Úloha VI.1 ... tref svojí družici

2 body; průměr 1,63; řešilo 19 studentů

Máme malý míček o poloměru r těsně nad míčem o poloměru R. Nejspodnější bod spodního míče je ve výšce h nad zemí. Oba míčky pustíme. Do jaké nejvyšší výšky může vystoupit horní míček? Uvažujte, že všechny srážky jsou dokonale pružné. Bez újmy na bodech můžete považovat hmotnost horního míčku za zanedbatelnou.

Bonus *Postup zobecněte na N míčků. (Stále můžete uvažovat, že hmotnost míčku výše je zanedbatelná oproti míčku pod ním.)* *Potrefený Karel.*

Jde o klasickou úlohu řešící srážky tuhých těles. Proto použijeme zákony zachování hybnosti a energie:

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv'^2\,,$$
$$Mv - mv = Mv_0 + mv'\,,$$

kde v značí rychlosti koulí před dopadem, v' rychlost malé koule po odrazu a v_0 rychlost velké koule po odrazu, rychlosti považujeme za kladné, směřují-li vzhůru. Rovnice můžeme upravit do tvaru

$$\frac{1}{2}M(1 + m/M)v^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv'^2\,,$$
$$M(1 - m/M)v = Mv_0 + mv'\,.$$

Z druhé rovnice vyjádříme $v_0 = (1 - m/M)v - m/Mv'$ a dosadíme do první

$$\frac{1}{2}M(1 + m/M)v^2 = \frac{M}{2}\left((1 - m/M)v - m/Mv'\right)^2 + \frac{1}{2}mv'^2\,.$$

Protože se nám odečtou členy nejvyššího řádu tj. $(M/m)^0$, musíme ponechat všechny členy úměrné m/M, ale můžeme zanedbat členy $(m/M)^2$. Umocněním a použitím aproximace dostáváme výsledek

$$v' = 3v\,.$$

Stejného výsledku bychom docílili, pokud bychom si uvědomili, že rychlost malé kuličky vůči velké kuličce v okamžiku odrazu je $2v$ a tato rychlost pouze změní znaménko, proto je rychlost odrazu $3v$ vůči zemi.

Protože jsme na počátku uvažovali volný pád, platí $v = \sqrt{2hg}$ a $v' = \sqrt{2h'g}$. Z toho vyplývá, že $h' = 9h$, tedy těžiště kuličky vystoupí do devítinásobné výšky měřeno od nejnižší polohy těžiště. Těžiště kuličky proto vystoupí do výšky $H = 9\sqrt{2hg} + 2R + r$.

Budeme-li uvažovat n koulí, tak bude platit $v_n = 2v_{n-1} + v$. Dosadíme-li tento rekurentní vztah do sebe, zjistíme, že jde o geometrickou posloupnost s koeficientem $q = 2$, jejíž součet je $v_n = (2^n - 1)v$. Proto n-tá kulička se odrazí do výšky $h_n = (2^n - 1)^2h$. Ale k poslednímu odrazu došlo ve výšce odpovídající součtu průměrů kuliček. Proto

$$H_n = (2^n - 1)^2h + 2(R_1 + R_2 + \cdots + R_{n-1} + \frac{1}{2}R_n)\,,$$

kde R_n je poloměr horního míčku.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz