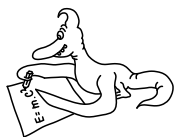


Milí řešitelé!

Do rukou se vám dostává poslední číslo XXV. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře. V této brožurce najdete vzorová řešení úloh poslední série společně se závěrečnou výsledkovou listinou. Naše gratulace patří nejenom těm, kteří se umístili na předních pozicích, ale všem, kdo FYKOS řeší. Vážíme si práce každého řešitele, neboť svým úsilím dokazuje, že má zájem o přírodní vědy.

Tímto také zveme čtvrtáky, kteří jdou studovat na vysokou školu (a nemusí to být nutně MFF UK) do organizátorských řad, pokud mají zájem pomáhat při organizaci FYKOSu.<sup>1</sup> Mladší srdečně zveme do dalšího ročníku, zadání jeho první série naleznete v příloženém letáčku. Také bychom vás všechny chtěli poprosit, abyste informaci o tom, že existuje tak skvělá věc jako FYKOS, šířili dále svým spolužákům, kamarádům a dalším středoškolákům (případně základoškolákům), které by něco takového mohlo zajímat.

*Organizátoři*



## Řešení VI. série

### Úloha VI.1 ... tref svojí družici

2 body; průměr 1,63; řešilo 19 studentů

Máme malý míček o poloměru  $r$  těsně nad míčem o poloměru  $R$ . Nejspodnější bod spodního míče je ve výšce  $h$  nad zemí. Oba míčky pustíme. Do jaké nejvyšší výšky může vystoupit horní míček? Uvažujte, že všechny srážky jsou dokonale pružné. Bez újmy na bodech můžete považovat hmotnost horního míčku za zanedbatelnou.

Bonus Postup zobecněte na  $N$  míčků. (Stále můžete uvažovat, že hmotnost míčku výše je zanedbatelná oproti míčku pod ním.)

*Potrefený Karel.*

Jde o klasickou úlohu řešící srážky tuhých těles. Proto použijeme zákony zachování hybnosti a energie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv'^2, \\ Mv - mv &= Mv_0 + mv', \end{aligned}$$

kde  $v$  značí rychlosti koulí před dopadem,  $v'$  rychlost malé koule po odrazu a  $v_0$  rychlost velké koule po odrazu, rychlosti považujeme za kladné, směřují-li vzhůru. Rovnice můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M(1 + m/M)v^2 &= \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv'^2, \\ M(1 - m/M)v &= Mv_0 + mv'. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme  $v_0 = (1 - m/M)v - m/Mv'$  a dosadíme do první

$$\frac{1}{2}M(1 + m/M)v^2 = \frac{M}{2} \left( (1 - m/M)v - m/Mv' \right)^2 + \frac{1}{2}mv'^2.$$

<sup>1</sup>Jsou různé činnosti, které v průběhu roku organizátoři provádí – zejména vymýšlení a opravování úloh do sérií, příprava a organizace Fyzikální a DSEFu, ale i mnohé další. I pokud nemáte přesnou představu o tom, jak byste mohli FYKOSu pomáhat, ale máte chuť to zkusit, tak se ozvěte Karlovi ([karel@fykos.cz](mailto:karel@fykos.cz)) a určitě se pro vás nějaká práce najde.

Protože se nám odečtou členy nejvyššího řádu tj.  $(M/m)^0$ , musíme ponechat všechny členy úměrné  $m/M$ , ale můžeme zanedbat členy  $(m/M)^2$ . Umocněním a použitím aproximace dostáváme výsledek

$$v' = 3v.$$

Stejného výsledku bychom docílili, pokud bychom si uvědomili, že rychlost malé kuličky vůči velké kuličce v okamžiku odrazu je  $2v$  a tato rychlost pouze změní znaménko, proto je rychlost odrazu  $3v$  vůči zemi.

Protože jsme na počátku uvažovali volný pád, platí  $v = \sqrt{2hg}$  a  $v' = \sqrt{2h'g}$ . Z toho vyplývá, že  $h' = 9h$ , tedy těžiště kuličky vystoupí do devítinásobné výšky měřeno od nejnižší polohy těžiště. Těžiště kuličky proto vystoupí do výšky  $H = 9\sqrt{2hg} + 2R + r$ .

Budeme-li uvažovat  $n$  koulí, tak bude platit  $v_n = 2v_{n-1} + v$ . Dosadíme-li tento rekurentní vztah do sebe, zjistíme, že jde o geometrickou posloupnost s koeficientem  $q = 2$ , jejíž součet je  $v_n = (2^n - 1)v$ . Proto  $n$ -tá kulička se odrazí do výšky  $h_n = (2^n - 1)^2 h$ . Ale k poslednímu odrazu došlo ve výšce odpovídající součtu průměrů kuliček. Proto

$$H_n = (2^n - 1)^2 h + 2(R_1 + R_2 + \dots + R_{n-1} + \frac{1}{2}R_n),$$

kde  $R_n$  je poloměr horního míčku.

*Lukáš Ledvina*

lukasl@fykos.cz

## Úloha VI.2 ... kosmická stanice

2 body; průměr 1,54; řešilo 37 studentů

*Odhadněte, jakou minimální energii musíme dodat kosmické stanici, abychom ji dostali na oběžnou dráhu. Můžete pracovat s hodnotami pro mezinárodní kosmickou stanici ISS, která obíhá Zemi ve výšce cca  $h = 350$  km a má celkovou hmotnost přibližně  $m = 450$  tun. Vysvětlete, proč je odhad minimální a vyjmenujte alespoň některé fyzikální skutečnosti, které vedou k tomu, že je skutečná spotřeba raket významně vyšší.*

*Astrokarel.*

Úplně nejmenší energii bychom museli družici dodat, pokud bychom chtěli, aby pouze chvilkově dosáhla výšky oběžné dráhy. Stačí najít rozdíl potenciální energie mezi místem odpalu (výška  $r$ ) a místem o danou výšku  $h$  nad ním. To umíme, protože známe předpis pro gravitační potenciální energii  $\varphi = -mGM/r$ , takže nám stačí spočítat výsledek vztahu

$$E_p = \varphi r + h - \varphi r = -mGM \left( \frac{1}{r+h} - \frac{1}{r} \right).$$

V celé úloze budeme uvažovat, že startovací rampa je na kulové Zemi o poloměru 6378 km, oběžná dráha je ve výšce 350 km nad Zemí a družice váží 450 t. Tedy úplně nejnižší odhad je  $E_p = 1,46 \cdot 10^{12}$  J.

