Milí řešitelé!

Do rukou se vám dostává poslední číslo XXIV. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře. V tomto díle najdete vzorová řešení úloh poslední série společně se závěrečnou výsledkovou listinou. Naše gratulace patří nejenom těm, kteří se umístili na předních pozicích, ale všem, kdo FYKOS řeší. Vážíme si práce každého řešitele, neboť svým úsilím dokazuje, že má zájem o přírodní vědy.

Tímto také zveme čtvrťáky, kteří jdou studovat na vysokou školu (a nemusí to být nutně MFF UK) do organizátorských řad, pokud mají zájem pomáhat při organizaci FYKOSu.[1] Mladší srdečně zveme do dalšího ročníku, zadání jeho první série najdete na konci brožurky. Také bychom vás všechny chtěli poprosit, abyste informaci o tom, že existuje tak skvělá věc jako FYKOS, šířili dál svým spolužákům, kamarádům a dalším středoškolákům (případně základoškolákům), které by něco takového mohlo zajímat.

Novinky do příštího ročníku

Do příštího ročníku chystáme spoustu změn, nových věcí a aktualit; pohleďte na ty, které už jsou jisté!

Seriál se v příštím ročníku bude zabývat astrofyzikou a jeho autorkou bude Jana Poledniková. O tom, která témata plánuje probírat, si můžete přečíst dál v brožurce.

Za první dva příklady (tzv. rozcvičkové úlohy), které budou mít obvykle maximum 2–3 body, budeme studentům z druhých a nižších ročníků SŠ (a odpovídajících ročníků víceletého gymnázia) do celkového hodnocení počítat jako bonus dvojnásobek bodů (tj. maximum pro ně bude 4–6 bodů).

Zavádíme nově diplomy pro tzv. „úspěšné řešitele“ a to ještě dodatečně i za tento ročník. Úspěšný řešitel bude zatím definovaný jako řešitel, který získal více jak 50 % bodů z maxima v ročníku. Takto vysoká hranice je nastavená zatím kvůli tomu, že diplom úspěšného řešitele bude sloužit i pro prominutí přijímacích zkoušek na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, a je potřeba, aby ji mělo nastavenou na stejnou hladinu více seminářů. Tím ovšem nechceme říci, že řešitelé, kteří na ni nedosáhnou se svými bodovými zisky jsou neúspěšní. Je to jenom další meta, kterou můžete při řešení FYKOSu zdolat a která vám může něco přinést.

Od jarního soustředění se bude zvát striktně podle pořadí semináře z předcházejícího pololetí.[2]

Pokud bude zájem,[3] pak se alespoň částečně vrátíme k tradici TSAFu a v druhém pololetí na DSEF (Den s experimentální fyzikou) budou pro řešitele navazovat další dva dny akce, která má celkový pracovní název *Tři dny s aplikovanou fyzikou.* Budete tak mít možnost jednak navštívit víc experimentálních zařízení a také poznat další nové kamarády, co řeší FYKOS.

Řešitele z okolí Prahy určitě potěší, že chystáme sérii přednášek na různá triková řešení úloh a zajímavá témata středoškolské fyziky. Budou se konat pravidelně od října jednou za čtrnáct

---

1) Jsou různé činnosti, které v průběhu roku organizátoři provádí – zejména vymýšlení a opravování úloh do sérií, příprava a organizace Fyziklání a DSEFu, ale i mnohé další. I pokud nemáte přesnou představu o tom, jak byste mohli FYKOSu pomáhat, ale máte chuť to zkusit, tak se ozvěte Karlovi (`karel@fykos.cz`) a určitě se pro vás nějaká práce najde.

2) Na jarní soustředění se bude zvát podle výsledků prvních tří sérií v aktuálním ročníku a na podzimní podle posledních tří sérií předcházejícího ročníku.

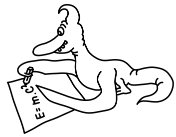
3) Zájem definujeme jako víc než 100 řešitelů semináře v první sérii.

dní v Praze na MFF UK v Troji. Naše přednášky se budou ob týden střídat s Přednáškami z moderní fyziky[4]. Další podrobnosti se objeví včas na stránkách FYKOSu.

Všichni organizátoři FYKOSu vám přejí pěkné prázdniny plné zajímavých zážitků a těší se na vás příští školní rok.

Za FYKOS

Karel Kolář



Řešení VI. série

Úloha VI . 1 ... rozcvička *(5 bodů; průměr 3,85; řešilo 13 studentů)*

a) *zprohýbané prkno*

Prkno dané délky leží vodorovně. Z jednoho konce po něm pošleme kuličku. Za jakých podmínek bude na druhém konci prkna nejdříve?

a) *Prkno bude prohnuté nahoru.*
b) *Prkno bude prohnuté dolů.*
c) *Prkno bude rovně.*
d) *Při libovolném prohnutí bude doba stejná.*

Svoji volbu řádně odůvodněte.

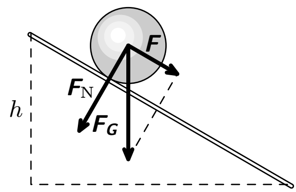
b) *zlomené prkno*

Prohlubeň šířky L přemostíme prohnutým prknem. To se skládá ze dvou stejně dlouhých rovných částí, které jsou uprostřed spojeny zlomem. Na jeden konec položíme kuličku. Pro jakou hloubku prohnutí h bude kulička na druhém konci nejdříve? Zlom je tak hladký, že na něm kulička neztrácí energii. Mohlo by se vám hodit, že funkce $f(x) = x + 1/x$ má minimum v bodě $x = 1$.

Lukáš s Jáchymem, když rozumovali nad první částí úlohy

Zprohýbané prkno

Jelikož má prkno konstantní délku, bude čas přejetí záviset pouze na průměrné rychlosti. Ze zákona zachování energie víme, že čím je kulička níž, tím větší má rychlost. Její potenciální energie v gravitačním poli se přemění na kinetickou energii. Tedy pro vodorovné prkno je rychlost konstantní, pro prkno prohnuté nahoru je rychlost menší a pro prkno prohnuté dolů je rychlost větší.



Obr. 1. Síly působící na kuličku

Pokud bychom se dívali jen na působení sil, vidíme, že je-li prkno rovné, žádná výsledná síla nepůsobí a pohyb je rovnoměrný. Je-li prkno prohnuté nahoru, kulička nejdříve zpomaluje a pak zrychluje. Průměrná rychlost je tedy menší. Naopak při prohnutí dolů kulička nejdříve jede z kopce a tedy zrychluje a pak zase zpomaluje. Průměrná rychlost je větší.

Správná odpověď je tedy b), protože kulička pojede nejrychleji.

[4] Odkaz: `http://utf.mff.cuni.cz/popularizace/PMF/`
Naše přednášky budou i ve stejný čas – 18.00.

