají na zrcadle oblouček o délce $d\,\mathrm{d}\beta$ – v tomto případě totiž dopadají na zrcadlo kolmo, resp. pod velmi malým úhlem $\mathrm{d}\beta$, pohybujeme-li se pouze v rovině, v níž oba dopadající paprsky leží. Jelikož poloměr křivosti zrcadlové plochy je R, poloměr křivosti řezu plochy touto rovinou je $R\cos\varphi$. Pro délku oblouku tedy platí rovnost

$$d\,\mathrm{d}\beta = R\cos\varphi\,\mathrm{d}\psi\,,$$

kde $\mathrm{d}\psi$ zde značí pootočení řezu zrcadlové plochy mezi body dopadu obou paprsků.

Analogicky k výše uvedenému postupu dostáváme úhel, pod nímž vylétávají odražené paprsky $\mathrm{d}\beta + 2\,\mathrm{d}\psi$, pro rozteč $\mathrm{d}m$ paprsků ve vzdálenosti $L\cos\varphi$ (což je vzdálenost předmětu v promítání na rovinu dopadajících paprsků) dostáváme

$$\mathrm{d}m = d\,\mathrm{d}\beta + \left(\mathrm{d}\beta + 2\frac{d\,\mathrm{d}\beta}{R\cos\varphi}\right)L\cos\varphi\,.$$

Již nyní je vidět, že v každém směru zrcadlo „zmenšuje jinak“; kdybychom se řídili podle tohoto zdánlivého „radiálního“ rozměru, pro zdánlivou vzdálenost dostáváme

$$z_{\perp} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\beta} = d + L\left(\cos\varphi + \frac{2d}{R}\right)\,.$$

Řekněme tedy, že si pozorovatel vybere pro posuzování vzdálenosti jeden z rozměrů, například ten rovnoběžný s rovinou danou jím, středem zrcadla a předmětem. Pokud se automobil pohybuje přímo k zrcadlu stálou rychlostí $v = \mathrm{d}L/\,\mathrm{d}t$, zdánlivá rychlost je[1]

$$v' = \frac{\partial z}{\partial L} v = \left(1 + \frac{2d}{R\cos\varphi}\right) v\,.$$

Je zjevné, že čas, který přijíždějící automobil bude potřebovat, aby dojel k zrcadlu (tj. L/v), bude stejný jako čas téhož odhadnutý z obrazu v zrcadle, poněvadž zvětšení obrazu je v případě $\varphi =$ konst. taktéž konstantní.

Ke zkreslení časového odhadu by mohlo dojít, kdyby se přijíždějící automobil nacházel již poměrně blízko – bylo by třeba počítat i se změnou úhlu φ, neboť ve skutečnosti by nejel automobil přímo k zrcadlu, ale o určitou vzdálenost by jej míjel. Pokud tedy automobil není zřejmě hodně daleko, není rozumné vstupovat mu bezhlavě do cesty.

V došlých řešeních bylo drtivou většinou použito zobrazovací rovnice ze středoškolských tabulek. Takováto rovnice však vychází z paraxiální aproximace (z lat. *par axi* – blízký ose; tzn. že střed křivosti zrcadla, pozorovatel a předmět leží v blízkosti jedné přímky – osy), což je však v rozporu s tím, k čemu jsou většinou dopravní zrcadla používána: k vidění „za roh“. Tento postup odpovídá výše uvedenému, stanovíme-li $\varphi = 0$. Většina řešitelů pak došla k *obrazové vzdálenosti*, jež ovšem *není* sama o sobě zdánlivou vzdáleností, jak ji vnímá pozorovatel. Obraz je totiž zmenšený, což je potřeba vzít taktéž v úvahu.

Marek Nečada
`marekn@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[1] Výraz $\partial z/\partial L$ je tzv. *parciální derivace*, což znamená, že funkci $z(L, \varphi)$ derivujeme pouze dle proměnné L; φ přitom považujeme za konstantu.