Nicméně družice vystřelená jen s touto energií by se na orbitě moc dlouho neohrála. Musíme totiž přičíst minimálně ještě takovou energii, která je potřeba na urychlení vynášeného objektu na kruhovou rychlost odpovídající správné výšce. Víme, že dostředivou sílu představuje síla gravitační, tudíž kruhovou rychlost vypočteme z rovnosti

$$\frac{mv^2}{r+h} = \frac{GMm}{(r+h)^2},$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r+h}}.$$

Toto můžeme dosadit do vzorce pro kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2(r+h)},$$

z čehož vyjde výsledek  $E_k = 1,33 \cdot 10^{13}$  J. Odhad tedy upravíme na  $E = 1,48 \cdot 10^{13}$  J. Je vidět, že je mnohem těžší družici urychlit než vystřelit.

Druhý největší vliv na energii potřebnou k úspěšnému vypuštění družice je hmotnost paliva  $m_p$  v raketě. Tu můžeme spočítat z Ciolkovského rovnice jako

$$m_p = m \left( \exp \frac{v}{v_p} - 1 \right),$$

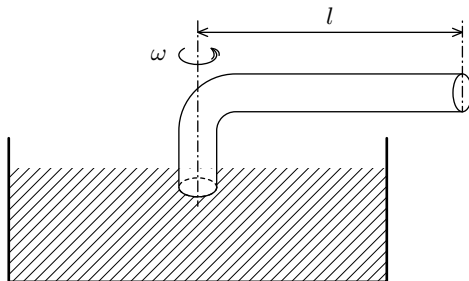
kde  $v_p$  je výtoková rychlost paliva. Pro nehmotnou raketu a typickou  $v_p = 3000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  vychází  $m_p \approx 5000 \text{ t}$ , jejímž urychlením se raketě předá energie asi  $1,6 \cdot 10^{14}$  J, která dosavadní odhady hravě překoná.

Oproti tomu jsou již rozdíly dané hmotnostmi vlastní rakety, potažmo živého nákladu a podobně, opravdu zanedbatelné.

*Aleš Podolník*  
ales@fykos.cz

### Úloha VI.3 ... čerpadlo

4 body; průměr 2,86; řešilo 22 studentů



Obr. 1: Trubice ponořená ve vodě

Mějme zahnutou trubici délky  $l$  plnou vody, jejíž spodní konec je ponořen do nádoby (obrázek 1). Trubicí otočíme jednou za čas  $T$ . Pod jakým tlakem je nasávána voda z nádoby? Viskozitu vody a tlak sloupce vody ve svislé části zanedbejte. *Vyčerpaný Petr.*

Máme trubici délky  $l$ , s plošným prierezom  $S$ , ktorá sa otáča s periódou  $T$ . Uvažujeme, že prúdenie v trubici je ustálené a laminárne bez trenia (nulová viskozita) a voda je nestlačiteľná (nemení hustotu s tlakom). Na prúdenie sa budeme pozerat zo sústavy trubice. Keďže sa rýchlosť (vektor!) každého bodu trubice vzhľadom na zem mení, ide o neinerciálnu sústavu. Preto, ak budeme sa pozerat na systém z pohľadu tejto sústavy, budú sa tu vyskytovať fiktívne sily. Vzdialenosť od osi otáčania označíme  $r$ . V trubici si vyberieme malý element vody v tvare valčeka s plochou podstavy  $S$  a výškou  $dr$ , kde jedna podstava sa bude nachádzať vo vzdialenosti  $r$

od osi otáčania a druhá podstava sa bude nachádzať vo vzdialenosti  $r + dr$  od osi otáčania. Uvažujeme, že priečne rozmery trubice sú oproti pozdĺžnym rozmerom zanedbateľné malé, a teda vzdialenosť všetkých bodov valčeka od osi otáčania bude  $r$ . Keďže ide o ustálené prúdenie, rýchlosť tečenia vody sa s časom nemení, a preto výslednica všetkých síl pôsobiacich na valček je nulová. Na valček pôsobia v smere prúdenia tieto sily:<sup>2</sup>odstredivá sila (sme v neinerciálnej sústave), tlaková sila zozadu a tlaková sila spredu. Keďže všetky sily pôsobia v rovnakom smere môžeme písať skalárne

$$dF = F_p(r) - F_p(r + dr) + \omega^2 r dm.$$

Tlakové sily vyjadríme z tlaku v danom mieste a plochy, na ktorú tlak pôsobí. Hmotnosť valčeka určíme z hustoty vody a objemu valčeka. Uholová rýchlosť otáčania  $\omega$  sa vyjadrí ako uhol otočenia za čas (za jednu periódu to je  $2\pi$  rad). Po dosadení dostávame

$$dF = p(r)S - p(r + dr)S + \frac{4\pi^2 r \rho S}{T^2} dr.$$

Keďže ide o ustálené prúdenie, celková sila  $dF$  je nulová. Môžeme preto písať

$$p(r + dr) - p(r) = dp = \frac{4\pi^2 r \rho}{T^2} dr.$$

Riešením diferenciálnej rovnice separáciou premenných dostávame

$$p(l) - p(0) = \frac{2\pi^2 \rho l^2}{T^2}.$$

Tlak na konci trubice je rovný atmosférickému tlaku  $p_{\text{atm}}$ . Preto tlak, pod ktorým je nasávaná voda, je rozdiel tlaku na hladine vody (atmosférický tlak) a tlaku na osi otáčania ( $r = 0$ ). Môžeme písať

$$\Delta p = p_{\text{atm}} - p(0) = p_{\text{atm}} - p(l) + \frac{2\pi^2 \rho l^2}{T^2} = \frac{2\pi^2 \rho l^2}{T^2}.$$

**Jakub Kocák**  
jakub@fykos.cz

## Úloha VI.4 ... kroule

4 body; průměr 2,91; řešilo 35 studentů

*Jaká část povrchu ledové kry tvaru koule trčí nad hladinu? Hustota ledu je  $917 \text{ kg/m}^3$ , hustota mořské vody  $1025 \text{ kg/m}^3$ .*

*Nadnesla Dominika.*

Hustotu vody označíme  $\rho_V$  a hustotu ľadu  $\rho_L$ . Polomer našej kryhy bude  $r$ , a výška tej časti kryhy (teda výška guľového vrchlíka), ktorá je nad vodou, bude  $h$ . Vzorce pre guľový vrchlík je zaujímavé si odvodiť, no je to tabuľková záležitosť,<sup>3</sup> takže sa nimi nebudeme veľmi zaoberať. Pre povrch kryhy nad vodou platí

$$S_K = 2\pi r h,$$

ako sa môžete presvedčiť napríklad integrovaním cez uhol. Objem tohoto vrchlíka je zase

$$V_K = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h).$$

<sup>2</sup>Na valček vody pôsobia aj sily kolmo na smer prúdenia a to Coriolisová sila a sila od steny trubice, ktorá Coriolisovú silu kompenzuje.