Zlomené prkno

Kuličku budeme modelovat jako hmotný bod. Spočítejme, za jak dlouho se dostane do poloviny. Rozložíme tíhovou sílu do kolmého a tečného směru k prknu. Kolmá složka je vyrušena reakcí prkna. Tečná složka urychluje kouli směrem dopředu (z kopce). Tato síla je po celou první polovinu cesty konstantní. Jedná se tedy o rovnoměrně zrychlený pohyb. Z podobnosti trojúhelníků (obrázek 1) můžeme urychlující sílu vyjádřit jako

$$F = mg\frac{h}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}\,.$$

Tedy zrychlení, se kterým se bude pohybovat, bude

$$a = \frac{F}{m} = \frac{gh}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}\,.$$

Do vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb $s = \frac{1}{2}at^2$, kde s je dráha, kterou těleso urazí z klidu za čas t při zrychlení a, dosaďme

$$s = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2} \quad \text{a} \quad a = \frac{gh}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}\,.$$

Odtud již jednoduše vyjádříme čas, za který kulička sjede do poloviny.

$$\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2} = \frac{1}{2}\frac{gh}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}t^2$$

$$2\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2\right) = ght^2$$

$$\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g} = t^2\,, \qquad \sqrt{\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g}} = t$$

Čas, za který ujede druhou polovinu, bude stejný (rozmyslete si).

Nyní hledáme hodnotu h, pro kterou bude výraz

$$\sqrt{\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g}} \tag{1}$$

nejmenší. Druhá odmocnina je funkce rostoucí na kladných číslech, a proto bude výraz (1) nejmenší, když bude argument odmocniny

$$\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g} \tag{2}$$

také nejmenší. Pokud výraz (2) upravíme na

$$\frac{L}{g}\left(\frac{1}{\frac{2h}{L}} + \frac{2h}{L}\right)\,,$$

stačí již jen použít nápovědu ze zadání a říct, že tento výraz nabývá minima pro

$$\frac{2h}{L} = 1 \quad \text{neboli} \quad h = \frac{L}{2}\,.$$

Přejetí bude kuličce trvat nejkratší dobu pro $h = L/2$.

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz

Úloha VI . 2 ... *zlý trojúhelník* *(4 body; průměr 2,83; řešilo 6 studentů)*

Máme dlouhou štěrbinu a vedle ní bodovou dírku. Jak bude vypadat interferenční obrazec na rovinném stínítku, posvítíme-li skrz ně koherentním světlem? Zanedbejte difrakci na samotné štěrbině a samotné dírce. *Mára šmíroval*

Za bodovou dírkou se bude světlo chovat, jako by dírka byla bodovým zdrojem koherentního záření. Výsledek průchodu světla štěrbinou si můžeme představit jako bodové zdroje nahuštěné vedle sebe. Jejich superpozicí dostaneme „válcový“ zdroj, vlnoplochy budou soustředné pláště válců se společnou osou, kterou tvoří štěrbina.

Podmínkou pro interferenční maxima je, aby dráhový rozdíl, tj. rozdíl vzdálenosti od štěrbiny a vzdálenosti od bodové dírky, byl celým násobkem vlnové délky λ. Osu x ztotožníme se štěrbinou a dírku umístíme na osu y do vzdálenosti d, tedy bude mít souřadnice $(0, d)$. Vzdálenost roviny stínítka od roviny tvořené štěrbinou a dírkou označíme l, přičemž uvažujeme, že tyto roviny jsou rovnoběžné. Podmínku pro interferenční maximum pak zapíšeme jako

$$\sqrt{y^2 + l^2} - \sqrt{(y - d)^2 + l^2 + x^2)} = k\lambda\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Z výše uvedené rovnice si vyjádříme y a dostaneme křivky k-tého interferenčního maxima popsané rovnicemi

$$y_{1,2} = \frac{d(x^2 + d^2 - k^2\lambda^2) \pm \sqrt{4k^2\lambda^2 l^2 (d^2 - k^2\lambda^2) + k^2\lambda^2 (x^2 + d^2 - k^2\lambda^2)^2}}{2(d^2 - k^2\lambda^2)}\,,$$

z takovéhoto předpisu si nijak přesnou představu o tvaru křivky neuděláme. Můžeme je nechat vykreslit počítačem. Předpis i získaný graf budou pro rozumné parametry nápadně připomínat paraboly. Nabízí se myšlenka, že při vhodné aproximaci dostaneme právě paraboly. Tou bude tak zvaná paraxiální aproximace – budeme předpokládat, že vzdálenost štěrbiny a bodu od stínítka je mnohem větší než všechny ostatní rozměry, $l \gg d$.

Odmocniny rozepíšeme jako Taylorův polynom, v daném přiblížení nám bude stačit prvního stupně. Platí tedy $\sqrt{1 + x} \approx 1 + x/2$ pro x malé.

Dostáváme podmínku pro interferenční maximum v podobě

$$l + \frac{y^2}{2l} - l - \frac{(y - d)^2 + x^2}{2l} = k\lambda\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

z čehož plyne rovnice pro křivku interferenčního maxima v paraxiální aproximaci

$$y = \frac{x^2 + d^2 - k\lambda l}{2d}\,.$$

Vidíme, že jsme skutečně dostali paraboly, což se vzhledem k tomu, že máme přímku a bod, které nám tyto křivky určují, dalo čekat.

Tereza Steinhartová
terkas@fykos.cz

Úloha VI . 3 ... letadlo *(3 body; průměr 1,86; řešilo 7 studentů)*

Jak dlouhý čas uběhne v letadle mezi „západem“ a „východem“ slunce, letí-li v rovině ekliptiky? A jak to bude vypadat s délkou dne a noci? Potřebné údaje jako běžnou letovou hladinu si zjistěte na internetu. Rozeberte oba případy, kdy letadlo letí na západ i na východ.

Vymyslel Petr, když čekal na romantický západ slunce

Vzhledem k tomu, jaký je poměr výšky h, ve které letadla létají, a poloměru Země R a jaká je doba, po kterou slunce vychází nebo zapadá, můžeme si dovolit aproximaci, podle které budou sluneční paprsky na Zemi dopadat rovnoběžně.

Nejprve spočítáme rychlost v, kterou se letadlo pohybuje vůči soustavě spojené se Sluncem a Zemí. Jednak má svoji rychlost v_l, a kromě toho je navíc unášeno rychlostí v_r danou rotací Země. Tato rychlost ale neleží v tečně trajektorie letu, a navíc její velikost je závislá na zeměpisné šířce. Její průmět do roviny ekliptiky má stále stejnou velikost, a to $\omega(R+h)\cos\varphi$, kde φ je odklon zemské osy od normály roviny ekliptiky. Pokud letadlo letí ve směru otáčení Země, tj. od západu na východ, tyto rychlosti se sčítají. Při pohybu od východu na západ od rychlosti otáčení Země odečítáme rychlost letadla v_l.

