

Úvodem

Milé řešitelky a milí řešitelé!

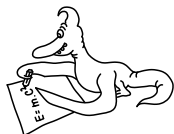
Toto je poslední číslo XXVI. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře, a tak v této brožurce najdete vzorová řešení úloh poslední série společně se závěrečnou výsledkovou listinou. Gratulujeme všem, kteří FYKOS řeší, a zvláště pak těm, kteří byli se svými myšlenkami tak úspěšní, že se umístili na předních pozicích.

Vážíme si práce každého řešitele, neboť svým úsilím dokazuje, že má zájem o přírodní vědy.

Rádi bychom také pozvali čtvrtáky, kteří jdou studovat na vysokou školu (a nemusí to být nutně MFF UK) do organizátorských řad. Přivítáme Vaši spolupráci, pokud máte zájem pomáhat při organizaci FYKOSu.

Mladší srdečně zveme do dalšího ročníku, zadání jeho první série naleznete v příloženém letáčku. Také bychom vás všechny chtěli poprosit, abyste informaci o tom, že existuje tak skvělá věc jako FYKOS, šířili dál svým spolužákům, kamarádům a dalším středoškolákům (případně základoškolákům), které by něco takového mohlo zajímat.

Organizátoři



Řešení VI. série

Úloha VI.1 ... ne zcela chutné pití vody 2 body; průměr 1,74; řešilo 34 studentů

Pták Fykosák jednoho dne vypil 2 dcl vody. Uběhlo milénium a všechna voda na Zemi se stihla mezitím promíchat. Když teď pták znovu vypije 2 dcl vody, kolik molekul z vody, co vypil právě před milénium, v nich bude?
Karel se bojí cholery.

Objem vypité vody si označme $V_p = 0,21 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$. Počet N_1 molekul vody v jedné takové dávce je

$$N_1 = \frac{\rho V_p}{M_{\text{H}_2\text{O}}} N_A,$$

kde $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je hustota vody, $M_{\text{H}_2\text{O}} \doteq 0,01802 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ je její molární hmotnost a $N_A \doteq 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ Avogadrova konstanta.

Celkový objem vody na Zemi je někde mezi $1,3 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ a $1,4 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ podle zdroje (například $1,338 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ podle Wikipedie a $1,386 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ podle U.S. Geological Survey). Označme ho V_{abs} .

Za předpokladu, že jsou částice z první dávky rovnoměrně rozloženy v celém objemu, je jejich koncentrace $c = N_1/V_{\text{abs}}$. Když pak pták Fykosák znovu vypije V_p vody, tak vypije $N_2 = cV_p$ molekul ze svého přípitku před milénium, přičemž platí

$$N_1 = \frac{\rho V_p^2 N_A}{M_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{abs}}}.$$

Když za V_{abs} dosadíme $1,338 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$, dostáváme $N_2 \doteq 999$, tedy přibližně tisíc molekul.

Dávid Hvizdoš
david@fykos.cz

Úloha VI.2 ... roztržitý drát

2 body; průměr 2,31; řešilo 32 studentů

Jak by musel být minimálně dlouhý ocelový drát ve stočeném stavu, aby se při volném zavěšení za jeho jeden konec přetrhl? Používáme ocelový drát o hustotě $\rho = 7900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, průměru $D = 1 \text{ mm}$ a mezi pevností $\sigma_{\max} = 400 \text{ MPa}$. Uvažujte, že jsme v homogenním tíhovém poli o intenzitě $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Bonus Uvažujte teď nejdelší drát, který se ještě nepřetrhne. O kolik procent se protáhne po zavěšení? Youngův modul pružnosti v tahu použité oceli je $E = 200 \text{ GPa}$.

Karel s drátem v oku.

Stalo se to snad každému z nás. Volně jste si zavěsili svůj oblíbený ocelový drát, načež se ozvala rána jako z děla a vy jste viděli, jak se sám od sebe přetrhl. Zkusme se celému případu trochu věnovat, a spočítat si, že to je prakticky nesmysl.

Předesíláme raději předem, že problematiku akustiky trhání drátů necháváme na rozmyšlení čtenáři. Co nás ale bude zajímat, je například průběh (tažného) napětí podél drátu, stejně jako zákony hovořící o vztahu mezi tímto napětím a elastickým prodloužením.

Trhání drátu

Co mohlo způsobit přetržení drátu? Zcela jistě ta jediná vnější síla na drát působící, tíhová síla. Pokud je totiž dostatečně velká, drát se už neunes a praskne. No ano, ale kde? Ve skutečnosti dráty praskají, kde se jim zlíbí, takové my ale uvažovat nebudeme. Jsme přece fyzici, máme k dispozici dokonalý drát. Ten nemá žádnou mikroskopickou poruchu, žádné průřezové fluktuační či z dřívějšíka materiálově unavené zóny. Jinými slovy, budeme se tedy zabývat fyzikou zcela homogenního tenkého ocelového válce. Takový drát pak musí prasknout u zavěšeného konce. To proto, že tam tažné napětí dosahuje maxima. Každé místo drátu je totiž vystaveno přesně takovému napětí, aby uneslo celou část drátu, která visí pod ním. Podrobněji níže. Za zmíněných předpokladů a uvážení jednoduchého modelu drátu, který se nedeformuje vůbec nebo při deformaci nemění svůj průřez (diskuzi o Hookeově zákonu a různých i jiných modelech drátu se budeme věnovat až v dalším odstavci), můžeme postupovat přímočaře. Aby se žádný kus drátu nepohyboval, musí být výslednice sil na něj působící nulová. Proto síla, kterou musí vyvíjet průřezová ploška v každém místě drátu, je přesně rovna tíze celé části drátu pod ní, jelikož právě na tento kus již nepůsobí žádná vnější síla krom této a tíhové.¹ Naši úvahu zapíšeme do rovnice

$$F = \rho l S g,$$

kde F značí tahovou sílu, již vyvíjí průřezová ploška na svoje okolí, pokud je ve výšce l od volného konce drátu. S je plocha průřezu a písmena ρ , resp. g značí hustotu drátu, resp. tíhové zrychlení. Jak vidno, vztah pro sílu je lineární v délce, proto bude dosahovat maxima, právě když to udělá l . Maximální napětí, které se v drátu objeví, σ_0 , je proto rovno

$$\sigma_0 = \rho h g, \quad (1)$$

kde h je délka drátu. Pokud chceme zjistit mezní délku drátu, který už praskne, stačí nám výraz v rovnici (1) dát do rovnosti s mezí pevností materiálu σ_{\max} . Jedná se totiž o prahovou hodnotu napětí, při které již dojde přetržení. Jednoduchou algebraickou operací získáme

$$h_{\text{mez}} = \frac{\sigma_{\max}}{\rho g}$$

¹Jen na doplnění, jak již víme, dále tam existuje vnitřní pnutí, to však ze zákona akce a reakce nemá žádný vliv na pohyb celku. Krásný příklad za vše – ani ten největší silák nezdvihne židli, na které sedí. Je to asi tak stejně možné jako dvakrát napočítat do nekonečna nebo vyhrát Tour de France na rotopedu.

a číselně $h_{\text{mez}} \doteq 5,2 \text{ km}$.

Nejkratší ocelový drát, který by se mohl takto kvůli své vlastní váze přetrhnout, měří asi 5,2 km. Kdo máte doma pouze 5 km dlouhý drát, tak bohužel, nic takového se vám nepovede.

Natahování drátu

Pokud se nám podaří zavěsit drát jen o malinko kratší, už by se, v ideálním případě, diskutováním v prvním odstavci, neměl roztrhnout. Všechny tyto úvahy však byly vedeny pro drát, který si zachovával plochu průřezu, a tím bylo zajištěno neměnné napětí při libovolném prodloužení. Jak ale uvidíme dále, ani to nemusí být splněno vždy, obzvlášť když uvažujeme nějaký realističtější model. A jak se mezi řemeslníky říká, každá ves, jiný drát, zkusme si tedy vymyslet hned několik modelů drátu, podle toho, jak na napěťový stav reagují. Prvním příkladem může být drát, který při zvýšení napětí nedělá vůbec nic. Je to (nerealistický) model drátu, který pouze „čeká na přetrhnutí“. Nazvěme si jej „drát zachovávající délku“. Naším druhým modelem bude drát, který při zvýšení (tažného) napětí reaguje prodloužením, zachovává si však průřez. Říkejme mu proto „drát zachovávající průřez“. A pak tu máme další exemplář, kterým je „drát zachovávající objem“. Od něj budeme jen chtít, aby, jak název napovídá, zachovával objem. V neposlední řadě však musíme zmínit i krapet realističtější model, který má svým chováním blízko k poslednímu jmenovanému, zužuje se však podle platného zákona. Tím je tzv. Poissonův zákon, hovořící o změně plochy průřezu při podélné deformaci. Tento model nazvěme „Poissonův drát“. Pro každý z modelů teď udělejme menší komentář.

Především ale zmiňme důležitou věc. Další významná aproximace, bez které by se nám počítalo velmi nepříjemně, je linearizace vztahu mezi relativním prodloužením a napětím v celém rozsahu prodloužení materiálu. Považujme tedy všechny dráty za Hookeovské. Ve skutečnosti se před přetržením materiál dostane do plastické oblasti, kdy jsou jeho deformace nevratné, co je však pro nás důležitější, neplatí Hookeův zákon.

Drát zachovávající průřez

Poslední z dvojice drátů, pro který platí výpočet prvního odstavce. Tím prvním je drát zachovávající délku, který se však do odstavce o natahování drátu dostal nešikovností autora. Dle zmíněné aproximace platí důležitý vztah mezi napětím a relativním prodloužením, již několikrát zmíněný Hookeův zákon

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2)$$

kde ε je relativní prodloužení a E Youngův modul pružnosti v tahu. Protože je ale v každém místě drátu jiné napětí, uvažujme nejprve prodloužení mezi dvěma dostatečně blízkými body, abychom v dobrém přiblížení mohli zanedbat tíhu úseku drátu mezi těmito body, a též uvažovat, že na prodloužení se výlučně podílí pouze síly působící na oba konce úseku. Za těchto podmínek je naše úloha již zcela lineární. Pro prodloužení Δl nám z rovnice (2) vyjde

$$\rho l g = E \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (3)$$

kde l_0 je počáteční délka úseku, l je výška tohoto úseku od volného konce drátu. Z této rovnice pro prodloužení malého úseku můžeme dojít k celkovému prodloužení drátu využitím integrálního počtu, který již nespádá do standardní středoškolské látky, proto doporučuji číst opatrně a pomalu. Jde nám o to, posčítat všechny ty průřevé přírůstky délky nějak chytře. Každý součin

malého dílku l_0 s jeho vzdáleností od volného konce l lze reprezentovat obsahem malého obdélníčku. Pokud za sebe takového malé obdélníčky naskládáme, dostaneme útvar, který se velmi podobá trojúhelníku. Jeho obsah už ale spočítat dovedeme! Pro celkové prodloužení drátu Δh nám pak vychází

$$\Delta h = \frac{gh^2 \varrho}{2E}.$$

Pokud uvažujeme procentuální prodloužení ε_h , chceme spočítat

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h}{h} \cdot 100\%,$$

číselně $\varepsilon_h \doteq 0,1\%$.

