Úloha VI.5 ... běh na přednášku z eugeniky

4 body; průměr 2,88; řešilo 24 studentů

Aleš sedí pod kopcem u stanu a surfuje na internetu na svém tabletu, když tu si náhle všimne, kolik je hodin, a uvědomí si, že vlastně chtěl jít na přednášku. Už je tak pozdě, že bude muset celou cestu běžet a nebude moct zastavit, ani aby se vydýchal. Proto se samozřejmě okamžitě rozběhne svou maximální běžeckou rychlostí v do kopce, který má rovnoměrné stoupání α. Po chvíli (čas T) si ale uvědomí, že má v kapse cihlu a že tu cihlu chtěl nechat u stanu. Aleš od sebe umí cihlu hodit jedině rychlostí w. Pod jakým úhlem má cihlu v tom okamžiku vyhodit, aby dopadla na kamaráda, co si právě sedl na jeho místo? Může se stát, že nedohodí? Aleš je hodně rychlý, a proto neuvažujte jeho reakční dobu a ani dobu, kterou vám zabere řešení úlohy.

Karel civěl na internet.

Na začátku sedí Aleš v počátku souřadného systému. Cihlu odhazuje v bodě $(x_0, y_0) = vT(-\cos\alpha, \sin$ Alešova rychlost je $v(-\cos\alpha, \sin\alpha)$ a v jeho souřadném systému bude odhazovat cihlu rychlostí $w(\cos\beta, \sin\beta)$. V nehybném souřadném systému bude tedy odhazovat rychlostí

$$(w'_x, w'_y) = (w\cos\beta - v\cos\alpha, w\sin\beta + v\sin\alpha)\,.$$

Trajektorie cihly bude

$$(x, y)(t) = \left(x_0 + w'_x t, y_0 + w'_y t - \frac{1}{2}gt^2\right).$$

Naším úkolem je vyřešit soustavu rovnic $(x, y)(t; \alpha, \beta, T, v, w) = 0$ pro neznámé t a β, zatímco α, T, v a w jsou parametry.

Z kvadratické rovnice $y(t) = 0$ dostaneme

$$t = \frac{w'_y}{g} + \sqrt{\left(\frac{w'_y}{g}\right)^2 + \frac{2y_0}{g}}\,.$$

Dosazením do $x(t) = 0$ a rozepsáním w'_x a w'_y dojdeme k

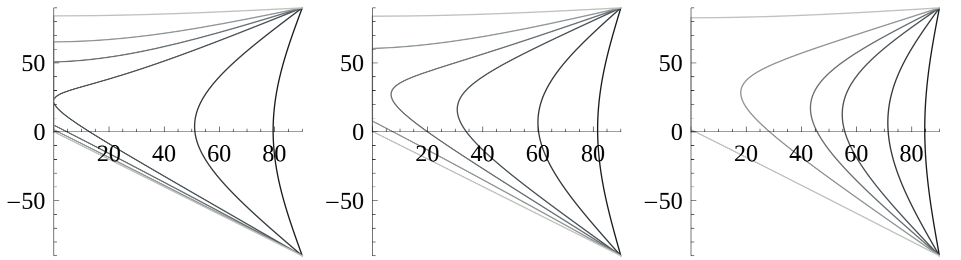
$$-vT\cos\alpha + (w\cos\beta - v\cos\alpha)\left[\frac{w\sin\beta + v\sin\alpha}{g} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\left(\frac{w\sin\beta + v\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2vT\sin\alpha}{g}}\right] = 0\,. \qquad (1)$$

Několika algebraickými úpravami a schováním v, w, g a T do bezrozměrných $Q = w/v$ a $A = gT/v$ dostaneme

$$A(1 + \cos 2\alpha) + 4Q\sin(\alpha + \beta)(\cos\alpha - Q\cos\beta) = 0\,.$$

Tato rovnice bohužel vede na kvadratickou rovnici v $\sin\beta$ (nebo $\cos\beta$), jejíž monstrózní řešení nám neřekne zhola nic, a proto se uchýlíme k numerickému řešení.

Pro tyto účely je dobré se vrátit k rovnici (1), do které jsme ještě nezanesli neekvivalentními úpravami nesprávná řešení. Po chvíli hraní s touto rovnicí v počítači dojdeme k závěru, že dle očekávání má Aleš buď smůlu a nedohodí, a nebo má na výběr ze dvou různých úhlů β. Taktéž se ukazuje, že pro numerické účely bude vhodnější nehledat β v závislosti na α (0 nebo 2 řešení), ale raději α v závislosti na β (0 nebo 1 řešení). Výsledné grafy (už zase jako $\beta(\alpha)$) jsou na obrázku 1.



Obr. 1: Numerické řešení pro $A = 0{,}2; 1; 5$ (zleva doprava) a $Q = 0{,}2; 0{,}7; 1{,}3; 1{,}7; 2{,}5; 10$ (od černé k šedé). Na ose x je úhel α; na ose y úhel β.

Numerické řešení potvrzuje intuici. Pro některé kombinace A a Q lze dohodit pod kopec až pro úhly $\alpha \geq \alpha_{\min}$, přičemž pro $\alpha = \alpha_{\min}$ existuje jeden kýžený úhel $\beta = \beta_{\min}$, zatímco pro $\alpha > \alpha_{\min}$ existují dva úhly $\beta_1 < \beta_{\min} < \beta_2$. Čím větší Q (větší w), tím menší $\alpha_{\min}$. Čím větší A (delší T), tím větší $\alpha_{\min}$.

Jan Hermann
`honzah@fykos.cz`