

Úloha I.4 ... drrrrr

4 body; průměr 2,30; řešilo 27 studentů

Mezi dvěma opačně nabitými deskami se sem a tam odráží vodivá kulička zanedbatelných rozměrů. S jakou frekvencí se pohybuje? Napětí mezi deskami je U . Při nárazu se kulička nabije na náboj velikosti Q shodný s polaritou desky. Koeficient restituice je k .

Bonus: Odpovídá výkon na tomto rezistoru energetickým ztrátám při nárazech?

Poznámka: Koeficient restituice je poměr kinetických energií po nárazu a před ním.

Jáchym hodil do stroje kuličku.

Keďže sa guľôčka nabije na náboj rovnakej polaroty ako doska, do ktorej narazí, po každom náraze je naďalej urýchľovaná elektrickým poľom. Takto ale nezískava energiu neustále, po zopár nárazoch sa jej pohyb stane takmer periodický. Guľka totiž pri náraze stráca energiu, a hodnota tejto energie závisí od rýchlosti. Čím ide rýchlejšie, tým má väčšiu kinetickú energiu, a teda aj o viac energie príde. Takto bude získavať energiu z potenciálového rozdielu a zrýchľovať, až pokiaľ sa nedostane do ustáleného stavu, v ktorom pri zrážke stratí rovnakú energiu, akú získa pri prechode medzi doskami. Na rovnakej rýchlosti by sa ustálila aj v prípade, ak by najprv išla prirýchlo.

Označíme si rýchlosť tesne pred dopadom v a po odraze u . Koeficient restituície je definovaný ako

$$k = \frac{\frac{1}{2}mu^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{u^2}{v^2}.$$

Teraz vieme vypočítať ustálenú rýchlosť, napríklad tú pred dopadom

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = UQ.$$

Čo vyjadruje, že guľôčka získa na napätí rovnakú energiu, akú stratí pri náraze. Rýchlosť v už len vyjadríme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2(1 - k) &= UQ \\ v &= \sqrt{\frac{2UQ}{m(1 - k)}}. \end{aligned}$$

Ako vyzerá pohyb medzi doskami? Ak sú tieto dosky dostatočne veľké v porovnaní s medzerou medzi nimi, tak môžeme elektrické pole považovať za homogénne, a takéto pole pôsobí na guľôčku konštantnou silou. Pohyb je teda jednoducho rovnomerne zrýchlený. Ak si označíme vzdialenosť dosiek d , a uvedomíme si, že priemerná rýchlosť je aritmetický priemer u a v (je to kvôli konštantnému zrýchleniu, premyslite si!), čas prechodu medzi doskami bude

$$t = \frac{d}{(u + v)/2} = \frac{2d}{u + v}.$$

Frekvencia je obrátená hodnota periódy, a v našom prípade perióda zahŕňa pohyb tam a späť, teda je dvojnásobok času t .

$$f = \frac{1}{2t} = \frac{u + v}{4d}$$

Teraz už len dosadíme za rýchlosť

$$f = \frac{1 + \sqrt{k}}{4d} v = \frac{1 + \sqrt{k}}{4d} \sqrt{\frac{2UQ}{m(1-k)}} = \sqrt{\frac{UQ}{8md^2} \left(\frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right)}.$$

Tu síce vystupujú parametre, ktoré neboli v zadaní, no jednoduchou úvahou zistíme, že tam skutočne majú byť, a nedajú sa vyjadriť. Obe veličiny, hmotnosť aj vzdialenosť dosiek, vieme meniť nezávisle od zvyšných zadaných parametrov, takže vieme vyrobiť dve situácie, ktoré sa líšia len napr. hmotnosťou guľôčky, ktorá teda nemôže byť kombináciou už zadaných veličín ako napätie, prenášaný náboj či koeficient reštitúcie.

V bonuse určite zanedbáme všetky straty energie okrem tých, ktoré nastávajú pri zrážke, kvôli koeficientu reštitúcie. Tu potom jasne vidíme, že výkon, ktorý dodáva zdroj poskytujúci napätie U , sa mení len na stratový výkon pri nárazoch. Presvedčiť sa o tom dá aj priamo počítaním týchto dvoch výkonov, všetko potrebné už máme vyjadrené. Stačí len náboj prenesený za čas t (takto totiž vyzerá definícia prúdu) vynásobiť napätím U , a tento výkon porovnať so stratou kinetickej energie pri jednom náraze delenou časom t , aby sme opäť dostali výkon (čo, ako si môžeme všimnúť, je nakoniec len rovnica vyjadrujúca rovnosť získanej a stratenej energie, z ktorej sme vychádzali na začiatku).

Vidíme teda, že ak si všimame len vonkajší výkon a prúd, správa sa takýto rezistor ako skutočný odpor. Skôr ako však bežíme na patentový úrad, mali by sme si so sklamaním všimnúť, že jeho voltampérová charakteristika nie je priamka. Prúd $I = Q/t = Qf$ závisí od napätia nie lineárne, ako by sa na správny rezistor patrilo, ale komplikovanejšie, kvôli čomu klesá odpor s druhou odmocninou napätia. Analógia so skutočným rezistorom je teda možná len čiastočne.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.