Drát zachovávající objem

V tomto případě je dobré zmínit, že kvůli změně průřezu drátu tohoto chování můžeme očekávat změny v mezní délce drátu, který se ještě nepřetrhne. Kvantitativní úvahy na toto téma však necháváme čtenáři k rozmyšlení. Nyní se však pokusíme najít vztah pro jeho prodloužení jako u předcházejícího modelu. Aby při natahování drát nezměnil objem, musí za každého počasí platit pro plochu jeho průřezu S vztah

$$S = \frac{S_0 l_0}{l_0 + \Delta l}, \quad (4)$$

kde S_0 a l_0 jsou počáteční obsah průřezu drátu a délka každého malého úseku. Jakmile tuto rovnici dosadíme do Hookova zákona (pozor, rovnice (3) už pro náš případ neplatí, jelikož uvažuje neměnný průřez), získáme pro prodloužení délkového elementu l_0 vztah

$$\Delta l = \frac{\varrho l g l_0}{E - \varrho l g}.$$

Abychom vás dlouho nenapínali, tady už nepomůže ani trojúhelník. Po zintegrování podle proměnné l v mezích původní délky drátu, tedy od 0 do h , získáme nádherný vztah

$$\Delta h = -h + \frac{E}{\varrho g} \log \left(\frac{E}{E - gh\varrho} \right),$$

k němuž je potřeba dodat drobnou poznámku. Jak jste si jistě všimli, při jistém nastavení počátečních hodnot budeme svědky logaritmu ze záporného čísla, což není vůbec pěkné. Nastává tu totiž jeden zajímavý efekt, a to ten, že pokud bude jmenovatel v logaritmu roven nule, bude se drát prodloužovat do nekonečna. Prakticky však do chvíle, než praskne. Proto pokud bude hodnota jmenovatele přímo záporná, nemá smysl prodloužení počítat.

Poissonův drát

Situace je velmi analogická té předchozí, vlastně se odlišuje pouze v míře zužování drátu. Vyjdeme přímo z Poissonova vztahu, který určuje relativní míru změny délkového rozměru průřezu (například délka strany v případě obdélníkového průřezu) při změně rozměru jiného

$$\mu \varepsilon = \frac{\Delta a}{a},$$

kde a je charakteristický rozměr průřezu a μ je tzv. Poissonovo číslo. Z binomické věty pak pro změnu plošného rozměru máme

$$\mu\varepsilon = \frac{\Delta S}{2S_0},$$

čímž dostáváme vztah pro velikost plochy průřezu nataženého drátu ve tvaru

$$S = S_0 (2\mu\varepsilon + 1),$$

neboli analogii k rovnici (4), a tím situaci úplně převádíme na předchozí případ „drát zachovávající objem“. Zbytek necháváme na dopočet nadšeným čtenářům.

Jiří Nárožný
nahry@fykos.cz

Úloha VI.3 ... utopená čočka

4 body; průměr 2,95; řešilo 20 studentů

Jestliže do vzdálenosti p od tenké čočky vyrobené ze skla o indexu lomu n_s umístíme předmět, podaří se nám zachytit jeho obraz na stínítku ve vzdálenosti d od ní. Čočku a předmět beze změny vzájemné vzdálenosti poté ponoříme do kapaliny o indexu lomu n . Za jakých podmínek budeme nyní schopni zachytit obraz předmětu na stínítku a v jaké vzdálenosti x od čočky to bude? *Pikoš se utopil i s brýlemi.*

Za počátečních podmínek jsme předmět, umístěný ve vzdálenosti p od čočky, viděli ve vzdálenosti d . Dopočteme tedy nejprve ohniskovou vzdálenost čočky ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{1}{f}, \quad (5)$$

kde a je skutečná vzdálenost předmětu od čočky (v našem případě tedy p), a' vzdálenost, ve které vidíme zobrazený předmět (v našem případě tedy d), a f ohnisková vzdálenost naší čočky. Pro tenkou čočku můžeme ohniskovou vzdálenost vyjádřit také pomocí poloměrů křivosti lámavých ploch (R_1 a R_2) a indexu lomu čočky n_s . Takto můžeme ohniskovou vzdálenost vyjádřit z této rovnice

$$-\frac{1}{f} = (n_s - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (6)$$

Z rovnic (5) a (6) můžeme tedy určit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{d} = (n_s - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (n_s - 1) \sigma, \quad (7)$$

kde $\sigma = 1/R_1 - 1/R_2$ je tzv. vypuklost čočky. Vlastnosti čočky se určují ze Snellova zákona

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Běžně předpokládáme, že se skrz brýle díváme ve vzduchu, jehož index lomu je až na nepatrnou odchylku roven jedné. Snellův zákon můžeme pro čočku ve vzduchu tedy upravit na tvar

$$\sin \alpha_1 = n_s \sin \alpha_2. \quad (8)$$

V kapalině o indexu lomu n bude tato rovnice vypadat následovně

$$n \sin \alpha_1 = n_s \sin \alpha_2.$$

Abychom se dostali znovu do tvaru (8), musíme určit takzvaný relativní index lomu – n_s/n . Výsledek s čočkou v kapalině tedy bude stejný, jako kdybychom měli ve vzduchu čočku s indexem lomu n_s/n . Pokud tedy dosadíme do rovnice (7), získáváme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \left(\frac{n_s}{n} - 1 \right) \sigma. \quad (9)$$

Pokud tedy chceme zjistit hodnotu x , musíme vyřešit soustavu dvou rovnic (7) a (9) o dvou neznámých σ a x . Tato soustava má pro x řešení

$$x = \frac{pd(n_s - 1)}{\left(\frac{n_s}{n} - 1 \right) (p + d) - d(n_s - 1)}.$$

Z tvaru řešení je zřejmé, že obraz neuvídíme v případě, že bude splněno

$$\left(\frac{n_s}{n} - 1 \right) (p + d) = d(n_s - 1), \quad (10)$$

neboli

$$n = n_s \frac{p + d}{p + n_s d}.$$

V tomto případě bychom obraz zachytili až v nekonečnu. Dále požadujeme, abychom byli schopni obraz zachytit na stínítku. Vzdálenost x musí být kladné číslo. Požadujeme tedy, aby byl splněn vztah

$$\frac{pd(n_s - 1)}{\left(\frac{n_s}{n} - 1 \right) (p + d) - d(n_s - 1)} > 0.$$

Pro splnění podmínky je potřeba, aby čitatel a jmenovatel měli stejné znaménko. Možnost, že obě znaménka budou záporná, můžeme vyloučit, neboť index lomu čočky nemůže být menší než 1. Musíme tedy ověřit, kdy bude kladný čitatel. To bude v případě, kdy bude splněno

$$\left(\frac{n_s}{n} - 1 \right) (p + d) > d(n_s - 1) \quad \Rightarrow \quad p < d \frac{n_s(n - 1)}{n_s - n}.$$

Nahlédnutím vidíme, že toto určitě nebude splněno v případě, kdy index lomu čočky bude nižší než index lomu kapaliny. V tomto případě by se čočka chovala nikoliv jako spojka, nýbrž jako rozptylka.

Tomáš Bárta
tomas@fykos.cz

Úloha VI.4 ... nalévání čaje do várnice v menze

4 body; průměr 1,50;

řešilo 20 studentů

O kolik se zvýší rychlost čepování čaje v_0 , pokud je do várnice právě doléván? Průměr várnice je D , průměr proudu dolévaného čaje je d právě při dopadu na hladinu. Čaj naléváme z výšky h nad hladinou, která je ve výšce H nad středem otvoru. Průměr otvoru, jímž čaj vytéká, je mnohem menší než D . Zanedbejte veškeré tření. Lukášovi přetekla sklenička v menze.

Základným vztahom, ktorý budeme používať, je Torricelliho vzorec. Ak do nádoby žiaden čaj nedolievame, bude podľa neho výtoková rýchlosť rovná

$$v_0 = \sqrt{2gH}.$$

Ak teraz začneme nalievať čaj, ten kvôli spomaľovaniu pri dopade bude pôsobiť dodatočným tlakom na hladinu. Budeme uvažovať zľahka nerealistický model, že čaj sa pri dopade na hladinu úplne spomalí a odovzdá celú svoju hybnosť. Tým, že dopadajúci čaj tlačí na čaj v nádobe tlakom p , efektívne zvyšuje hladinu o

$$\Delta H = \frac{p}{\rho g}.$$

Otázka je, môžeme takto uvažovať, ak chceme určiť výtokovú rýchlosť? Áno, môžeme! Čaj pri otvore totiž nevie, čo sa deje hore na hladine, on cíti len u seba tlak. No a tento tlak je rovnaký, či už by na hladine bola vrstva čaju s hrúbkou ΔH navyiac alebo či tam ten čaj dopadá.

Ostáva nám teda určiť tlak p . Pozrime sa na krátky časový okamih Δt . Keďže čaj dopadá z výšky h , má na hladine rýchlosť

$$v_v = \sqrt{2gh}.$$

Za časový úsek Δt dopadne objem čaju (podľa vzťahu podstava krát výška)

$$\Delta V = \frac{1}{4}\pi d^2 v_v \Delta t$$

s hmotnosťou $\Delta m = \rho \Delta V$. Tento čaj má hybnosť $\Delta p = \Delta m v_v$ a sila, ktorá ho za čas Δt zastaví, musí mať veľkosť (hybnosť vody sa tu totiž mení práve o Δp)

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{4}\pi \rho d^2 v_v^2 = \frac{1}{2}\pi \rho g h d^2.$$

Táto sila sa rozloží na plochu² $\pi D^2/4$, môžeme teda konečne vypočítať efektívne zvýšenie hladiny

$$\Delta H = \frac{F}{\rho g \pi D^2/4} = 2h \frac{d^2}{D^2}$$

a novú rýchlosť

$$v_1 = \sqrt{2g(H + \Delta H)} = \sqrt{2gH + 4gh \frac{d^2}{D^2}} = \sqrt{v_0^2 + 4gh \frac{d^2}{D^2}}.$$

Zmysel má spočítať aj pomer týchto rýchlostí

$$\frac{v_1}{v_0} = \sqrt{1 + 2 \frac{hd^2}{HD^2}},$$

čo vám môže pripomínať pomer nejakých objemov.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

²Prečo nie na plochu $\pi d^2/4$? To by znamenalo, že v nádobe sa vytvára stĺpec vyššieho tlaku s priemerom d , čo skutočne nie je stabilný stav. Tlak sa smerom ku dnu bude priemerovať na celý prierez nádoby.

Úloha VI.5 ... problémy baseballistů 4 body; průměr 1,64; řešilo 14 studentů

Mějme hráče baseballu, který drží v rukou baseballovou pálku délky L a hmotnosti m a chystá se na odpal míčku. Jako vhodné přiblížení se držíme toho, že hráč může otáčet pálkou jen okolo fixované osy, která je kolmá na osu pálky a prochází na jejím konci rukama odpalujícího hráče. Pálkou otáčí úhlovou rychlostí ω . V jaké vzdálenosti l od konce pálky má hráč odpálit míček, aby nárazová síla na hráčovy ruce byla co nejmenší? Pálka je tenká homogenní tyč.