<sup>3</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_cap](http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_cap)

Na kryhu pôsobia pri rovnováhe dve dôležité sily, tiažová a vztlaková, ktorých veľkosti sa rovnajú. Tiažová sila pôsobí na celý objem  $V$ , vztlaková len na ponorený objem  $V - V_K$

$$\begin{aligned}\varrho_L V g &= \varrho_V (V - V_K) g, \\ \frac{\varrho_L}{\varrho_V} \frac{4}{3} \pi r^3 &= \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h), \\ 4 \frac{\varrho_L}{\varrho_V} &= 4 - \frac{h^2}{r^2} \left( 3 - \frac{h}{r} \right).\end{aligned}$$

Po substitúciách

$$\alpha = \frac{h}{r}, \quad \beta = 1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_V}$$

dostaneme kubickú rovnicu pre neznámu  $\alpha$

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\beta = 0.$$

Riešiť takúto rovnicu je možné, no nie je to vôbec jednoduché, čo je aj dôvod, prečo sa to v škole neučí. Jedna z možností je vybrať si jednu z množstva metód numerického odhadu koreňov.

Po vykreslení<sup>4</sup> dostaneme tri reálne korene, pričom jeden je záporný a druhý je väčší ako jedna, čo nie je fyzikálne riešenie. Správny koreň je niekde okolo 0,4, čo sa dá určiť z grafu.

Ak by sme chceli presnejšiu metódu, dobrá voľba je Newtonova metóda dotyčníc.<sup>5</sup> Pre funkciu

$$f(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\beta$$

hľadá koreň tým, že ju aproximuje jej dotyčnicou v bode. Zvolí sa počiatočný odhad koreňa  $\alpha_0$  a iteruje sa podľa predpisu

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)},$$

kde čiarka značí deriváciu funkcie  $f$  (opäť odporúčam vyhľadať a odvodiť si :)). Táto metóda je zvlášť účinná, ak máte pokročilejšiu kalkulačku s tlačítkom ANS. Výraz hore do nej prepíšete a výskyty  $\alpha_n$  nahradíte ANS. V našom prípade by ste po nastavení aktuálneho odhadu zadali výraz

$$\text{ANS} - (\text{ANS}^3 - 3 \times \text{ANS}^2 + 4 \times (1 - 917/1025)) \div (3 \times \text{ANS}^2 - 6 \times \text{ANS}).$$

Stláčaním = potom postupne iterujete až do správneho výsledku, čo je s dostatočnou presnosťou  $\alpha = 0,403$ . Chceme spočítať pomer  $S_K$  ku celkovej ploche kryhy,  $4\pi r^2$

$$\eta = \frac{S_K}{4\pi r^2} = \frac{2\pi r h}{4\pi r^2} = \frac{h}{2r} = \frac{\alpha}{2} \approx 0,2.$$

Z povrchu guľatej kryhy teda vidíme asi jednu pätinu.

**Ján Pulmann**  
janci@fykos.cz

<sup>4</sup><http://www.wolframalpha.com/>

<sup>5</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method)

**Úloha VI.5 ... běh na přednášku z eugeniky** 4 b.; průměr 2,88; řešilo 24 studentů

Aleš sedí pod kopcem u stanu a surfuje na internetu na svém tabletu, když tu si náhle všimne, kolik je hodin, a uvědomí si, že vlastně chtěl jít na přednášku. Už je tak pozdě, že bude muset celou cestu běžet a nebude moct zastavit, ani aby se vydýchal. Proto se samozřejmě okamžitě rozběhne svou maximální běžeckou rychlostí  $v$  do kopce, který má rovnoměrné stoupání  $\alpha$ . Po chvíli (čas  $T$ ) si ale uvědomí, že má v kapse cihlu a že tu cihlu chtěl nechat u stanu. Aleš od sebe umí cihlu hodit jedinečnou rychlostí  $w$ . Pod jakým úhlem má cihlu v tom okamžiku vyhodit, aby dopadla na kamaráda, co si právě sedl na jeho místo? Může se stát, že nedohodí? Aleš je hodně rychlý, a proto neuvažujte jeho reakční dobu a ani dobu, kterou vám zabere řešení úlohy.

*Karel civěl na internet.*

Na začátku sedí Aleš v počátku souřadného systému. Cihlu odhazuje v bodě  $(x_0, y_0) = vT(-\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Alešova rychlost je  $v(-\cos \alpha, \sin \alpha)$  a v jeho souřadném systému bude odhazovat cihlu rychlostí  $w(\cos \beta, \sin \beta)$ . V nehybném souřadném systému bude tedy odhazovat rychlostí

$$(w'_x, w'_y) = (w \cos \beta - v \cos \alpha, w \sin \beta + v \sin \alpha).$$

Trajektorie cihly bude

$$(x, y)(t) = \left(x_0 + w'_x t, y_0 + w'_y t - \frac{1}{2} g t^2\right).$$

Nášim úkolem je vyřešit soustavu rovnic  $(x, y)(t; \alpha, \beta, T, v, w) = 0$  pro neznámé  $t$  a  $\beta$ , zatímco  $\alpha, T, v$  a  $w$  jsou parametry.

Z kvadratické rovnice  $y(t) = 0$  dostaneme

$$t = \frac{w'_y}{g} + \sqrt{\left(\frac{w'_y}{g}\right)^2 + \frac{2y_0}{g}}.$$

Dosazením do  $x(t) = 0$  a rozepsáním  $w'_x$  a  $w'_y$  dojdeme k

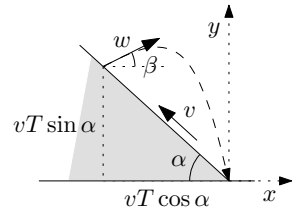
$$-vT \cos \alpha + (w \cos \beta - v \cos \alpha) \left[ \frac{w \sin \beta + v \sin \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{w \sin \beta + v \sin \alpha}{g}\right)^2 + \frac{2vT \sin \alpha}{g}} \right] = 0. \quad (1)$$

Několika algebraickými úpravami a schováním  $v, w, g$  a  $T$  do bezrozměrných  $Q = w/v$  a  $A = gT/v$  dostaneme

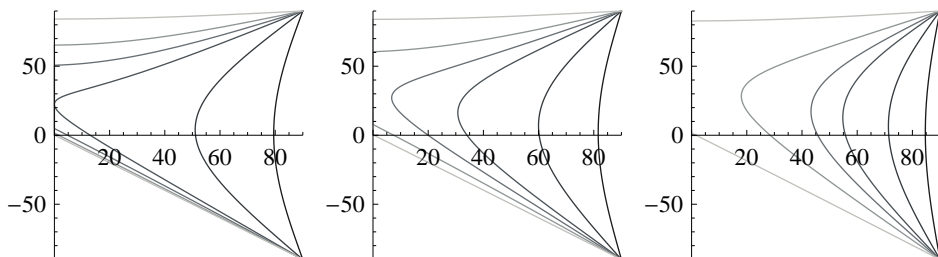
$$A(1 + \cos 2\alpha) + 4Q \sin(\alpha + \beta)(\cos \alpha - Q \cos \beta) = 0.$$

Tato rovnice bohužel vede na kvadratickou rovnici v  $\sin \beta$  (nebo  $\cos \beta$ ), jejíž monstrózní řešení nám neřekne zhola nic, a proto se uchýlíme k numerickému řešení.