Vlastní výpočet provedeme pouze pro pohyb od východu na západ, druhý případ je téměř identický. Označme T délku jednoho dne. Pak platí

$$v = v_\mathrm{r} - v_\mathrm{l} = \omega(R+h)\cos\varphi - v_\mathrm{l} = \frac{2\pi}{T}(R+h)\cos\varphi - v_\mathrm{l}\,.$$

Doba T_0 celého „dne“ (tj. od východu slunce po druhý východ) na palubě letadla je pak

$$T_0 = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi(R+h)T}{2\pi(R+h)\cos\varphi - v_\mathrm{l}T}\,.$$

Pokud nás zajímá čas, který uplyne od „západu“ slunce k jeho „východu“, musíme vypočíst, jakou dráhu proletí letadlo ve stínu Země. Označme α úhel, který svírá spojnice středů Země a Slunce se spojnicí středu Země a bodu, kde se letadlo vynořuje ze stínu Země. Pro tento úhel platí

$$\alpha = \arcsin\frac{R}{R+h}\,.$$

Odtud již snadno určíme dráhu d, kterou letadlo ve stínu urazí,/ a pomocí které dopočteme hledaný čas

$$T' = \frac{d}{v} = \frac{2\alpha(R+h)}{\frac{2\pi}{T}(R+h)\cos\varphi - v_\mathrm{l}} = \frac{2(R+h)\arcsin\frac{R}{R+h}}{\frac{2\pi}{T}(R+h)\cos\varphi - v_\mathrm{l}}\,.$$

Pokud by nás zajímalo trvání dne (mezi východem a západem), pak ho stačí dopočíst jako rozdíl $T_0 - T'$. Pro pohyb od západu na východ (tj. ve směru otáčení Země) se výsledek odlišuje pouze součtem ve jmenovateli místo rozdílu.

Dopravní letadla (jako např. Boeing 747) se pohybují ve výšce okolo 11 km rychlostí $918\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Po dosazení vychází pro pohyb proti směru otáčení Země $T_0 = 65{,}1\,\mathrm{h}$ a $T' = 31{,}3\,\mathrm{h}$ a pro pohyb ve směru otáčení Země $T_0 = 16{,}4\,\mathrm{h}$ a $T' = 7{,}9\,\mathrm{h}$.

V řešení jsme neuvažovali to, že rotace Země značně vychyluje trajektorii letadla z roviny ekliptiky. Letadlo by tento pohyb muselo kompenzovat svým pohybem, a tedy by se uplatnila jen část z jeho rychlosti vůči vzduchu. Tento efekt by ve skutečnosti hrál velkou roli. Dále jsme zanedbali proudění vzduchu, které výrazně ovlivňuje pohyb letadel.

Petr Ryšavý
petr@fykos.cz

Úloha VI . 4 ... *konečné řešení otázky globálního oteplování* *(4 body; průměr 3,25; řešilo 8 studentů)*

Jak by se změnil výkon slunečního záření dopadajícího na Zemi v odslunÍ, kdyby byla jednorázově vychýlena zemská dráha (změnou její okamžité rychlosti ve směru její dráhy) tak, aby byl pozemský rok o týden delší? Odhadněte teplotu Země v přísluní a odslunÍ, pokud by Země měla téměř nulovou tepelnou kapacitu. Stačí uvažovat, že původní dráha Země byla kruhová a přešla na eliptickou. *Karel se díval na Futuramu*

Vzpomeneme si na Keplerův třetí zákon, který dává do vztahu oběžné doby planet T obíhající centrální slunce s jejich hlavními poloosami a. Stejně bude platit i v našem případě pro změnu trajektorie Země

$$\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3} \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_0^2}}\, a_0\,,$$

kde indexy 0 budeme značit počáteční situaci, kdy Země obíhá Slunce po kružnici s poloměrem $a_0 = 1\,\mathrm{AU} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ s oběžnou dobou $T_0 = 365{,}2\,\mathrm{dne}$, a indexy 1 budou značené veličiny odpovídající situaci po změně zemské dráhy (doba oběhu $T_1 = 372{,}2\,\mathrm{dne}$).

Vzhledem k tomu, že přechod na eliptickou[5] dráhu se uskutečnil rychle a ve směru pohybu Země, což znamená, že přísluní (perihelium) nové dráhy bude ve vzdálenosti $a_\mathrm{p} = a_0$ od Slunce a odslunÍ (afelium) bude ve vzdálenosti $a_\mathrm{a} = 2a_1 - a_0 = \left(2\sqrt[3]{T_1^2/T_0^2} - 1\right) a_0 \approx 1{,}025\,\mathrm{AU}$. Už z tohoto výsledku je vidět, že dramatické změny teplot v průběhu roku nebudou nastávat, protože excentricita této dráhy je pouze $e_1 = (a_\mathrm{a} - a_\mathrm{p})/(a_\mathrm{a} + a_\mathrm{p}) = 1 - \sqrt[3]{T_0^2/T_1^2} = 0,0126$, což je menší excentricita, než má Země ve skutečnosti. Pokud bychom ale uvažovali eliptickou dráhu, záleželo by na tom, kdy v průběhu roku dojde ke změně dráhy. Excentricita by se pak mohla i zmenšit, střední vzdálenost Země-Slunce by vzrostla v každém případě tak, aby se velká poloosa zvětšila z a_0 na a_1.

Hustota toku sluneční energie ve vzdálenosti 1 AU od Slunce se nazývá *sluneční konstanta* a její hodnota je $S_0 = 1370\,\mathrm{W/m^2}$. Ve skutečnosti se nejedná o konstantu, protože v průběhu roku kolísá o cca 1,7 %[6], ale v rámci řešení úlohy ji budeme považovat za konstantní. Hustota toku sluneční energie je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti a ve vzdálenosti r od Slunce ji můžeme vypočítat podle vztahu

$$S_r = \frac{a_0^2}{r^2} S_0\,.$$

V přísluní naší nové dráhy je $S_\mathrm{p} = S_0$ z definice a v odslunÍ

$$S_\mathrm{a} = \frac{a_\mathrm{p}^2}{a_\mathrm{a}^2} S_0 = \frac{1}{\left(2\sqrt[3]{T_1^2/T_0^2} - 1\right)^2} S_0 = 0,95 S_0 = 1300\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}\,.$$

Pro odhad teploty budeme předpokládat, že Země je dokonale černé těleso a že v každý okamžik je vyrovnaná bilance zářivého výkonu dopadajícího na Zemi a výkonem, která je Zemí

[5] Případně více eliptickou, pokud bychom se rovnou rozhodli uvažovat i to, že původní dráha Země je ve skutečnosti eliptická s excentricitou $e = 0,0167$.

