Úloha IV.5 ... únik plynu

4 body; průměr 1,60; řešilo 15 studentů

Spočtěte, kolik procent své hmotnosti za rok ztratí zemská atmosféra, pokud uvážíte, že končí 10 km nad zemí, po celé své výšce má konstantní tlak (stejný jako u hladiny moře), je tvořena ideálním plynem o teplotě 300 K, splňuje Maxwellovo rychlostní rozdělení a gravitace se v jejím objemu nijak neprojevuje. *Aleše napadlo při úniku.*

Tato úloha byla zaměřena mimo jiné na to, jak si dokážete najít správný vztah na internetu, protože většina jich nemusí být středoškolskou fyzikou odvoditelných.

Popišme nejdřív model, který jsme si představovali, že použijete. Máme Zemi, která je dokonalá koule o známém poloměru, nerotuje, atmosféra se vyskytuje jen v mezikoulí o výšce 10 km. To, kolik částic uteče, zjistíme tak, že vezmeme všechny ty, které narazí na horní okraj atmosféry a z nich vybereme ty, které mají rychlost větší než únikovou, a ostatní necháme odrazit zpátky. Teplota budiž 300 K a tlak 101,3 kPa.

Začneme od únikové rychlosti. Aby těleso uniklo z dosahu centrálního gravitačního pole, musíme mu udělit takovou rychlost, že v žádné konečné vzdálenosti od středu nezastaví, resp. že se zastaví až v nekonečné vzdálenosti. Známe předpis pro gravitační potenciál $V = -GM/r$ a kinetickou energii $E_\mathrm{k} = mv^2/2$. Tedy chceme, aby součet potenciální a kinetické energie na určitém poloměru R byl nula. Energetický příspěvek od potenciálu je v nekonečnu nulový z definice, kinetickou energii tam chceme mít nulovou, jinak bychom nenašli minimální takovou rychlost. Zapíšeme-li tuto úvahu, dostaneme

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{u}^2 = 0\,,$$

z čehož plyne, že rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole je

$$v \;=\sqrt{\frac{2GM}{R}}\,.$$

Což pro zadanou hodnotu 6388 km je přibližně $v_\mathrm{u} = 11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Druhá věc je určit, kolik částic vzduchu dopadne za jednotku času na povrch vymezený koulí o poloměru 6388 km. Odvozením se tady zdržovat nebudeme, ale v literatuře[1] zjistíme, že počet dopadů na jednotku plochy za jednotku času je

$$f = \frac{1}{4}n\overline{v}\,,$$

kde n je hustota plynu v částicích na m^3 a $\overline{v}$ střední rychlost molekul plynu definovaná jako $\overline{v} = \sqrt{8k_\mathrm{B}T/(\pi m_\mathrm{m})}$ (k_B je tzv. Boltzmannova konstanta, T termodynamická teplota plynu) a m_m v obou případech hmotnost molekuly plynu, kterou pro vzduch spočteme, jako průměr hmotností jednotlivých složek vážený jejich zastoupením, tj. $m_\mathrm{m} = 28{,}97m_\mathrm{u}$, přičemž m_u je atomová hmotnostní jednotka. Ze stavové rovnice víme, že

$$p = nk_\mathrm{B}T\,,$$

takže budeme umět dosadit za n, tedy frekvence nárazů je pro určitou teplotu T a tlak p rovna

$$f = \frac{p}{\sqrt{2\pi m_\mathrm{m}k_\mathrm{B}T}}\,.$$

[1] `http://www.chem.arizona.edu/~salzmanr/480a/480ants/collsurf/collsurf.html`

Nakonec potřebujeme zjistit, kolik molekul ve vzduchu má rychlost větší než ona úniková rychlost v_u. Pro tento účel si najdeme tzv. *kumulativní distribuční funkci* Maxwellova rozdělení (erf), kterému, jak bylo v zadání uvedeno, podléhají molekuly plynu. Tato funkce určuje, kolik molekul plynu má rychlost nižší než zkoumaná rychlost.

$$c(v) = \mathrm{erf}\left(v\sqrt{\frac{2}{A}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{v\exp\left(-v^2/(2A)\right)}{\sqrt{A}}\,,$$

kde $A = k_\mathrm{B}T/m_\mathrm{m}$, další konstanty a parametry popsané v tomto vzorci známe již z dřívějška. Poměrný počet částic, které mají rychlost větší než úniková rychlost v_u, pak zjistíme jednoduše jako $\eta = 1 - c(v_\mathrm{u})$.

Teď už jen musíme dát výsledky dohromady. Stačí, když frekvenci srážek s horním okrajem modelové atmosféry přenásobíme jeho plochou S a dobou t, po kterou je tam necháme dopadat. Nakonec vezmeme v úvahu podmínku na únik z atmosféry. Protože počítáme v jednotkách částic, musíme pak výsledek přenásobit hmotností molekuly. Výsledek tedy bude

$$m = m_\mathrm{m} f t S \eta\,.$$

A co číselně? Dá se tušit, že částic, které budou rychlejší než úniková rychlost, bude poměrně málo a proto bude dobré využít např. Wolfram Alpha[2], který umí počítat s libovolnou přesností. I tak je dobré si jednotlivé části vzorce spočítat zvlášť. Tak třeba zjistíme, že na horní okraj atmosféry dopadne $6{,}6 \cdot 10^{49}$ částic za rok. Nicméně koeficient η, který udává poměr prošlých a odražených zpátky, se od nuly liší až na 318. desetinném místě. V rámci tohoto modelu tedy z atmosféry neuniká nic.

Aleš Podolník
`ales@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.

[2] `http://www.wolframalpha.com/`