Pro tyto účely je dobré se vrátit k rovnici (1), do které jsme ještě nezanесли neekvivalentními úpravami nesprávné řešení. Po chvíli hraní s touto rovnicí v počítači dojdeme k závěru, že dle



očekávání má Aleš buď smůlu a nedohodí, a nebo má na výběr ze dvou různých úhlů  $\beta$ . Taktéž se ukazuje, že pro numerické účely bude vhodnější nehledat  $\beta$  v závislosti na  $\alpha$  (0 nebo 2 řešení), ale raději  $\alpha$  v závislosti na  $\beta$  (0 nebo 1 řešení). Výsledné grafy (už zase jako  $\beta(\alpha)$ ) jsou na obrázku 2.



Obr. 2: Numerické řešení pro  $A = 0,2; 1; 5$  (zleva doprava) a  $Q = 0,2; 0,7; 1,3; 1,7; 2,5; 10$  (od černé k šedé). Na ose  $x$  je úhel  $\alpha$ ; na ose  $y$  úhel  $\beta$ .

Numerické řešení potvrzuje intuici. Pro některé kombinace  $A$  a  $Q$  lze dohodit pod kopec až pro úhly  $\alpha \geq \alpha_{\min}$ , přičemž pro  $\alpha = \alpha_{\min}$  existuje jeden kýžený úhel  $\beta = \beta_{\min}$ , zatímco pro  $\alpha > \alpha_{\min}$  existují dva úhly  $\beta_1 < \beta_{\min} < \beta_2$ . Čím větší  $Q$  (větší  $w$ ), tím menší  $\alpha_{\min}$ . Čím větší  $A$  (delší  $T$ ), tím větší  $\alpha_{\min}$ .

*Jan Hermann*  
honzah@fykos.cz

## Úloha VI.P ... paprsky X

4 body; průměr 2,39; řešilo 23 studentů

*Při prosvěcování prstů silným světlem je možno vidět jednotlivé cévy, ale zbytek tkáně se zdá homogenní. Vysvětlete, proč cévy vidět jsou, zatímco kosti ne.*

*Michal zkoumal ledková světla.*

Světlo se při průchodu tkání rozptyluje – tedy zhruba řečeno, jeho šíření už si nemůžeme představit jako paprsek. Světlo po střetu s částičkou látky pokračuje s určitou pravděpodobností všemi směry. Pokud je překážka, zde v podobě kosti, dostatečně hluboko pod povrchem, stihne se i do míst, která by byla vyplněna stínem (pokud bychom nesprávně použili paprsky – geometrickou optiku) dostat světlo rozptýlené na tkáních okolo. Z vnějšku pak nepoznáme, jak se světlo materiálem šířilo a přijde nám, že přichází i z míst, kde je ve skutečnosti kost, a vzniká tak zdnalivá průhlednost. Pokud překážka dostatečně hluboko není, světlo už se do prostoru za ní rozptýlí „nestihne“. Proto cévy, které jsou pod povrchem z té strany, kterou pozorujeme, už vidíme.

Nejsou ale paprsky X jako paprsky X – jak to, že na rentgenu kosti vidíme? Rentgenové záření je na rozdíl od světla, což je označení pro elektromagnetické záření ve viditelném oboru lidského oka, velmi pronikavé a jen tak něčeho si nevšímá. Tkáněmi prochází téměř jakoby tam nebyly – nerozptyluje se. Kostí už pro rentgen viditelné jsou a stíní. Tentokrát ale stín není přebit rozptýleným světlem, a proto jsou kosti na rentgenu dobře vidět. To je samozřejmě velmi

zjednodušeně řečeno. Existují i sofistikované diagnostické metody měkkých tkání využívající rentgenové či blízké rentgenové oblasti. Pro náš problém však bohatě stačí popsané přiblížení – je to dobrý příklad toho, jak se materiály chovají odlišně pro různé vlnové délky – tento jev nazýváme dispersí.

### *Poznámky k došlým řešením*

Hodně z vás se ve svých řešeních zabývalo původem červeného zbarvení ruky, potažmo krve.

Jedna část řešitelů připisovala červené zbarvení právě dispersnímu chování už ve viditelné oblasti. Příkladem takového jevu, s kterým se denně všichni setkáváme, je obloha – v atmosféře dochází k tzv. Rayleighově rozptylu (rozptyl na částicích podstatně menších než je vlnová délka) – to, „jak moc“ se světlo rozptýlí, je úměrné  $1/\lambda^4$ , proto je obloha modrá a samotný sluneční kotouč dočervena. Jak je to s rukou? Je jedno, jestli budete ruku prosvěcovat modrým ( $\lambda \approx 450$  nm) nebo červeným ( $\lambda \approx 650$  nm) světlem? Jak někteří z vás správně psali, krev je v podstatě koloidní roztok (lépe řečeno koloidní roztok je krevní plasma, z které se krev převážně skládá). Velikost koloidních částic je těžko odhadovat. Faktem je, že podobný efekt jako je Rayleighův rozptyl lze u molekul v lidském těle skutečně pozorovat (melanin v oční duhovce), bývá označován jako Tyndalův efekt. Spolu s Rayleighovým rozptylem jsou speciálními případy Mieho rozptylu. Dominantní roli však tento jev na zbarvení krve nemá.

V dalších řešeních se objevovali názory, že červená barva je zapříčiněná charakteristickými přechody elektronů. S tím by se dalo souhlasit. Nejedná se ale o přechody na atomární úrovni, jak jste občas psali, ale na molekulární. Atomové přechody mají typicky mnohem větší energie (spektrum blíž k rentgenu). Za červené zbarvení může molekula hemoglobin „jak vám řekne většina lidí, aniž by vůbec tušila, jak to ten hemoglobin dělá“. Když si najdete obrázek molekuly hemoglobinu, zjistíte, že železo je vázané uprostřed. Můžeme si to představit tak, že vytvoří takovou „trampolínu“. Na vlastní frekvenci kmitů (frekvenci, na které by kmitala sama o sobě) této „trampolíny“ pak bude molekula absorbovat – tato frekvence je někde v oblasti zelené, proto vidíme doplňkovou červenou. Železo je dvojmocné, což mu umožňuje vázat na sebe kyslík (pak je to oxyhemoglobin). Navázaný kyslík trochu změni vlastní frekvenci, tedy rezonanční frekvenci – proto je oksylčená krev světleji červená než neokysličená.