Dostal míčkem Radomír.

Na pálku počas nárazu loptičky pôsobia tri sily. Malá radiálna sila F_d , ktorá vzniká dostredivým zrýchlením pálky. Jej pôsobenie počas nárazu nebudeme uvažovať. Teraz položíme pálku pri náraze loptičky na y -novú os a obmedzíme sa len na zložky síl v smere osi x . Sily F_l (v mieste držania pálky rukami hráča) a F_r (v mieste nárazu loptičky na pálku) majú najväčší vplyv na náraz, pretože pri náraze loptičky behom pár milisekúnd drasticky spomalí pálku.

Práve $-F_l$ je nárazová sila, ktorá pôsobí na hráčove ruky. Pozrime sa, ako by sme o nej zistili niečo viac. Označme l vzdialenosť od osi otáčania pálky a miesta nárazu loptičky.

Impulz momentu hybnosti pre pálku vzhľadom na os otáčania je

$$J_1 - J_2 = \Delta L = M \Delta t. \quad (11)$$

Počiatočný moment hybnosti J_1 je $I\omega_0$, kde I je moment zotrvačnosti pálky vzhľadom na os otáčania. Po náraze má pálka moment hybnosti $J_2 = I\omega$. Moment sily M pôsobiaci na pálku počas nárazu je $M = lF_r$. Ak všetko dosadíme do rovnice (11), dostávame

$$I(\omega_0 - \omega) = I\Delta\omega = lF_r\Delta t. \quad (12)$$

Pre ťažisko pálky zase platí impulz hybnosti

$$p_1 - p_2 = F\Delta t,$$

kde F je celková sila pôsobiaca na pálku. Platí $F = F_l + F_r$. Hybnosť ťažiska pálky pred nárazom p_1 v smere osi x je $ml'\omega_0$, kde l' je vzdialenosť ťažiska pálky od osi otáčania. Hybnosť po náraze p_2 je $ml'\omega$. Zozbieraním týchto údajov máme

$$ml'\Delta\omega = (F_l + F_r)\Delta t. \quad (13)$$

Vylúčením F_r z rovnice (12) a dosadením do rovnice (13) dostávame

$$F_l\Delta t = \left(ml' - \frac{I}{l} \right) \Delta\omega.$$

Ak zvolíme

$$l = \frac{I}{ml'},$$

tak nárazová sila na hráčove ruky vymizne! Ak si bejzbalovú pálku predstavíme ako rovnomernú tenkú tyč s momentom zotrvačnosti $I = mL^2/3$ a vzdialenosťou ťažiska od osi otáčania $l' = L/2$, tak máme $l = 2L/3$. Nie je náhoda, že hráči bejzbalu odpaľujú loptičky približne práve v tejto vzdialenosti od osi otáčania pálky.

Radomír Gajdošoci
radomir@fykos.cz

Úloha VI.P ... vypni to – nejde to

5 bodů; průměr 3,50; řešilo 12 studentů

Kolik lidí dokáže za sekundu usmrtit nestíněný jaderný reaktor? Lukáš chtěl zachránit svět.

Ujasněme si nejprve, jakými způsoby může jaderný reaktor zabít. Z reaktoru vychází různé typy záření, právě ty jsou smrtonosné. Jde jednak o tepelné záření, které se uvolňuje jako kinetická energie produktů rozpadu, jednak o ionizující záření, tj. α , β a γ záření. Na wikipedii³ najdeme poměry energií vyzářených v různých typech záření pro ^{235}U :

- Celková vyzářená energie: 202,5 MeV,
- kinetická energie jader: 169 MeV,
- kinetická energie neutronů: 4,8 MeV,
- primární γ emise: 7 MeV,
- sekundární záření β : 6,5 MeV,
- sekundární záření ν , $\bar{\nu}$: 8,8 MeV,
- a sekundární γ emise: 6,3 MeV.

Sekundární emise označuje β a γ záření vyzářené s časovým odstupem po samotném štěpení. Jde převážně o samovolný β rozpad primárních produktů štěpení.

Vidíme, že $\sim 86\%$ energie se uvolňuje ve formě tepla, dále $\sim 6,5\%$ v γ záření a nakonec $\sim 4,5\%$ v β záření. Neutrino nemusíme uvažovat, protože interagují pouze velmi slabě a člověku nijak neublíží (naprostá většina z nich projde Zemí, aniž by interagovala). Protože neutrony ztratí většinu své energie v moderátoru a též je potřebujeme na udržení jaderného reaktoru v chodu, nebudeme je dále uvažovat.

Budeme uvažovat reaktor výkonem odpovídající temelínské elektrárně. Její výkon je 1 GW, proto celkový (tepelný)⁴ výkon reaktoru je ~ 3 GW.

Nejdříve odhadneme energii v tepelném záření, která by byla pro člověka smrtelná. Budeme uvažovat, že člověk má stejnou tepelnou kapacitu jako voda a že smrtelné je zvýšení tělesné teploty o 6°C . Při hmotnosti 70 kg je potřebná energie $E_{\text{st}} \approx 1,8$ MJ. Proto tepelná energie způsobí přehřátí přibližně 1 700 lidí za sekundu.

Nyní se zaměříme na ionizující záření. Dle⁵ je fatální dávka ionizujícího záření 8 Sv, kde Sv je jeden sievert⁶ jednotka udávající dávku záření. Vidíme, že pro fotony a elektrony je radiční váhový faktor jednotkový. Zde je též vidět další důvod, proč nemusíme uvažovat neutrony: Tepelné neutrony⁷ mají energii pouze několik elektronvoltů, tj. asi jednu miliontinu původní energie; i přes relativně velký váhový faktor je tedy můžeme zanedbat.

