22. ročník, úloha II . 3 ... *ledvinové koule* *(4 body; průměr 1,78; řešilo 18 studentů)*

Malá koule stojí v klidu na velké kouli, která volně leží na podložce. Do malé koule nepatrně strčíme a ta se svalí na zem. Jak daleko od původního bodu dotyku velké koule se zemí malá koule dopadne? *Na teoretické mechanice zkoulel Lukáš Ledvina.*

Budeme předpokládat, že koule po sobě i po podložce kloužou bez tření, a tedy se nekutálí[1]. Protože všechny vnější síly (tíhová a reakční síla podložky) působí pouze ve svislém směru, splňuje tento systém zákon zachování hybnosti ve vodorovném směru[2], který lze po dobu, kdy se koule dotýkají, formulovat jako

$$Mv + m\left(v + (r+R)\,\omega\cos\varphi\right) = \mathrm{konst}\,,$$

kde rychlost spodní koule (orientovanou doprava) jsme označili v a úhlovou rychlost oběhu horní okolo spodní ω. Dosadíme počáteční podmínky (na začátku byly všechny rychlosti nulové) a zjistíme, že konstanta je rovná nule. Tedy

$$v = -\frac{m}{m+M}\,(r+R)\,\omega\cos\varphi\,. \tag{1}$$

Dále se jistě zachovává celková mechanická energie. Dokud se koule dotýkají, je celková potenciální energie rovna

$$V = mg\,(r+R)\cos\varphi$$

a kinetická

$$T = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}m\left((v + (r+R)\,\omega\cos\varphi)^2 + ((r+R)\,\omega\sin\varphi)^2\right)\,.$$

Velikost zachovávající se energie určíme opět z počátečních podmínek jako $mg\,(r+R)$. Proto

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}Mv^2 + m\,(r+R)\,v\,\omega\cos\varphi + \tfrac{1}{2}m\,(r+R)^2\,\omega^2 + mg\,(r+R)\cos\varphi - mg\,(r+R) = 0\,. \tag{2}$$

Soustavou diferenciálních rovnic (1) a (2) je kompletně popsán vývoj systému až do okamžiku, kdy se koule od sebe odlepí. My ji naštěstí nemusíme vyřešit, protože nám stačí zjistit úhel φ_0 v tomto okamžiku. Mohli bychom obě rovnice zderivovat v čase, vyřešit vzniklou soustavu čtyř rovnic pro pět neznámých φ, $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$, $\ddot{x}$, $\ddot{\varphi}$, z nichž bychom ale $\ddot{x}$ položili rovnou nule (viz dále)[3]. To se nám ovšem nechce, a tak se místo toho trochu zamyslíme.

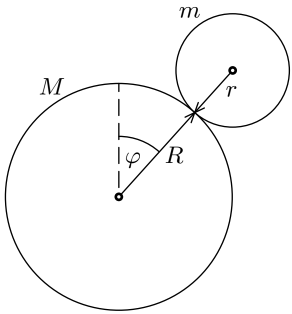
---

[1] Takový systém má i svůj název. Až do okamžiku, kdy se koule od sebe odlepí, se mu říká *eliptické kyvadlo* (tušíte správně, trajektorie horní koule bude částí elipsy).

[2] To by nebyla pravda, kdyby se spodní koule po podložce namísto klouzání kutálela, protože reakční síla podložky by jakožto vnější síla působila na systém i ve vodorovném směru, což si většina z vás, kdo jste uvažovali tření, neuvědomila.

[3] Všimněme si, že máme štěstí, protože v rovnicích nevystupuje přímo x (což vyjadřuje translační symetrii systému ve vodorovném směru).

Na horní kouli působí tíhová síla (směrem dolů) a reakce spodní koule, která tíhovou doplní vždy takovým způsobem, aby výsledné zrychlení horní koule odpovídalo pohybu po (taktéž zrychlujícím) povrchu spodní koule. Koule se odlepí v okamžiku, kdy reakční síla spodní koule přestává mít směr od spodní koule a měla by začínat mít opačný směr (ale nebude, protože tato vazba má pouze odpudivý charakter) – to je okamžik, kdy je tato reakční síla nulová. V tuto chvíli již tedy na spodní kouli žádná síla nepůsobí[4] a zrychlení horní koule (jež je nyní důsledkem pouze tíhové síly) proto musí (aby na spodní nepůsobila) odpovídat kruhovému pohybu okolo spodní, neboli složka tíhového zrychlení ve směru do středu spodní koule musí být rovna $(r+R)\,\omega_0^2$. Tudíž



Obr. 1. Poloha koulí a znázornění jednotlivých proměnných

$$(r+R)\,\omega_0^2 = g\cos\varphi_0\,, \tag{3}$$

kde symbolem ω_0 jsme označili hodnotu ω v okamžiku odlepení.