V pár řešeních se objevil zásadní problém – to, že něco nepropustí světlo, není v žádném případě ekvivalentní s tím, že to není vidět, ba právě naopak! Když mezi sebe a zdroj světla umístíte předmět, který pohltí na něj dopadající světlo, rozhodně poznáte, že tam něco je – uvidíte ten předmět. Naopak, bude-li světlo předmětem procházet, nebude se rozptylovat ani nebude absorbováno, nebude poznat, že nějaká překážka v cestě je – neuvídíme nic. To je základní představa, ze které bylo třeba vyjít a přidat efekt rozptylu. Řešení, kde byla neviditelnost kostí odůvodněna tím, že nic nepropustí, bohužel nemohla být obodována.

*Tereza Steinhartová*  
terkas@fykos.cz

### **Úloha VI.E ... plechová komprese**

7 bodů; průměr 4,64; řešilo 25 studentů

*Skvělý způsob, jak rozdrtit prázdnou plechovku od coly (pokud se vám ji nechce drtit o svou hlavu a vlastně se vám nechce ji vůbec manuálně drtit), je kápnout na dno trochu vody, trochu utěsnit otvor v ní a dát ji na vařič zahřát. Když ji pak rychle ponoříte do studené vody, tak se vám s trochu šikovnosti krásně zdrtí. Vyzkoušejte si to a vyzkoušejte to i bez toho, že by v plechovce byla voda. Vysvětlete, proč to funguje jinak s vodou a bez ní, a zkuste svoji*



plechovku zdrtit na co nejmenší objem vůči původnímu. Ten změřte a popište podmínky, při kterých se vám to podařilo. Pošlete fotky zdrčených plechovek.

Pozor Při děláni pokusu k úloze se nespalte!

*Karel chtěl, aby se účastníci spálili stejně jako on.*

### Teorie

Budeme uvažovat, že vzduch i vodní pára se chovají jako ideální plyn, platí pro ně tedy stavová rovnice ideálního plynu

$$pV = NkT, \quad (2)$$

kde  $p$  je tlak plynu,  $V$  jeho objem,  $N$  počet částic,  $k$  Boltzmannova konstanta a  $T$  termodynamická teplota plynu. Jelikož není otvor v plechovce utěsněn, budeme uvažovat, že tlak plynu v plechovce je konstantní,  $p = 101 \text{ kPa}$ .

Jestliže v plechovce je na začátku experimentu pouze vzduch a je-li objem plechovky  $V_0$  konstantní (její teplotní roztažnost uvažovat nebudeme) a zvyšuje-li se teplota plynu  $T$ , musí se snižovat počet částic v plechovce  $N$ , aby platilo  $NT = \text{konst}$ ; plyn tedy uniká z plechovky ven. V okamžiku, kdy plechovku ponoříme dnem vzhůru do vody, se plechovka rychle ochladí (téměř na teplotu vody  $T_v$ ), a tedy se ochladí i vzduch v ní. Budeme předpokládat, že toto se stane během tak krátkého okamžiku, že se přes ucpaný (avšak ne utěsněný) otvor v plechovce dovnitř nedostane žádná voda. Ze začátku má plechovka stále stejný objem, snižuje se v ní tlak plynu. Jakmile rozdíl tlaků uvnitř a vně plechovky dosáhne určité hodnoty, plechovka se zdeformuje.

V druhém případě dáme do plechovky trochu vody. Plechovku zahřejeme tak, že voda začne vřít, a tedy se přeměňovat ve vodní páru. Hustota vodní páry při atmosferickém tlaku a teplotě varu vody je asi  $\rho_p = 0,60 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Jestliže do plechovky dáme vodu o hmotnosti  $1 \text{ g}$ , vznikne jejím vypařením přibližně  $61$  vodní páry (tedy mnohem větší objem než je objem plechovky), která bude unikat z plechovky nedokonale utěsněným otvorem ven. Kromě vodní páry bude z plechovky unikat i vzduch, který v ní byl na začátku experimentu. Při vypnutí ohřevu pak bude v plechovce voda (jestliže se nestihla všechna vypařit), vodní pára a vzduch. Vzhledem k tomu, že vznikl velký objem vodní páry, která vytlačovala vzduch z plechovky, vzduchu bude v plechovce oproti vodní páře jen malé množství.

V okamžiku, kdy plechovku ponoříme dnem vzhůru do vody, se plechovka opět rychle ochladí (téměř na teplotu vody  $T_v$ ), a tedy se ochladí i zbylá voda, vodní pára a vzduch v ní. Vodní pára začne kondenzovat, čímž (za předpokladu, že její tlak byl atmosferický) sníží svůj objem přibližně  $1600$ -krát. V důsledku toho se tlak zbylého vzduchu v plechovce sníží mnohem více než v případě, kdy v plechovce žádná voda nebyla, deformace plechovky by tedy měla být větší.

### Měření

Pro tento experiment byly použity plechovky od piv Gambrinus a Birell, u kterých je udáván objem  $0,33 \text{ ml}$ .

Pro zjištění objemu plechovky (nezdeformované i zdeformované) bylo použito měření hmotnosti plechovky naplněné vodou. Plechovka byla ponořena do vody a několikrát otočena, aby z ní unikl veškerý vzduch. Poté položena včetně vody na kuchyňskou váhu. Od změřené hmotnosti byla odečtena hmotnost prázdné plechovky  $m_0$ , zjistili jsme tedy hmotnost  $m_v$  vody

v plechovce. Jelikož hustota vody byla konstantní, poměr objemu zdeformované a nezdeformované plechovky byl stejný jako poměr hmotnosti vody ve zdeformované a ve nezdeformované plechovce.

Ohřev plechovek probíhal nad nejmenším hořákem sporáku, přičemž bylo třeba plechovku držet mírně nad plamenem, jelikož zápach hořícího nátěru plechovky není zrovna příjemný. Do plechovky bylo nejdříve nalito malé množství vody, plechovka s vodou byla dále zvážena a následně byl její otvor trochu utěsněn papírovou utěrkou. Ohřev probíhal v případě plechovek naplněných vodou tak dlouho, dokud nebyla nad plechovkou pozorovatelná unikající vodní pára. Plechovka bez vody byla ohřívána přibližně stejnou dobu jako plechovka s nejmenším množstvím vody. Poté byla plechovka rychle dnem vzhůru přemístěna do dřezu naplněného vodou o přibližně pokojové teplotě. Nakonec byla zdeformovaná plechovka naplněna vodou a určena její hmotnost.

Celkem bylo zdeformováno devět plechovek. Naměřené poměry objemů zdeformovaných a nezdeformovaných plechovek v závislosti na hmotnosti vody, kterou jsme do plechovky přidali, uvádíme v grafu 4. Fotografie některých zdeformovaných plechovek jsou na obrázku 3.

Dále byla pro zpracování změřena hmotnost prázdné plechovky  $m_0 = (12 \pm 1)$  g a hmotnost plechovky naplněné vodou  $m_p = (370 \pm 1)$  g.