[6] Nemluvě o tom, že se i její střední hodnota periodicky mění v průběhu 11letého slunečního cyklu.

vyzařovaná jako černým tělesem. Jedná se o logický předpoklad, protože jinak by Země nebyla v tepelné rovnováze a buď by se neustále ohřívala, nebo ochlazovala. Ve skutečnosti má Země tepelnou kapacitu, takže není v tak dokonalé tepelné rovnováze – ani blízko takové, že by se dopadající záření z jedné strany na Zem okamžitě vyzařovalo všemi směry, ale berme to jako první přiblížení. Světelný výkon dopadající na Zemi, která je dokonalá koule o poloměru R_Z, ve vzdálenosti r, je úměrný průřezu Země a hustotě toku sluneční energie, $P_r = \pi R_\mathrm{Z}^2 S_r$. Výkon, který Země vyzáří na svém celém povrchu, je dle Stefanova-Boltzmannova zákona

$$P = 4\pi R_\mathrm{Z}^2 M = 4\pi R_\mathrm{Z}^2 \sigma \tau^4 ,$$

kde M je intenzita vyzařování z povrchu černého tělesa, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ Stefanova-Boltzmannova konstanta a τ je teplota černého tělesa. Vzhledem k tomu, že se mají oba výkony rovnat, dostáváme vzorec pro teplotu Země v našem přiblížení

$$\tau_r = \sqrt[4]{\frac{S_r}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{a_0}{2r}}\sqrt[4]{\frac{S_0}{\sigma}} .$$

Teplota v perihelu pak vyjde $\tau_\mathrm{p} \approx 6\,{}^\circ\mathrm{C}$ a v afelu $\tau_\mathrm{a} \approx 2\,{}^\circ\mathrm{C}$. Teplota v perihelu by teoreticky podle našich předpokladů měla odpovídat střední teplotě na Zemi v průběhu roku, která se udává jako 14 °C. Což na první pohled úplně nesedí, ale vzhledem k počtu zanedbání, kterých jsme se dopustili, je to poměrně dobrá shoda. Další vlivy, které by se pro správné určení teploty měly započítat, jsou například to, že ve skutečnosti spektrum Země při vyzařování nebude ideálně odpovídat vyzařování černého tělesu, ale mělo by určitou specifickou vyzařovací charakteristiku, navíc i tato celková charakteristika by byla jenom přiblížením, protože Země není jenom z jedné chemické látky, ale jinak bude vyzařovat pevnina a jinak oceány. Toto by vedlo spíš ke snížení očekávané teploty Země. Vliv na teplotu Země má také to, že má horké jádro – částečně obsahující tepelnou energii od doby vzniku Země pocházející z gravitační potenciální energie a dále v jádru dochází k rozpadu radioaktivních prvků, což také zvyšuje teplotu Země. Další věcí je přítomnost atmosféry, která díky skleníkovým plynům zvyšuje teplotu zemského povrchu.

Něco navíc

Pokud bychom tedy chtěli vyřešit globální oteplování jako ve Futuramě, kde roboti ovlivnili dráhu Země tak, že rok byl o týden (robotí pařby) delší, tak by nás kromě výkyvů teploty v průběhu roku zejména zajímala průměrná roční teplota. Respektive i s naším relativně primitivním modelem bychom mohli určit, o kolik zhruba stupňů by se teplota změnila vůči původní teplotě. Za tím účelem můžeme využít druhý Keplerův zákon – *zákon ploch* – říkající, že za jednotku času průvodič planety opíše stejnou plochu.[7] Pro plošnou rychlost w pak platí

$$w = \frac{a_1 b_1}{T_1} = \frac{r v_r}{2},$$

kde b_1 je vedlejší poloosa elipsy a v_r je rychlost planety ve vzdálenosti r od Slunce. Pokud bychom chtěli, můžeme vypočítat i hodnotu w s pomocí vztahu $e = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}/a_1$, která pak bude $w = \sqrt{a_\mathrm{a} a_\mathrm{p}} = a_0 \sqrt{2\,(T_1/T_0)^{2/3} - 1}$, ale toto číslo nebudeme dál potřebovat. Vystačíme si s úvahou, že když w je konstantní, můžeme vyjádřit oběžnou rychlost jako funkci

[7] Je to jen jiná formulace zákona zachování momentu hybnosti.

vzdálenosti $v_r = 2w/r$. Vzhledem k tomu, že trajektorie Země je elipsa, můžeme si vybrat souřadnou soustavu, kde Slunce bude v jejím počátku a perihelium bude na ose x v kladném směru. Naši elipsu popíšeme v polárních souřadnicích jako

$$r_\varphi = a_1 - (a_1 - a_0)\cos\varphi\,,$$

kde φ je úhel měřený právě od perihelu v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček). Jde o aproximaci pro malé excentricity ε. Obecně můžeme kuželosečky v polárních souřadnicích zapsat ve tvaru

$$r(\varphi) = \frac{a_0}{1 - \varepsilon\cos\varphi}\,,$$

kde a_0 je velikost hlavní poloosy a ε je excentricita. Pro $\varepsilon = 0$ jde o kružnici, pro $0 < \varepsilon < 1$ jde o elipsu, pro $\varepsilon = 1$ jde o parabolu a pro $\varepsilon > 1$ to je jedna větev hyperboly.

Pokud jste se ještě s polárními souřadnicemi nesetkali, tak místo souřadnice x a y máme souřadnice $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ určující vzdálenost od počátku a φ, což je právě zmíněný úhel, pro který platí $\varphi = \operatorname{tg} y/x$.

Poslední úvaha se týká toho, že teplotu bychom chtěli „vystředovat“ tak, že bychom si rozdělili dráhu Země v průběhu roku na malé kousíčky, kdy má skoro stejnou teplotu určenou naším modelem, a teplotu vynásobili časem, za který Země příslušný kousíček dráhy urazila. Všechny tyto vynásobené kousky bychom pak sečetli a vydělili dobou oběhu. Vlastně bychom spočítali vážený průměr teploty. Čas, který Zemi potrvá, než urazí nějakou dráhu, je nepřímo úměrný její rychlosti. Rychlost je zase v našem případě nepřímo úměrná vzdálenosti od Slunce, takže čas je úměrný vzdálenosti. Takže můžeme jako váhovou funkci použít vzdálenost a ne přímo čas. Také bude lepší, když kousíčky, ve kterých považujeme rychlost Země za konstantní, půjdou k nekonečně krátkým dobám – tzn. přejdeme k integrování. Průměrná teplota bude

$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^{2\pi} r_\varphi \tau_{r_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{2\pi} r_\varphi\,\mathrm{d}\varphi}\,.$$

Tyto integrály si můžeme nechat numericky spočítat[8] a vyjde nám, že nemůžeme čekat změnu průměrné roční teploty ani o celé 2 °C, takže pokud by bylo potřeba Zemi ochladit v situaci, kdy by bylo všem nechutné vedro, ani o týden delší rok by nestačil.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha VI . P ... *nošení vody* *(5 bodů; průměr 2,00; řešilo 6 studentů)*

V létě bylo zakázáno vynášet z bazénů vodu v bermudách. Kolik ale může člověk vynést vody ve vlasech? Předpokládejme, že vlasů je větší počet (z bazénu nevynáší vodu děd Vševěd).

