22. ročník, úloha III . 3 ... *zachraňte hélium* *(3 body; průměr 2,29; řešilo 31 studentů)*

Na pouti v Dolním Dvoře mají novou atrakci, héliem plněné mýdlové bubliny, které se téměř nehybně vznášejí ve vzduchu. Co je těžší? Hélium v bublině, nebo její stěna?

Z maďarské přípravy na FO od Dalimila vybral Aleš.

První, co si musíme uvědomit, je fakt, že se bubliny plněné héliem ve vzduchu vznáší. Tedy ani neklesají k zemi, ani se nesnaží někam odletět, což nám dává podmínku, že síly působící na bublinu musí být v rovnováze. V našem případě se jedná o sílu tíhovou a vztlakovou

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{vz} \quad \Rightarrow \quad m_\mathrm{He} g + m_\mathrm{b} g = V g \varrho_v \quad \Rightarrow \quad \varrho_\mathrm{He} V_\mathrm{He} + \varrho_\mathrm{v} V_\mathrm{v} = V \varrho_\mathrm{v} \,. \tag{1}$$

Veličiny vztahující se k héliu jsou označeny indexem He, veličiny vztahující se ke vzduchu indexem v a veličinám vztahujícím se k bublině náleží index b. V tuto chvíli se zamyslíme nad tím, jak celý problém vypadá. Máme nějakou bublinu o poloměru r s tloušťkou d, kde $r \gg d$. Pokud budeme počítat objem slupky, první, co nás často napadne, je vypočítat objem celé bubliny ze známého vzorce $4\pi r^3/3$ a pak si vyjádřit odečtením vnitřku. Nicméně bude třeba se zamyslet nad tím, že d zde bude vystupovat ve třetí mocnině a třetí mocnina hodně malé hodnoty, kterou tloušťka bubliny bezesporu je, je ještě menší, než původní hodnota. Jinak řečeno, budeme aproximovat. Zanedbáme d ve vyšší než první mocnině a podíváme se, jak po aproximaci bude vypadat vzorec pro objem kulové slupky.

$$V = \tfrac{4}{3}\pi \left((r+d)^3 - r^3\right) = \tfrac{4}{3}\pi \left(r^3 + 3r^2 d + 3rd^2 + d^3 - r^3\right) \approx 4\pi r^2 d \,.$$

Nyní vyjádříme objemy v rovnici (1) a celou ji přepíšeme do tvaru

$$4\pi r^2 \left(\varrho_\mathrm{b} d + \varrho_\mathrm{He} \frac{r}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_\mathrm{v} \,.$$

Tloušťku bubliny pak můžeme vyjádřit jako

$$d = \frac{r}{3} \frac{\varrho_\mathrm{v} - \varrho_\mathrm{He}}{\varrho_\mathrm{b}} \,.$$

Výraz pak dosadíme do poměru hmotností stěny a hélia

$$\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{He}} = \frac{4\pi r^2 d \varrho_\mathrm{b}}{\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_\mathrm{He}} = \frac{\varrho_\mathrm{v} - \varrho_\mathrm{He}}{\varrho_\mathrm{He}} \,.$$

Pro vzduch můžeme použít hodnotu $1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a pro hélium $0{,}18\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$; není třeba hustotu hélia vyjadřovat ze stavové rovnice, tabulková hodnota je dostačující a správná. Stěna bubliny pak vychází zhruba o třetinu těžší, než hélium v ní.

Co se změní, když budeme uvažovat i kapilární tlak? V takovou chvíli musíme zvážit, že tlak v bublině je součtem tlaku atmosferického a kapilárního $p = p_\mathrm{atm} + p_\mathrm{k}$. Pro kapilární plak platí vzorec $p_\mathrm{k} = 2\sigma/r$, nicméně my musíme započítat dva povrchy bubliny, takže $p_\mathrm{k} = 4\sigma/r$. Tlak pak dosadíme do stavové rovnice ideálního plynu, neboť se nacházíme ve vcelku ideálních podmínkách, při kterých stavová rovnice platí.

$$pV = nRT \,,$$

$$pV = \frac{m_\mathrm{He}}{M_\mathrm{m(He)}} RT \,,$$

$$\left(p_\mathrm{atm} + \frac{4\sigma}{r}\right) \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{m_\mathrm{He}}{M_\mathrm{m(He)}} RT \,. \tag{2}$$

V rovnosti (2) jsou až na hmotnost hélia všechno známé konstanty; plynová konstanta $R = 8{,}31\,\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$, povrchové napětí mýdla $\sigma = 4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ a molární hmotnost hélia $M_{\mathrm{m(He)}} = 4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$. Hmotnost můžeme vyjádřit jako

$$m_{\mathrm{He}} = \frac{4}{3}\,\pi R^2\,(p_{\mathrm{atm}}R + 4\sigma)\,\frac{M_{\mathrm{m(He)}}}{RT}\,.$$

Pro jednoduchost počítejme s konstantní teplotou T. Hmotnost hélia uvnitř bubliny pak dosadíme do rovnice (1).

$$\frac{4}{3}\,\pi r^2(p_{\mathrm{atm}}r + 4\sigma)\,\frac{M_{\mathrm{m(He)}}}{RT} + m_{\mathrm{b}} = \varrho_{\mathrm{v}}\,\frac{4}{3}\,\pi r^3\,.$$

Nyní zkusme uvážit, jak by musela vypadat bublina, pro kterou by platilo, že hmotnost hélia se rovná hmotnosti stěny bubliny. Jedná se o krajní případ, který nám ukáže, jestli je třeba pro průměrně velkou bublinu kapilární tlak uvažovat. Z výše uvedené podmínky rovnosti hmotností zjistíme poloměr bubliny

$$r = \frac{4\sigma}{\dfrac{RT\varrho_{\mathrm{v}}}{2M_{\mathrm{m(He)}}} - p_{\mathrm{atm}}}\,.$$

Dosadíme-li všechny konstanty, zjistíme, že poloměr takové bubliny se pohybuje okolo 600 nm. Pro obyčejnou, okem viditelnou bublinu se tedy nemusíme zabývat tím, jaký je v ní tlak, hmotnost hélia v bublině to nijak zvlášť neovlivní, a tak můžeme s klidem prohlásit, že stačí počítat s Archimédovým zákonem a gravitací. Finální závěr tedy zní, že stěna bubliny je těžší než hélium v ní.

Jana Poledniková
`janap@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.