Obr. 3: Zdeformované plechovky

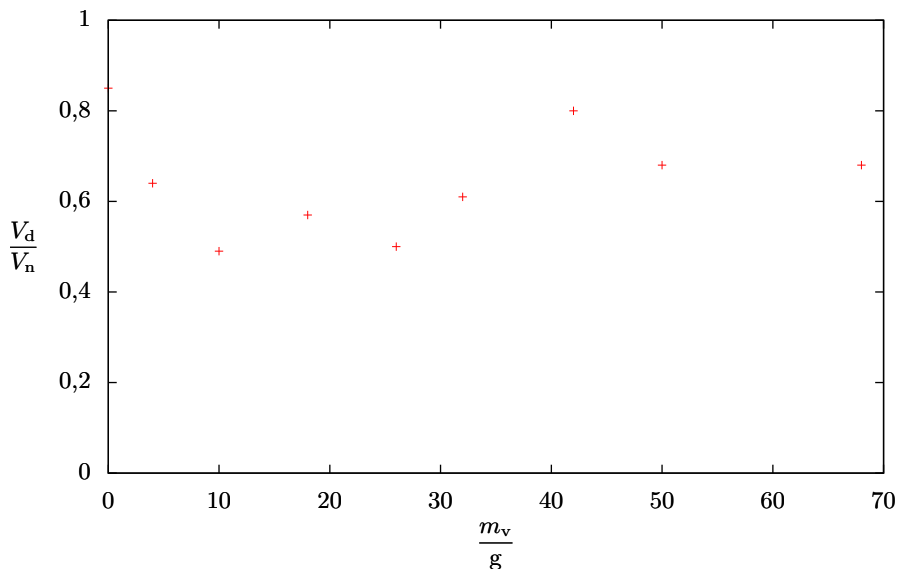
### Nejistoty měření

Použitá kuchyňská váha vážila s přesností na 1 g, nicméně nejistota hmotnosti vody v plechovce byla vyšší z toho důvodu, že i přes otáčení plechovky je možné, že v ní stále zůstal nějaký vzduch, naopak vymořená plechovka z vody byla mokrá a před položením na váhu byla osušena pouze málo, proto je možné, že se na váhu dostalo více vody, než bylo uvnitř plechovky.

Celé měření nebylo z důvodu nedostatku plechovek opakováno, nicméně dle pozorování je opakovatelnost měření velmi špatná, a tedy nejistoty naměřených hodnot velké. Například doba ohřevu by se i v případě stejného množství vody v plechovce značně lišila, jelikož závisela na výkonu ohřevu (sporák byl mezi jednotlivými měřeními z bezpečnostních důvodů vypnut a u použitého typu nelze zaručit nastavení stejného výkonu) a také od schopnosti pozorovatele rozeznat vodní páru vycházející z plechovky. Nicméně i přes tyto nejistoty se podařilo prokázat, že objem, na který se plechovka zdrtí, závisí na množství vody, které do ní vložíme.

### Interpretace naměřených hodnot

Z naměřených hodnot je patrné, že nejméně se plechovka zdeformuje v případě, že v ní není žádná voda. V tom případě je v plechovce pouze vzduch, jehož objem se po ochlazení zmenší méně, než se změní objem vodní páry v případě kondenzace na vodu.



Obr. 4: Graf naměřené závislosti poměru objemu deformované a nedeformované plechovky na hmotnosti vody v ní

Nejvíce se plechovka zdeformovala v případě malé hmotnosti vody v ní. V tomto případě se během ohřevu velká část vody vypařila, přičemž v plechovce vzrostl tlak. Jelikož otvor v plechovce nebyl utěsněn, vodní pára spolu se vzduchem unikala z plechovky. Poměr objemu vodní páry a objemu vzduchu v plechovce tímto rostl, takže při vypnutí ohřevu byl v plechovce jen malý objem vzduchu, ale velký objem vodní páry. Při ochlazení pak vodní pára zkondenzovala, čímž se její objem několikanásobně zmenšil. Jelikož se otvor plechovky nacházel ve vodě, tlak uvnitř plechovky se rychle snížil a plechovka se zdeformovala.

Pokud jsme do plechovky přidali více vody, ne všechna se stihla během ohřevu vypařit. Při ponoření plechovky do vody tedy se v plechovce nacházela horká kapalná voda, vodní pára a vzduch. V tomto případě se tedy teplo uvolňovalo i kvůli ochlazení kapalné vody, a tedy ochlazení bylo pozvolnější. Z toho důvodu se plechovka zdeformovala méně.

Výsledky experimentu budou záviset mimo jiné i na způsobu utěsnění otvoru v plechovce. V našem případě byl u všech plechovek otvor utěsněn stejným způsobem.

### Závěr

Suchá plechovka se zdrtila asi na 80 % svého původního objemu. Nejvíce se plechovka zdeformovala v případě, že v ní bylo jen několik gramů vody. V tom případě se plechovku podařilo zdrtit přibližně na poloviční objem.

**Tomáš Pikálek**  
pikos@fykos.cz

## Úloha VI.S ... seriálová

6 bodů; průměr 2,39; řešilo 23 studentů

- a) Vyděte z Newtonova modelu vesmíru odvozeného v seriálu. Pro  $E = 0$  vyřešte případ, kdy se vesmír rozpíná a hustota energie vakua se nemění. Odhadněte, jaká je na základě tohoto modelu budoucnost vesmíru.
- b) Pokud je vesmír plný hvězd, jistě k nám dřív nebo později dorazí světlo z každé hvězdy. Jak je možné, že je i přesto v noci tma? Zdůvodnění zkuste podpořit i kvantitativními odhady.
- c) V seriálu je uvedeno, jak odvodit existenci temné hmoty na kupě galaxií pomocí poměrně jednoduchého modelu. Zkuste navrhnout další způsob, jak dokázat existenci temné hmoty v kupách galaxií. Není třeba nutně podpořit výpočtem, stačí jednoduchý návrh.

Janapka.

$$E = 0$$

Vydeme z obdobného výpočtu, který byl uveden v textu seriálu, ale jako podmínky vezme-me  $\varrho = \varrho_0$  a  $M = M_0 R^3$ . Pro rozpínající vesmír tak bude platit, že síla na jednotku hmotnosti bude úměrná  $R$ :

$$\frac{3\dot{R}^2}{8\pi G R^2} = \varrho = \varrho_0,$$

$$\frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{8G\pi\varrho_0}{3}} = H_0.$$

Vyřešíme metodou separace proměnných

$$\frac{dR}{R} = H_0 dt,$$

$$\ln R = H_0 t,$$

$$R = e^{H_0 t}.$$

Potom můžeme napsat

$$\varrho = \varrho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G},$$

$$H = H_0,$$

$$q = -\frac{R\ddot{R}}{R^2} = -1.$$

Co takový výsledek v praxi bude znamenat? Vesmír by neprošel Velkým Třeskem, ale prošel by fází rychlého rozepnutí, inflace. Stejně tak by se dalo říct, že by se nadále rozpínal. Na rozdíl od případu v textu seriálu je tento model aplikovatelný i na větší vzdálenosti. Stran budoucnosti vesmíru naznačuje, že vesmír se bude rozpínat nade všechny meze, jinak řečeno jeho rozpínání se nijak nezbrzdí a bude se rozpínat donekonečna.