Komusi to viselo ve vlasech po návštěvě archivu

Vlasy, podobně jako ony zakázané bermudy, jsou složeny z mnoha jednotlivých vláken, která na sebe váží vodu. Způsoby, kterými k tomu dochází, jsou čtyři. Diskutujme tedy, jak moc jsou efektivní a jak se podílejí na celkovém množství navázané vody. Předtím ale připomeňme nějaké základní vlastnosti pokrývky hlavy. Průměr vlasu je asi 100 µm, jeho hustota objemová asi $1{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, hustota pokrytí hlavy asi $200\,\mathrm{cm^{-2}}$ a plocha vlasy pokryté části hlavy

[8] Například pomocí stroje na http://www.wolframalpha.com/.

asi 500 cm^2. To dává dohromady asi 100000 vlasů na hlavě. Při sestřihu na 1 cm je hmotnost vlasů asi 10 g.

a) Vsáknutí vody do vlákna

Vlákno vlasu je tvořeno ze tří částí. Svrchní šupinatá *kutikula* chrání vnitřní vrstvu (*kortex*), ve které u tlustších vlasů (resp. vousů) je skryta dřeň (*medula*). Voda se zachycuje především ve vláknitém kortexu, kutikula naopak vodu odpuzuje, protože pokud je vlas příliš navlhlý, vlákna nabobtnají a trhají se. Kolik vlas absorbuje, najdeme na internetu, většina zdrojů se shoduje na tom, že je to mezi 20 až 30 procenty hmotnosti vlasu, podle jeho druhu. Vzpomeneme-li si na text ze začátku, zjistíme, že pokrývka hlavy nasaje asi 3 ml vody na centimetr délky.

b) Záchyt vody mezi vlákny

Tento odstavec se týká především dlouhých vlasů, protože k tomu, aby se mohla voda zachytit mezi vlákna, musejí být vlasy zplihlé. Představme si, že vlasy reprezentované rovnými válci jsou naskládané těsně vedle sebe jako klády dřeva. Nyní si jistě vzpomínáte na úlohu Dr. Nec ze třetí série, kdy bylo potřeba vypočítat koeficient pro přepočet mezi prostorovým metrem dřeva a plnometrem. Nyní potřebujeme zjistit, jaké množství vzduchu je mezi našimi kládami. Kdyby vlasy byly jen vyrovnané vedle sebe v hexagonální mříži jako ve zmíněné úloze dřevo, byl by převodní vztah mezi objemem vlasů (V_{vl}) a vzduchu (V_{vz}) následující

$$V_{\mathrm{vz}} = V_{\mathrm{vl}} \frac{1-\nu}{\nu}\,.$$

Pro $\nu = 0{,}9$[9] budeme objem vlasů násobit číslem $\frac{1}{9}$. Vlasy do mezer mezi sebou zachytí tolik vody, co je devítina jejich objemu. Přepočteno na centimetr délky (s tím, že minimální délka, pro kterou to platí, je asi 5 cm) to činí 0,9 ml. Pokud uvážíme to, že vlasy odděluje vrstva vody tenká 10 % jejich průměru, musíme toto číslo zdvojnásobit.

c) Záchyt na povrchu

Na povrchu vlasů se nějaká voda zachytí vždy. Povrch se však může dost lišit. Pro lidi s dlouhými vlasy je přibližně roven ploše, kterou zabere jejich mokrý skalp. To je přibližně součet zarostlé plochy hlavy (500 cm^2) a přečnívající zbytek. Ten na šířku zabere asi tolik, co hlava (15 cm) a na délku stejně jako nejdelší vlas. Tato část by se měla násobit dvěma, protože i mezi kůží zad a vlasy se určitě něco zachytí. Osoba se třiceticentimetrovými vlasy tedy má aktivní plochu hlavy asi 1400 cm^2. Jaká je tloušťka vrstvy vody? Malá. Vlasy jsou mastné a vodu spíše odpuzují, takže se na nich brzo začnou tvořit kapičky nebo přímo celé proudy, které stekou dřív, než vyjdeme z bazénu – zůstane na nich nejvýše několik mikrometrů vody, které (pokud by byly vlasy oddělené) rychle vyschnou. Na celé hlavě je tak nejvýše mililitr vody.

d) Záchyt v prostoru mezi kořínky

Pravděpodobně největší zásluhu na vynášení vody z bazénu mají prostory mezi kořínky vlasů. Kdybychom se snažili jakkoliv „uplácat" vlasy tak, aby mezi nimi byly co nejmenší mezery, vždy nějaká malá (ale ne nezanedbatelná) zůstane právě u kořínku. Protože hlavu

[9] Pro připomenutí: Koeficient ν byl spočten pro jedno konkrétní uspořádání – obdélníkový průřez. Byl však uveden obecný vztah, do kterého jsme dosadili. Mokrá kštice má totiž v prvním přiblížení tvar tenkého kvádru o rozměrech *délka vlasu* × *polovina obvodu hlavy* × *cca 4 mm*, což dopočteme z údajů v úvodu řešení. Odhad dobře platí i pro krátké vlasy (které nestojí), protože si tento kvádr můžeme představit jako kosý, což na objem nemá vliv. Je důležité, že je tenký, protože se příliš neprojeví, že ve skutečnosti kopíruje povrch hlavy.

namáčíme rovnoměrně, nemá tato voda téměř kudy utéci, jen malými mezerami (viz výše) mezi vlákny, po jejich povrchu nebo bokem zůstane zachycená poměrně dlouhou dobu. Tyto mezírky jsou soustředěny u povrchu hlavy a dosahují několika milimetrů délky (můžeme si je představit jako zužující se a stáčející se kužely – protože dál už postupně přechází v mezivlákenný prostor. Takže takto se na hlavě zachytí okolo 50–100 ml vody. Lidé s krátkými vlasy se budou blížit nižší hodnotě.

Největší vliv na to, kolik vody vyneseme, má ovšem rychlost, kterou vyběhneme z bazénu ven. Ve vodě jsou totiž vlasy rozptýlené všude možně a při vynoření s sebou stáhnou velké množství vody, která ale rychle odteče, protože se na nich nemá jak zachytit. Vlasy tak nejsou naskládané těsně na sebe, ale může se stát, že máte na hlavě víc vody než vlasů. Tím se změní koeficient ze druhého bodu i několikanásobně, stejně tak i množství vody ve vlasech.

