

Úloha VI.2 ... kosmická stanice

2 body; průměr 1,54; řešilo 37 studentů

Odhadněte, jakou minimální energii musíme dodat kosmické stanici, abychom ji dostali na oběžnou dráhu. Můžete pracovat s hodnotami pro mezinárodní kosmickou stanici ISS, která obíhá Zemi ve výšce cca $h = 350$ km a má celkovou hmotnost přibližně $m = 450$ tun. Vysvětlete, proč je odhad minimální a vyjmenujte alespoň některé fyzikální skutečnosti, které vedou k tomu, že je skutečná spotřeba raket významně vyšší. *Astrokarel.*

Úplně nejmenší energii bychom museli družici dodat, pokud bychom chtěli, aby pouze chvilkově dosáhla výšky oběžné dráhy. Stačí najít rozdíl potenciální energie mezi místem odpalu (výška r) a místem o danou výšku h nad ním. To umíme, protože známe předpis pro gravitační potenciální energii $\varphi = -mGM/r$, takže nám stačí spočítat výsledek vztahu

$$E_p = \varphi r + h - \varphi r = -mGM \left(\frac{1}{r+h} - \frac{1}{r} \right).$$

V celé úloze budeme uvažovat, že startovací rampa je na kulové Zemi o poloměru 6378 km, oběžná dráha je ve výšce 350 km nad Zemí a družice váží 450 t. Tedy úplně nejnižší odhad je $E_p = 1,46 \cdot 10^{12}$ J.

Nicméně družice vystřelená jen s touto energií by se na orbitě moc dlouho neohřála. Musíme totiž přičíst minimálně ještě takovou energii, která je potřeba na urychlení vynášeného objektu na kruhovou rychlost odpovídající správné výšce. Víme, že dostředivou sílu představuje síla gravitační, tudíž kruhovou rychlost vypočteme z rovnosti

$$\frac{mv^2}{r+h} = \frac{GMm}{(r+h)^2},$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r+h}}.$$

Toto můžeme dosadit do vzorce pro kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2(r+h)},$$

z čehož vyjde výsledek $E_k = 1,33 \cdot 10^{13}$ J. Odhad tedy upravíme na $E = 1,48 \cdot 10^{13}$ J. Je vidět, že je mnohem těžší družici urychlit než vystřelit.

Druhý největší vliv na energii potřebnou k úspěšnému vypuštění družice je hmotnost paliva m_p v raketě. Tu můžeme spočítat z Ciolkovského rovnice jako

$$m_p = m \left(\exp \frac{v}{v_p} - 1 \right),$$

kde v_p je výtoková rychlost paliva. Pro nehmotnou raketu a typickou $v_p = 3000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ vychází $m_p \approx 5000$ t, jejímž urychlením se raketě předá energie asi $1,6 \cdot 10^{14}$ J, která dosavadní odhady hravě překoná.

Oproti tomu jsou již rozdíly dané hmotností vlastní rakety, potažmo živého nákladu a podobně, opravdu zanedbatelné.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.