### *Tmavé noci*

Formulace tohoto problému je ve skutečnosti formulace paradoxu tmavé oblohy, na který jsme narazili už v minulé sérii. Paradox říká, že pokud je vesmír nekonečně velký, muselo by naše nebe být pokryto miliardami hvězd a obloha by vlastně i v noci zářila podobně jako ve dne. Kde je problém? Samozřejmě prvotně v tom, že hvězdy nejsou natolik výkonné, aby osvětlily tmavý vesmír. Zároveň musíme brát v úvahu i fakt, že vesmír se rozpíná a cokoli se pohybuje od nás, vykazuje posun do dlouhovlnné části spektra. Hvězdy tak vlastně ani nemají šanci k nám dosvítit.

Stranou této úvahy je třeba si uvědomit, že hvězdy vnímáme jako zářící body a ne jako koučky. Hrubým odhadem hvězdy překrývají řádově  $10^{-13}$  výměry oblohy. A to bereme v úvahu pouze hvězdy z naší galaxie. Pro extragalaktické objekty to bude výměra ještě menší. Zkusme se zajímat třeba čistě o to, jak by musela vypadat naše Galaxie, aby obloha byla jasná i v noci. Nejprve by musela mít  $10^{13}$ -krát více hvězd. To je samo o sobě trochu těžké splnit. Dále, kdybychom vzali v úvahu to, že vesmír má nějaké stáří a zajímali se nejenom o naši Galaxii, tak bychom museli nutně dojít k tomu, že světlo z hvězd musí mít čas k nám dojít. To by ale znamenalo, že nejstarší hvězdy by musely být staré alespoň  $10^{10}$  let. K tak dlouhému vyzářování samozřejmě nemají energii, a to ani za předpokladu, že by se celá hmota hvězdy kompletně změnila na fotony, což, jak víme, je fyzikálně nemožné.

Z jednoduchých úvah tedy vyplývá, že hlavním důvodem je nedostatečný energetický výkon a krátký život hvězd vzhledem ke stáří a velikosti vesmíru.

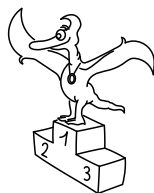
### *Tmavá hmota*

Nepřímo lze existenci temné hmoty dokázat poměrně prostým způsobem. Určením hmotnosti kupy galaxií, která neodpovídá tomu, co bychom očekávali z pozorování viditelné hmoty. Určit hmotnost kupy galaxií je docela nesnadný úkol. Určování pomocí luminosit a rotačních křivek je v tomto případě nepoužitelné. V seriálu byl uveden jeden z poměrně spolehlivých způsobů, a to využití viriálového teorému.

Další z metod je například gravitační čočkování. Kupa galaxií může sloužit jako docela slušná čočka, problém je samozřejmě s tím, že se musíme trefit do takové kupy galaxií, za kterou se ukrývají jasné objekty, jejichž světlo bude přes kupu galaxií ohnuto. Nicméně vzhledem k tomu, že kupy galaxií jsou poměrně běžné, je vysoká pravděpodobnost, že se člověk trefí a za kupou bude skrytý nějaký jasný objekt, jehož světlo bude čočkováno. Čočkování objekt je hmotnou kupou galaxií zdeformován a podle míry deformace lze zkonstruovat rozložení hmoty a odhadnout hmotnost celé kupy galaxie. Čočkování jasně ukazuje, že kupy jsou mnohem hmotnější než viditelná hmota a musí tedy obsahovat pro nás neviditelnou temnou hmotu.

Další přístup by mohl být ryze statistický. Ten předpovídá, že ze statistického postupu bychom měli očekávat existenci mnohem méně kup galaxií, než pozorujeme. Náhodně rozmístěné galaxie totiž nemají tendenci mezi sebou interagovat, pokud se nedostanou dostatečně blízko k sobě, aby se gravitačně ovlivňovaly. Pozorovaná hmota galaxií by jednoduše byla příliš malá na to, aby galaxie někdy nějakou kupu zformovaly. Samotné galaxie, ze kterých je kupa tvořena, tedy musí být hmotnější, než se nám na první pohled zdá. Dalším dobrým, staticky doložitelným argumentem, je rozložení galaxií v samotných kupách. Vypadá to, že kupy galaxií jsou velmi rozlehlé, což by v případě nízké hmotnosti kupy a potažmo galaxií nebylo možné.

*Jana Poledníková*  
janap@fykos.cz



## Konečné pořadí řešitelů XXV. ročníku



Z prostorových důvodů jsou dlouhé výsledkovky druhých a třetích ročníků zkráceny na řešitele s alespoň dvaceti body. Úplné výsledky jsou na webu.

### Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student</i>	Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ	
			2	2	4	4	4	4	4	7	4	31	100	206
1.	<i>Lucie Fořtová</i>	G P. de Coubertina, Tábor	6	4	4	4	4	4	4	4	4	34	78	148
2.	<i>Jozef Bucko</i>	G, Námestie SNP, Piešťany	6	2	3	2	2	1	6	1		23	65	130
3.	<i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	6	2	2	4	3	4	5	4		30	68	129
4.	<i>Martin Kihoulou</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	2	0	1	-	4	7	4		20	61	122
5.	<i>Dalimil Ševčík</i>	G, Vyškov	2	2	4	2	3	3	5	3		24	62	121
6.	<i>Eva Miklušová</i>	G J. Škody, Přerov	-	4	1	1	-	0	-	0		6	58	96
7.	<i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	0	4	-	4	2	1	-	1		12	59	95
8.	<i>Petr Smášíel</i>	G, Bučovice	-	4	3	2	-	-	-	-		9	88	52
9.	<i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	-	0	-	-	-	-	4	-		4	41	47
10.	<i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	-	2	-	2	-	1	-	1		6	53	46
11.	<i>Andrej Fúsek</i>	SPŠ Dubnica nad Váhom	-	-	-	-	-	-	-	-		-	54	45
12.	<i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2	4	-	-	3	2	2	2		15	56	42
13.	<i>Jan Marek</i>	G Zábřeh	-	-	-	2	-	-	4	-		6	49	39
14.	<i>Zdeněk Turek</i>	G a SOŠ, Rokycany	-	4	-	-	3	-	-	-		7	59	37
15.	<i>Václav Kytka</i>	Kř.G, Kozinova, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-		-	45	32
16.	<i>Martin Vančura</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-		-	76	26
17.	<i>Ondřej Poláček</i>	ZŠ, Žerotínova	-	-	-	-	-	-	-	-		-	72	23
18.	<i>Benedikt Petko</i>	G Matyáše Lercha, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-		-	38	19
19.	<i>Petr Turnovec</i>	SOŠ a SOU, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	-		-	53	17
20.	<i>Jan Soukup</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	-	-	-	-	-	-	-	-		-	44	15
21.-23.	<i>Eva Harlenderová</i>	Slovanské G, Olomouc	-	-	-	-	-	-	-	-		-	44	12
21.-23.	<i>Alena Píkousová</i>	G, Jírovцова, České Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-		-	39	12
21.-23.	<i>Vojtěch Tázlar</i>	G, Nová Paka	-	-	-	-	-	-	-	-		-	57	12
24.-25.	<i>Václav Steinhäuser</i>	ZŠ, Vrané n. Vltavou	-	-	-	-	-	-	-	-		-	59	10
24.-25.	<i>Štěpán Štěpán</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-		-	77	10
26.	<i>Tomáš Gajdůšek</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	-		-	45	9
27.	<i>Vladislav Wohlrath</i>	G a SOŠ, Rokycany	-	-	-	-	-	-	-	-		-	100	8
28.	<i>Jakub Doubrava</i>	První české G, Karlovy Vary	-	-	-	-	-	-	-	-		-	58	7
29.	<i>Jaroslav Janoš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	-	-	-	-	-	-	-	-		-	100	4
30.-31.	<i>Vjačeslav Horbač</i>	G a SOŠPg, Jer., Liberec	-	-	-	-	-	-	-	-		-	50	2
30.-31.	<i>Zuzana Viceníková</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	-		-	25	2
32.-33.	<i>Filip Šmejkal</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	-		-	0	0
32.-33.	<i>Gabriela Šmejkalová</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	-		-	0	0