Sečteme-li všechny vlivy, které jsme diskutovali, odhadujeme, že vyneseme přibližně 5 ml vody na centimetr délky vlasů a průměrně asi 75 ml vody vždy. Autor tohoto řešení by tedy na vlasech z bazénu vynesl naráz asi 60 ml vody, zatímco někdo s hřívou pod lopatky by připravil plovárnu asi o 300 ml vody. Je to reálné? Udělali jsme menší experiment a dolní hodnota se potvrdila, protože jsme naměřili asi 50 ± 10 ml. Jak je to ve skutečnosti s delšími vlasy, nevíme. Nicméně hodnota bude spíš vyšší než odhadnutá, a proto je srovnání s bermudovými plavkami na místě.

Literatura

Pokud si chcete počíst ve zdrojích, z nichž jsme čerpali, jsou to především tyto tituly:

[1] Clarence R. Robbins: Chemical and physical behavior of human hair (najdete na Google Books),

[2] C. Barba et al.: Water absorption/desorption of human hair and nails, Thermochimica Acta 2010.

Aleš Podolník
`ales@fykos.cz`

Úloha VI . E ... zeměplocha *(8 bodů; průměr 3,25; řešilo 8 studentů)*

Vymyslete co nejvíce způsobů, jak ověřit předpoklad o kulatosti Země. Pokud zjistíte, že je Země opravdu kulatá, dokázali byste určit i její poloměr? *Terka J. si ušila bič*

Bohužel pro spoustu jiných povinností nestihla Terka Jeřábková úlohu naměřit. Navíc ani žádný řešitel neposlal propracovaný experiment. Proto si budete muset počkat na autorské řešení této úlohy do doby, než budeme posílat brožurku první série.

Úloha VI . S ... všehochuť *(6 bodů; průměr 5,00; řešil 1 student)*

a) *Předpokládejme, že máme radioaktivní látku X, která se rozpadá na látku Y s poločasem rozpadu T_1, ta se následně rozpadá na stabilní látku Z s poločasem rozpadu T_2. Jak závisí koncentrace látky Y na čase, pokud jsme na počátku měli pouze látku X?*

b) *Vypočtěte, jak vypadá difrakční obrazec vzniklý průchodem světla o vlnové délce λ štěrbinou šířky d.*

c) *Pokuste se najít frekvence ω, pro které existuje řešení vlnové rovnice na čtverci o hraně a. Kolik různých funkcí odpovídá jedné úhlové frekvenci?*
Nápověda: Pro prostorovou část předpokládejte řešení ve tvaru $A(x, y) = X(x)Y(y)$.

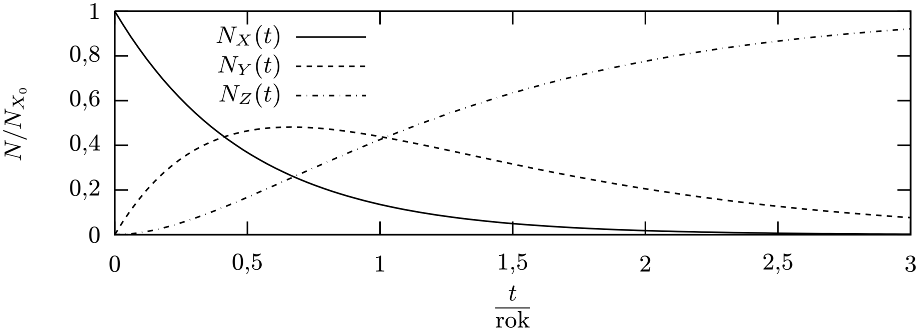
Ozářilo Lukáše

Rozpad

Rozmysleme si nejprve, jak to je s poločasem rozpadu T. Víme, že pro množství radioaktivní látky v čase t platí

$$N(t) = N_{t=0} 2^{-t/T} = N_{t=0} \exp(-t/T \ln 2) = N_{t=0} \exp(-t/\lambda)\,, \quad \lambda = \frac{T}{\ln 2}\,,$$

kde λ je tzv. rozpadová konstanta.



Obr. 2. Závislost relativního množství radioaktivních látek na čase pro $\lambda_{XY} = 2\,\mathrm{rok}^{-1}$ a $\lambda_{YZ} = 1{,}1\,\mathrm{rok}^{-1}$

Studujme nejprve rozpad $X \to Y$, množství látky X budeme značit N_X, látky Y N_Y, atd. Napíšeme si pro něj diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}N_X}{\mathrm{d}t} = -\lambda_{XY} N_X\,.$$

Budeme předpokládat řešení ve tvaru exponenciály, vizte text seriálu. Zjistíme, že platí

$$N_X(t) = N_{X_0} \exp(-\lambda_{XY} t)\,.$$

Nyní budeme zkoumat druhý rozpad $Y \to Z$. Pro množství látky Y platí

$$\frac{\mathrm{d}N_Y}{\mathrm{d}t} = -\lambda_{YZ} N_Y + \lambda_{XY} N_X\,, \tag{3}$$

druhý člen se zde vyskytuje, protože látky Y přibývá rozpadem látky X. Protože zde máme soustavu dvou diferenciálních rovnic, budeme předpokládat tvar řešení N_Y ve tvaru součtu dvou exponenciál, tj. $N_Y = A \exp(-\alpha_1 t) + B \exp(-\alpha_2 t)$ a dosadíme do (3). Dostáváme

$$\begin{aligned} -A\alpha_1 \exp(\alpha_1 t) - B\alpha_2 \exp(-\alpha_2 t) &= \\ = -\lambda_{YZ} A \exp(-\alpha_1 t) - \lambda_{YZ} B \exp(-\alpha_2 t) &+ N_{X_0} \lambda_{XY} \exp(-\lambda_{XY} t)\,. \end{aligned}$$

Aby tato rovnice mohla být splněna pro všechny časy, musí být součet koeficientů u stejných exponenciál roven nule; protože $N_{X_0} \neq 0$, musí být $\alpha_1 = \lambda_{XY}$. Pak platí

$$\begin{aligned} -A\alpha_1 &= -A\lambda_{YZ} + \lambda_{XY} N_{X_0}\,, \\ -B\alpha_2 &= -B\lambda_{YZ}\,. \end{aligned}$$

Z toho vyplývá $\alpha_2 = \lambda_{YZ}$, B je volný parametr, který musíme dopočítat z počáteční podmínky, $A = \lambda_{XY} N_{X_0}/(\lambda_{YZ} - \lambda_{XY})$. Pro množství látky Y potom můžeme psát

$$N_Y(t) = N_{X_0} \frac{\lambda_{XY}}{\lambda_{YZ} - \lambda_{XY}} \left(\exp(-\lambda_{XY} t) - \exp(-\lambda_{YZ} t)\right) .$$

Konstantu B jsme zvolili tak, aby $N_Y(0) = 0$. Protože se žádná látka neztrácí, platí $N_Z(t) = N_{X_0} - (N_X(t) + N_Y(t))$. Množství jednotlivých složek je uvedeno na grafu v obrázku 2.