Teď už zbývá jenom vyřešit soustavu (1), (2), (3) pro φ_0. Do (1) umocněné na druhou, resp. vynásobené ω dosadíme za ω^2 z (3), abychom konečně dosazením za $v\,\omega$ a v^2 do (2) sestavili rovnici pro φ_0, která se po vydělení nenulovým $mg\,(r+R)/2$ redukuje na jednoduchý tvar

$$-\mu^2\cos^3\varphi_0 + 3\cos\varphi_0 - 2 = 0\,, \tag{4}$$

kde

$$\mu = \sqrt{\frac{m}{m+M}} < 1\,.$$

To je redukovaná kubická rovnice pro $\cos\varphi_0$, která má na intervalu $[-1;1]$ právě jedno řešení, ležící vždy v $(0;1)$, jež má pozoruhodně jednoduchý tvar

$$\cos\varphi_0 = \frac{2}{\mu}\cos\frac{\pi + \arccos\mu}{3}\,. \tag{5}$$

Je hodné povšimnutí, že úhel odlepení závisí pouze na poměru hmotností koulí a nikoliv na jejich poloměrech nebo tíhovém zrychlení. Dále poznamenejme, že pro velmi velkou hmotnost spodní koule (relativně vůči hmotnosti horní koule, tj. $m/M \to 0$) se μ^2 blíží k nule, kubický člen vymizí a rovnice se redukuje na lineární rovnici, jejímž řešením je $\cos\varphi_0 = 2/3$, což je výsledek, který někteří z vás správně odvodili.

Opomeňme teď případ, kdy je úhel φ_0 tak velký, že koule vlastně dopadla dřív, než se odlepila. Po odlepení se spodní koule bude dále pohybovat stálou rychlostí. Podívejme se na systém v inerciální soustavě, ve které bude stát. Můžeme říci, že po odlepení se koule již zpátky nedotknou. Další pohyb horní koule bude šikmým vrhem z výšky

$$h = R - r + (r+R)\cos\varphi_0 \tag{6}$$

s počáteční rychlostí

$$v_x = \omega_0\,(r+R)\cos\varphi_0$$

[4] Kromě tíhové síly a reakce podložky, které se ale vždy vyruší.

ve vodorovném směru a

$$v_y = \omega_0\,(r + R)\sin\varphi_0$$

ve svislém směru s orientací dolů. Pro dobu pádu T tedy bude platit

$$\tfrac{1}{2}gT^2 + v_y T - h = 0\,.$$

Jediným nezáporným řešením je

$$T = \frac{-v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g}\,.$$

Než koule dopadne, uletí vodorovnou vzdálenost Tv_x, dopadne tedy se středem ve vodorovné vzdálenosti

$$d = (r + R)\sin\varphi_0 + Tv_x$$

od středu spodní koule. Abychom mohli říct, jak daleko dopadne horní koule od původního bodu dotyku spodní s podložkou, stačí si uvědomit, že po celou dobu byla celková hybnost ve vodorovném směru nulová, vodorovná souřadnice polohy těžiště soustavy tedy zůstala v tomto původním bodě dotyku, a můžeme psát, že hledaná vzdálenost bude

$$x_1 = \frac{Md}{m + M}\,.$$

Když vše dosadíme (přičemž ω_0 určíme pomocí (3)), vyjde nám po chvilce upravování

$$x_1 = \frac{M}{m + M}\,(r + R)\left((1 - \gamma^2)^{3/2} + \gamma^{3/2}\sqrt{-\gamma^3 + 3\gamma - 2\,\frac{r - R}{r + R}}\right),$$

kde $\gamma = \cos\varphi_0$ je vyjádřeno v (5). Zde bychom mohli skončit; všimneme-li si ale, že výraz pod odmocninou se podobá kubické rovnici (4), můžeme se pokusit dosadit z ní za γ a shledáme, že dostaneme výsledek v o něco přehlednějším tvaru

$$x_1 = \frac{M}{m + M}\,(r + R)\left((1 - \gamma^2)^{3/2} + \gamma^{3/2}\sqrt{\frac{4R}{r + R} - \frac{M}{m + M}\,\gamma^3}\right).$$

Uvedený vztah platí pouze v případě, že se koule vůbec odlepily. Je-li ale horní koule dost velká, aby h ve výrazu (6) vyšlo nekladné, budou se dotýkat i při dopadu. Pro tento případ, tedy pro $\gamma \leq (r - R)/(r + R)$, z Pythagorovy věty odvodíme, že dopadnou ve vzdálenosti

$$d = \sqrt{(r + R)^2 - (r - R)^2} = 2\sqrt{rR}$$

od sebe. Proto pak horní koule dopadne ve vzdálenosti

$$x_1 = \frac{2M}{m + M}\sqrt{rR}$$

od těžiště, a potažmo od původního bodu dotyku spodní koule s podložkou.

Tomáš Tintěra
trosos@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.