Ze smrtelné dávky ionizujícího záření a výše uvažované hmotnosti „testovací“ osoby jednoduše zjistíme, že smrtelných je již $E_{\text{si}} \approx 560$ J obdržených skrze ionizující záření. Z tohoto vyplývá, že máš reaktor by dokázal usmrtit přibližně 500 000 lidí každou sekundu.

Vidíme, že tepelné záření je naprosto neškodné, i když je ve skoro desetinásobné převaze. Zde je potřeba podotknout, že nešlo o výpočet, ale spíše o odhad, proto je potřeba brát výsledek pouze jako řádový odhad. Na druhou stranu není důvod se čehokoli obávat, stínění reaktoru

³http://http://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_fission

⁴Účinnost je odhadnutá, tedy zde můžeme zaměnit celkový a tepelný výkon, protože se liší pouze o několik málo procent, viz též <http://cs.wikipedia.org/wiki/Elektrárna>.

⁵<http://www.xkcd.com/radiation>

⁶<http://cs.wikipedia.org/wiki/Sievert>

⁷<http://cs.wikipedia.org/wiki/Neutron>

pohlí naprostou většinu emitovaného záření a ven se nedostane více, než kolik vyzařuje sama Země.

Lukáš Ledvína
lukas1@fykos.cz

Úloha VI.E ... ztroskotání balónu

8 bodů; průměr 6,13; řešilo 15 studentů

Když pustíte nafukovací balónek z výšky, po chvíli bude padat s přibližně konstantní rychlostí. Změřte, jak závisí tato rychlost na velikosti balónku a na hmotnosti závaží, které pod něj zavěsíte.

Pikoš spadl z višně.

Teorie

V okamžiku, kdy balónek pustíme, je jeho rychlost nulová. Působí na něj vztlaková síla směrem svisle vzhůru a tíhová síla směrem svisle dolů. Pokud bychom chtěli určit velikost tíhové síly, museli bychom znát hmotnost balónku a vzduchu v něm (tedy např. tlak uvnitř). Proto zavedeme efektivní hmotnost balónku m , což bude taková hmotnost nafouknutého balónku, kterou zvážíme na váze. V této efektivní hmotnosti je již započítán vliv vztlakové síly. Pak velikost výslednice tíhové síly působící na balónek o efektivní hmotnosti m , tíhové síly působící na závaží o hmotnosti M a vztlakové síly působící na balónek je rovna $(m + M)g$, přičemž předpokládáme, že závaží je oproti balónku velmi malé, takže vztlakovou sílu na něj působící můžeme zanedbat. Výsledná síla na balónek působící bude v případě nafouknutí vzduchem směřovat svisle dolů, balónek tedy začne padat.

Jakmile bude rychlost balónku nenulová, začne na něj proti směru pohybu působit odporová síla. Dále budeme uvažovat, že tvar balónku je při všech velikostech stejný a jde o kouli o průměru d . Pak velikost odporové síly je dle Newtonova vztahu $\varrho v^2 S/4$, kde ϱ je hustota vzduchu, $S = \pi r^2/4$ je v našem případě obsah průmětu balónku do vodorovné roviny a v je jeho rychlost.

Balónek bude nejprve zrychlovat, při určité rychlosti bude výsledná síla působící na balónek nulová a ten se dále bude pohybovat rovnoměrně přímočaře ustálenou rychlostí

$$v_u \propto \frac{\sqrt{m + M}}{d}, \quad (14)$$

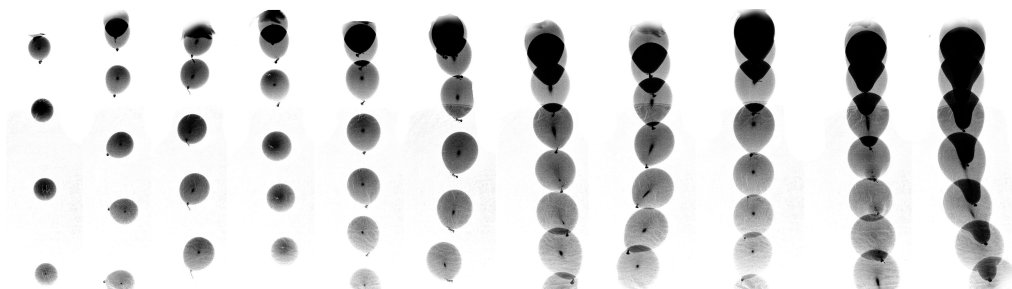
tedy velikost ustálené rychlosti je přímo úměrná odmocnině součtu jeho efektivní hmotnosti a hmotnosti závaží a nepřímo úměrná jeho průměru.

Metody měření rychlosti

Měření rychlosti je možné provést několika způsoby. Nejjednodušší se jeví použití stopky a změřit čas, za jaký balónek urazí danou dráhu. K tomu by však bylo třeba alespoň odhadnout, kdy již balónek nezrychluje. Navíc bychom do měření zanesli velkou nejistotu v podobě měření času stopkami, což by se ovšem dalo eliminovat použitím optické závory.

Přesnější metoda měření rychlosti je využitím stroboskopu (např. blesku s touto funkcí) a fotoaparátu. Na fotografii zachytíme balónek v několika okamžicích a při známé frekvenci záblesků po kalibraci délky (např. vyfotografováním pravítka) měříme vzdálenosti, které balónek urazil mezi záblesky. Výhodou je, že můžeme zaznamenávat pohyb balónku od okamžiku upuštění a rychlost určovat jen z vhodné části pohybu. Nevýhodou naopak to, že musíme pracovat ve tmě a před tmavým pozadím. Příklad snímků s použitím stroboskopu je pro použité

balónky na obrázku 1. Všechny snímky byly pořízeny při frekvenci stroboskopu 5 Hz. Ačkoliv nebyly použity k měření, dobře dokumentují to, že se zvyšující se velikostí balónku jeho velikost rychlosti klesá a je (kromě prvních několika záblesků) přibližně konstantní. Také je zde vidět, že balónky se při pádu otáčejí.