Difrakce

Abychom určili tvar difrakčního obrazce ve veliké vzdálenosti, musíme vypočítat Fourierovu transformaci štěrbiny. Protože je problém translačně symetrický podél osy štěrbiny, omezíme se jen na jeden rozměr, platí

$$p(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}k\sqrt{2\pi}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd/2}\right) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\mathrm{i}k} \sin(kd/2) .$$

Pozorovaná intenzita osvětlení je kvadrátem Fourierova obrazu. Platí

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(kd/2)}{kd/2}\right)^2 ,$$

kde jsme všechny konstanty zahrnuli do I_0, tj. osvětlení přímo za štěrbinou. Argument $kd/2$ závisí pouze na vlnové délce a parametrech úlohy, tj. d a lineárně na úhlu odchylky φ. Z textu víme, že platí $\varphi = k\lambda/2\pi$, tj. $kd/2 = \pi d/\lambda \cdot \varphi$.

Kmitání

Máme za úkol najít řešení vlnové rovnice pro čtverec s hranou a. Pro výchylku $U(x, y, t)$ platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

Vypočteme-li Fourierovu transformaci této rovnice v časové proměnné, dostáváme

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}(x, y}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u}(x, y) = 0 .$$

V zadání je napsáno, že máme řešení hledat ve tvaru součinu dvou funkcí závislých pouze na jedné souřadnici. Tj. $\hat{u} = X(x)Y(y)$, dosadíme-li toto do rovnice výše a vydělíme-li $\hat{u}$, dostaneme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 ,$$

aby tato rovnice platila pro všechna x a y, musí být první dva členy konstantní. To nám ale připomíná rovnici pro strunu z textu seriálu. Musí platit

$$X_l(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a} l\right) , \quad l \in \{1, 2, 3, \ldots\} .$$

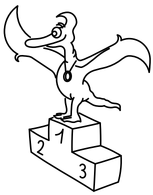
Potom platí $X_l''(x)/X_l(x) = (\pi/a)^2 l^2$. Podmínka na úhlovou rychlost kmitání je proto

$$\omega = \frac{\pi}{ca} \sqrt{l^2 + m^2} ,$$

kde m odpovídá počtu uzlů funkce $Y(y)$. Celkové řešení je potom

$$u_{lm}(x,y,t) = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a} l\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a} m\right) \sin\left(\frac{\pi}{ca}\sqrt{k^2+m^2}t\right) .$$

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz



Pořadí řešitelů po VI. sérii

Závěrečné pořadí[10]

Kategorie prvních ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	4	3	4	5	8	6	**35**	*100*	**205**
1.	*Tomáš Kořínek*	G, Žamberk	1	–	–	–	2	3	–	**6**	*39*	**36**
2.	*Karolína Šromeková*	G D. Tatarku, Poprad	1	–	–	–	2	–	–	**3**	*44*	**17**
3.	*Markéta Vohníková*	PORG, Praha	4	–	1	–	–	–	–	**5**	*48*	**15**
4.	*Dušan Klíma*	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	2	1	0	2	1	3	–	**9**	*31*	**9**
5.	*Jan Palounek*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*60*	**6**

Kategorie druhých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	4	3	4	5	8	6	**35**	*100*	**205**
1.	*Kristýna Kohoutová*	G, Žamberk	5	2	2	2	3	4	–	**18**	*66*	**85**
2.	*Filip Murár*	G, Masarykovo nám., Třebíč	5	–	3	4	2	3	–	**17**	*71*	**82**
3.	*Jakub Šafín*	G, P. Horova, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*67*	**65**
4.	*Lubomír Grund*	G Zábřeh	5	2	–	2	–	–	–	**9**	*64*	**51**
5.	*Veronika Dočkalová*	G, Elgartova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*47*	**36**

Kategorie třetích ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	4	3	4	5	8	6	**35**	*100*	**205**
1.	*Jakub Vošmera*	G Matyáše Lercha, Brno	5	4	3	4	–	4	5	**25**	*88*	**121**
2.	*Tomáš Bárta*	G, Nad Štolou Praha	5	4	–	4	–	–	–	**13**	*66*	**72**
3.	*Jakub Kubečka*	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*52*	**49**
4.	*Ondřej Míl*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*81*	**29**
5.	*Stanislav Fořt*	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*67*	**24**

[10] Pořadí je z technických důvodů zkráceno. Kompletní výsledkové listiny najdete na našem webu.

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	4	3	4	5	8	6	**35**	*100*	**205**
1.	*Ján Pulmann*	G Grösslingova, Bratislava	5	4	1	4	2	4	–	**20**	*84*	**63**
2.	*Jan Sopoušek*	Gymnázium, Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*58*	**29**
3.	*Dominika Kalasová*	G, Boskovice	–	–	–	–	–	3	–	**3**	*43*	**26**
4.	*Martin Bucháček*	G Luďka Pika, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*79*	**22**
5.	*Jan Brandejs*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**0**	*65*	**17**

Zadání I. série

Termín odeslání: 10. října 2011
Termín doručení: 12. října 2011 18:00

Úloha I . 1 ... *Pepiččina žárovička* (2 body)

Pepička si koupila žárovičku, dva přepínače a klubko drátu. Jak má žárovičku a přepínače zapojit, aby změnou polohy kteréhokoli přepínače žárovička vždy změnila stav mezi svítí/nesvítí? Jak by to bylo, kdyby chtěla Pepička takto zapojit víc než dva přepínače?

Úloha I . 2 ... *plavec v řece* (2 body)

Plavec se snaží přeplavat řeku, v níž teče voda rychlostí $v_\mathrm{r} = 2\,\mathrm{km/h}$. Sám přitom plave rychlostí $1\,\mathrm{m/s}$. Po jaké dráze a jakým směrem musí plavat, aby se nejméně namohl? V jakém místě a za jak dlouho vyplave na druhý břeh? A co aby jeho dráha byla nejkratší?

Úloha I . 3 ... *hustilka* (4 body)

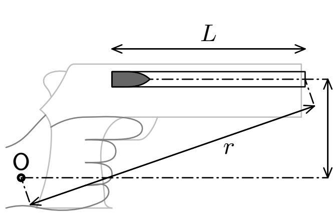
Jakou teplotu má vzduch, který foukáme do duše kola? Duši hustíme na 3 atmosféry, do pumpičky přichází vzduch o teplotě $20\,^\circ\mathrm{C}$.

Úloha I . 4 ... *drrrrr* (4 body)

Mezi dvěma opačně nabitými deskami se sem a tam odráží vodivá kulička zanedbatelných rozměrů. S jakou frekvencí se pohybuje? Napětí mezi deskami je U. Při nárazu se kulička nabije na náboj velikosti Q shodný s polaritou desky. Koeficient restituce je k.
Bonus: Odpovídá výkon na tomto rezistoru energetickým ztrátám při nárazech?
Poznámka: Koeficient restituce je poměr kinetických energií po nárazu a před ním.