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK									
		2	2	4	4	4	4	7	4	31	100	206
1. Patrik Turzák	G Poštová, Košice	6	4	4	4	4	3	7	3	35	87	181
2. Tomáš Zahradník	Gymnázium Oty Pavla, Praha	2	4	4	4	2	1	5	1	23	65	133
3. Jakub Kvorka	G, Školská, Dubnica n/Váhom	6	2	4	4	3	-	2	-	21	60	123
4. Jiří Guth	G, Jírovцова, České Budějovice	2	2	3	4	3	3	5	3	25	73	99
5. Viktor Skoupý	G, Moravská Třebová	-	-	4	4	3	-	-	-	11	68	77
6. Markéta Vohníková	PORG, Praha	-	4	-	-	2	-	-	-	6	62	71
7. Radka Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava-Por.	-	2	-	2	2	-	4	-	10	66	70
8. Lucie Valentová	G, Boskovice	-	4	-	1	2	0	5	0	12	49	58
9. Daniel Slezák	Svobodná chebská škola, Cheb	-	4	-	1	-	4	-	4	13	47	55
10. Jaroslav Hofierka	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	54
11. Matěj Bidlák	G Luďka Pika, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	88	52
12. Josef Koláčný	G, Nymburk	-	4	-	2	-	-	7	-	13	70	50
13.-14. Jan Studený	G J. Škody, Přerov	-	4	-	-	-	-	-	-	-	48	47
13.-14. Matouš Zavřel	Kř. G, Kozinova, Praha	-	4	-	1	-	-	3	-	8	48	47
15. Patrik Štefek	Matiční G, Ostrava	-	4	-	-	-	-	3	-	7	47	35
16. Matěj Tomešek	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	33
17.-19. Petr Kovář	Matiční G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	29	32
17.-19. Adam Práda	G, Ostrov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	65	32
17.-19. Martin Wirth	První české G, Karlovy Vary	-	2	-	-	3	-	-	-	5	82	32
20. Emíl Skříšovský	G, Česká, České Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	31
21. Martin Raszyk	G, Karviná	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	25
22. Tomáš Kořínek	G, Žamberk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	59	24
23. Jan Bukáček	Matiční G, Ostrava	-	2	1	-	-	-	-	-	3	48	22
24. Soňa Ondrušová	G, Ostrov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	20

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK									
		2	2	4	4	4	4	7	4	31	100	206
1. Lukáš Timko	G P. de Coubertina, Tábor	0	2	4	4	4	4	4	4	26	81	139
2. Filip Murár	G, Masarykovo nám., Třebíč	3	2	2	4	3	4	7	4	29	80	126
3. Miroslav Hanzelka	G, Česká Lípa	3	2	1	4	4	2	7	2	25	74	118
4. Jaroslav Průcha	G, Strakonice	0	1	2	2	2	0	5	0	12	54	103
5. Kristýna Kohoutová	G, Žamberk	-	1	-	2	-	1	-	1	5	70	89
6. Veronika Dočkalová	G, Elgartova, Brno	-	2	-	4	3	-	6	-	15	80	85
7.-8. David Hruška	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	0	1	4	4	4	-	-	-	13	82	73
7.-8. Michal Nožička	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	1	2	4	4	3	4	-	4	22	81	73
9. Jakub Doležal	G, Špitálská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	71
10. Jozef Kašćák	G dukl. hrdinův, Svidník	-	-	-	-	-	-	-	-	-	49	65
11. Albert Štěřba	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	1	1	2	2	-	4	-	4	14	50	62
12. Michal Červenák	G Púchov	-	-	-	2	-	-	-	-	2	62	56
13. Lukáš Fusek	G, Uherské Hradiště	-	-	-	4	2	-	3	-	9	56	51
14. Jakub Cimerman	G Tajovského, B. Bystrica	-	2	-	4	-	-	-	-	6	64	49
15. Martin Adamec	G Tajovského, B. Bystrica	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53	48
16. Lubomír Grund	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	35
17. Vít Nosek	G a SOŠ, Hořice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	24
18. Tereza Uhlířová	G, Omská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	54	22

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
		2	2	4	4	4	4	7	4	31	100	206
1. Patrik Švančara	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	4	–	–	–	–	7	94	151
2. Tomáš Bárta	G, Nad Štolou Praha	–	2	4	3	–	–	–	–	9	74	70
3. Jakub Kubečka	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	67
4. Radomír Gajdošoci	G, P. Horova, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	61
5. Ekaterína Berestneva	–	–	1	3	4	–	1	1	1	11	41	45
6. Daniel Hnyk	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	40
7. Kristína Nešporová	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	39
8.–9. Ivo Vinklárek	G, Rožnov p. Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	26
8.–9. Jiří Záhora	G B. Němcové, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	26
10. Tomáš Hadáček	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	20
11. Petr Dobiáš	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	18
12. Milan Mikuš	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	16
13. Daniela Fecková	G, Pankúchova, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	14
14. Stanislav Fořt	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	93	13
15. Alena Harlenderová	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	11
16. Jan Tofel	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	10
17. Lucia Filová	Hotelová akadémia, Brezno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	1
18. Pham The Huynh Duc	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0




FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)FYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.