Obr. 1: Snímky (negativy) vytvořené pomocí stroboskopu pro různé velikosti balónků.

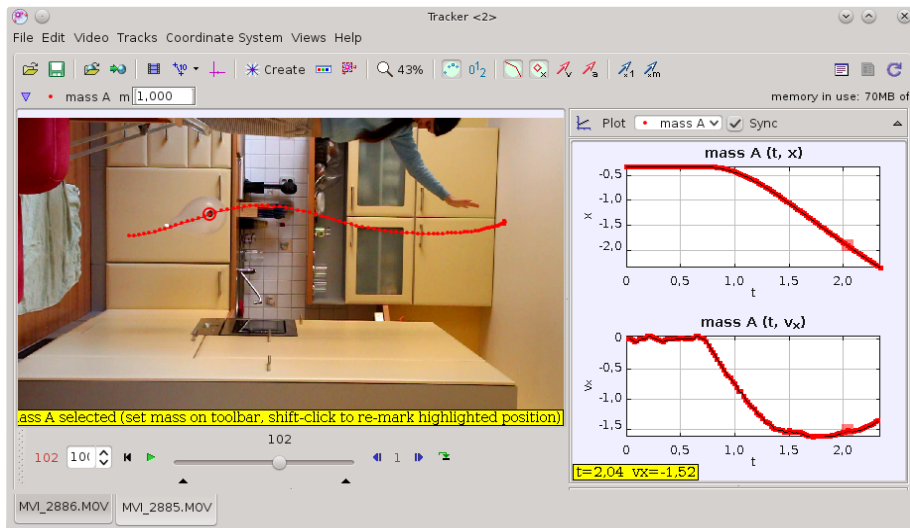
Další možnost je záznam videa, které poté analyzujeme např. v programu Tracker⁸, viz obrázek 2. Nejprve je třeba, stejně jako v případě použití stroboskopu, udělat kalibrační snímek, na kterém vyfotografujeme měřítko známé délky a pomocí něj v programu nastavíme správné měřítko a orientaci souřadných os. Na nafouklém balónku uděláme fixem značku (pro dostatečný kontrast je vhodné použít světlé balónky a tmavý fix). Pomocí funkce Autotracker poté tuto značku v prvním snímku označíme a spustíme trasování. Program v každém ze snímků tuto značku najde, určí její polohu a numerickým derivováním pak i rychlost a zrychlení v jednotlivých časových okamžicích.

Měření

Rychlosti balónků byly měřeny pomocí programu Tracker. Při určování závislosti ustálené rychlosti na velikosti balónku bylo použito 11 balónků nafouknutých na různý průměr. S každým balónkem byla provedena tři měření. Závislost rychlosti na čase pro jedno měření s každým z balónků jsou v grafu na obrázku 3. Při pohledu na něj je zřejmé, že předpoklad, že balónek bude zrychlovat a od určitého okamžiku bude jeho rychlost konstantní, nebyl zcela správný, jelikož situace byla příliš zjednodušená a nebyly uvažovány některé další vlivy. I při pozorování okem bylo zřejmé, že balónky nemají dokonalý tvar rotačního tělesa. Z toho důvodu odpor prostředí způsobí, že se balónek začne otáčet a obsah jeho průmětu do vodorovné roviny se změní, což zapříčiní změnu rychlosti, případně další rotaci. I pokud by byl balónek dokonale symetrický kolem nějaké osy, bylo by třeba jej pouštět tak, aby tato osa byla dokonale svisle. V opačném případě by též mohl začít vykonávat nechtěné pohyby.

Protože rychlost balónku není při pohybu konstantní, je třeba dále zvolit rychlost, pro kterou budeme zkoumat závislost na průměru a hmotnosti. Rychlost vyjádřená vztahem (14) je taková rychlost, při které jsou síly na balónek působící v rovnováze, jeho zrychlení je tedy nulové. Je-li nulové zrychlení, musí být rychlost v tomto okamžiku maximální či minimální, popř. musí jít o inflexní bod. Ustálenou rychlostí tedy v dalším textu budeme rozumět velikost rychlosti

⁸<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>

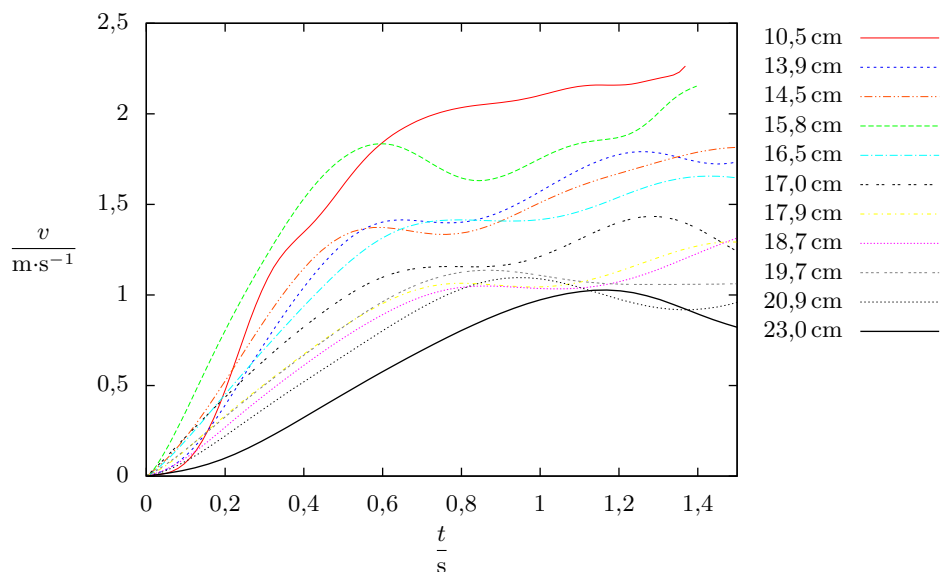


Obr. 2: Práce v programu Tracker. Po označení dostatečně kontrastního bodu (v našem případě černá značka na bílém balónku) program pohyb tohoto bodu během záznamu vyhledá.