Úloha I . 5 ... *zpětný ráz* (4 body)

Při výstřelu z pistole zpětný ráz pistolí trhne a střela vyletí jiným směrem, než kam původně mířila hlaveň. O jak velký úhel se jedná? Uvažujte, že vliv gravitace je po celou dobu výstřelu kompenzován svaly v ruce a bod otáčení je v zápěstí. Znáte moment setrvačnosti pistole s rukou vzhledem k bodu otáčení, hmotnost a úsťovou rychlost projektilu a vzdálenosti popsané v obrázku. Hodnoty těchto veličin můžete zkusit odhadnout a výsledek číselně dopočítat.



Obr. 3. K páté úloze

Úloha I . P ... *zeměkrychle* (5 bodů)

Představte si, že by Země měla tvar krychle. Udržela by si takový tvar? Případně jak asi dlouho by si ho mohla udržet? Na čem by to záviselo? Jak by se na ní žilo? Co by se dělo lidem jdoucím po jejím obvodu – jakou gravitační sílu by pociťovali?

Úloha I . E ... *brumlovo tajemství* (8 bodů)

Změřte co nejvíc (alespoň 3) fyzikálních vlastností a charakteristik želatinových medvídků. Zkoumejte i rozdíly mezi jednotlivými barvami medvídků v pytlíku. Měřit můžete například teplotu tání, Youngův modul pružnosti, mez pevnosti, savost (změna objemu či hmotnosti medvídka po namočení po nějakou dobu), hustotu, vodivost, index lomu, rozpustnost (ve vodě, lihu), změnu některé z předcházejících vlastností při změně teploty či cokoliv jiného vás napadne.

Úloha I . S ... *seriálová* (6 bodů)

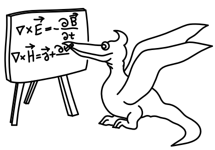
a) Některé hvězdy jsou považovány za obtočné, čili cirkumpolární. Znamená to, že jsou vidět po celý rok? Jaké hvězdy jsou v našich zeměpisných šířkách vidět po celý rok? Jaká souřadnice nám cirkumpolární hvězdy označuje? Jaká je situace u nás, na pólu a na rovníku? Pro ilustraci doporučujeme stáhnout program Stellarium[11], kde si můžete zadat svoji zeměpisnou polohu a podívat se na jednotlivé situace.

b) Srovnejte relativní hvězdné velikosti nejbližší hvězdy α Centauri (7,76 pc daleko, zdánlivá hvězdná velikost $-0{,}01$ mag) a Betelgeuze (α Ori, ~ 200 pc daleko, zdánlivá hvězdná velikost 0,42 mag). Jak by se nám hvězdy jevily, kdyby si vyměnily vzdálenosti? Diskutujte viditelnosti.

c) Transformace a zase transformace. Zkuste si spočítat transformaci mezi galaktickými a ekvatoriálními souřadnicemi II. druhu. Výrazy nemusíte upravovat do verze uvedené v literatuře.

d) Janap má ve zvyku občas se ztratit. Ona za to nemůže, občas se to stane. Tentokrát však s sebou měla theodolit. Zázračnou krabičku, která umí určit výšku hvězd nad obzorem. Změřila si polohy hvězd Arcturus a Capella a zaznamenala přesný čas. Arcturus měl 123,20° v 18:46:30, Capella 113,60° v 19:18:30. Kdepak se Janap nacházela?

Poznámka: Úplný text seriálu bude v brožurce první série, která vyjde na začátku příštího školního roku. Naleznete ji na našem webu `http:/fykos.cz/` společně s dalšími materiály k seriálu, jež budou na adrese `http://fykos.cz/serial`.



Seriál na pokračování

V následujícím ročníku FYKOSího seriálu se budeme věnovat astronomii a astrofyzice. Astronomie je věda stará jako lidstvo samo, v každé kultuře najdete zprávy o lidech, kteří trávili své večery pozorováním nebes, ať už s úmysly náboženskými, vědeckými či čistě romantickými. Až s vynálezem dalekohledu, fotografické emulze a spektrografů se astronomie mohla stát i astrofyzikou, tedy vědou vysvětlující procesy, jež se odehrávají ve hvězdách.

[11] `http://www.stellarium.org/`, licence GNU GPL, takže program je ke stáhnutí zdarma.

Text k 1. sérii najdete brzy na stránkách FYKOSu. Zatím si můžete přečíst ochutnávku, co vás v příštím ročníku čeká. Různé zajímavé materiály k seriálu se budou postupně v průběhu roku objevovat na stránce `www.fykos.cz/serial`.

Básníci říkají, že věda vzala hvězdám krásu, udělala z nich pouhé koule atomárního plynu. I já se mohu podívat na hvězdy za jasné noci. Ale vidím méně nebo více?

Richard Feynman

Díl první se bude věnovat nezbytným souřadnicím aneb co znamenají podivná slova rektascenze a deklinace, k čemu jsou nám divné trojúhelníky a jak se má člověk vyznat ve všech souřadných soustavách.

Druhý díl se koukne na zoubek fyzice aneb jak co nejjednodušeji zjistíme základní informace o tom, co pozorujeme a proč jsou astrofyzici posedlí vyzařováním absolutně černého tělesa. Mimo jiné zkusíme vyšplhat po kosmologickém žebříku.

V třetím díle se vydáme ke hvězdám, dvojhvězdám a podobné zvířeně. Budeme se věnovat Hertzsprungově-Russellově diagramu a hvězdám více či méně exotickým. Krom toho si pokusíme zodpovědět otázku, jak vypadal vesmír kdysi a jak bude vypadat v budoucnosti z hlediska hvězd. A nakonec je necháme vybouchnout.

Čtvrtý díl se bude odehrávat kdysi dávno v jedné galaxii... odpoutáme se od hvězd a podíváme se na zoubek galaxiím. Podíváme se na jejich strukturu, způsoby zkoumání i na tradiční Hubbleovu klasifikaci.

V díle pátém bude částečně pokračovat spanilá jízda galaxiemi a dostane se i na temnou hmotu. Jak vůbec dokázat její existenci, k čemu nám je a co pomohla vysvětlit. A není to vlastně jen prapodivné spiknutí?

Poslední díl bude věnovaný stvoření, čili *velkému třesku* a kosmologii. Zkusíme si dokázat, že velký třesk opravdu nastal a jaké jsou důsledky. Pokud jste si nikdy nezkusili vystavět svůj vlastní vesmír, tak budete mít jedinečnou příležitost.

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail pro řešení: `fykos-solutions@mff.cuni.cz`
e-mail: `fykos@mff.cuni.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.