v prvním maximu, tedy velikost rychlosti v prvním okamžiku od upuštění, kdy je zrychlení balónku nulové.

Závislost velikosti ustálené rychlosti na velikosti balónku je v grafu na obrázku 4. Naměřené hodnoty jsou v programu gnuplot proloženy teoreticky odvozenou závislostí na rychlosti (14), přičemž se předpokládalo, že hmotnost všech balónků byla stejná. Toto předpoklad byl vyvozen z měření hmotností nafouknutých a následně i nenafouknutých balónků. Hmotnosti nenafouknutých balónků ze stejného balení (kde by všechny balónky měly být stejné) se pohybují od 1,27 g do 1,56 g. Efektivní hmotnosti nafouknutých balónků včetně kousku špagátu, kterým byly zavázány (všechny kousky byly přibližně stejně dlouhé) se pohybovaly od 1,60 g do 2,05 g, přičemž ale hmotnost nerostla s průměrem monotónně, zřejmě v důsledku různých hmotností balónků před nafouknutím. Navíc vzhledem k velkému rozptylu naměřených hodnot nemůžeme říci, zda naměřené hodnoty odpovídají teoretické závislosti, takže nejistota skrytá v předpokladu stejných hmotností nevádí.

Dalším úkolem bylo měření závislosti ustálené rychlosti na hmotnosti závaží, které pod balónek zavěsíme. Jako závaží byly použity mince a knoflíkové baterie, které byly pod balónek připevněny lepicí páskou, kterou též považujeme za závaží. Měření bylo provedeno s jedním balónkem pro deset různých hmotností závaží vždy třikrát. V grafu na obrázku 5 je uvedena hmotnost součtem efektivní hmotnosti balónku $m = (1,90 \pm 0,01)$ g a hmotnosti závaží M . Pokud bychom požadovali graf závislosti ustálené rychlosti na hmotnosti závaží, stačilo by pouze vodorovnou osu posunout. Naměřené hodnoty jsou v programu gnuplot proloženy teoreticky odvozenou závislostí (14).



Obr. 3: Závislost velikosti vertikální rychlosti na čase pro různé velikosti balóneků. Každý balónek byl měřen třikrát, pro ilustraci uvádíme jedno měření.

Diskuse a nejistoty měření

Nejistoty tohoto měření je možné rozdělit na nejistoty měření polohy, velikosti balónku a jeho hmotnosti. Polohy balónku (a z nich numericky vypočítané rychlosti) byly měřeny v programu Tracker, který určoval polohu označeného bodu balónku. Jelikož ten se ale mohl v průběhu měření pohybovat i jinak než svisle dolů (např. se naklánět), nedá se říci, že naměřené polohy jsou polohy těžiště. V případě měření polohy z videa hraje také roli zkreslení obrazu, které bylo minimalizováno měřením z větší vzdálenosti a použitím objektivu s dlouhým ohniskem. Nejistota určení velikosti rychlosti byla odhadnuta na $0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

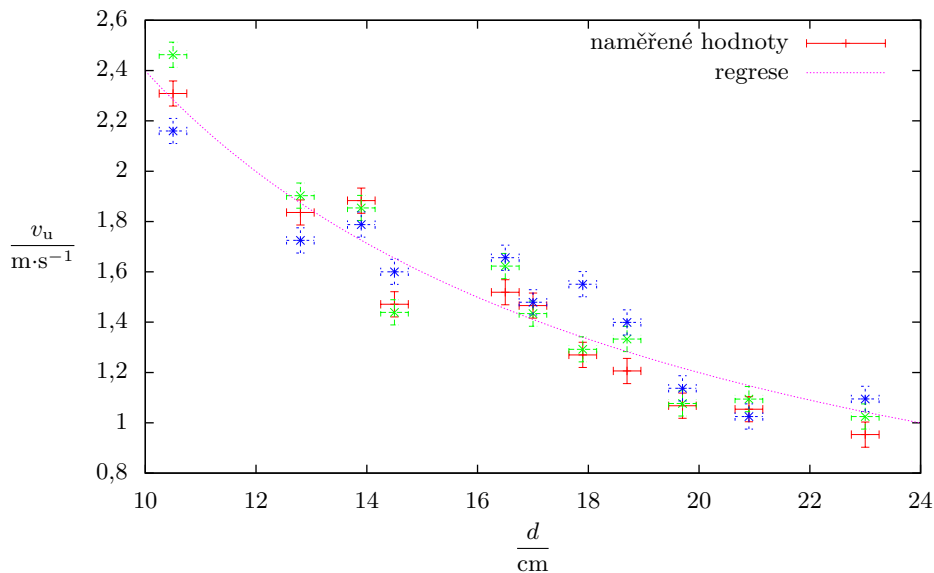
Jelikož balónek nebyly kulaté (menší balónek se kouli blížily více, viz obrázek 1) a v modelu jsme balónek modelovali kouli, nedá se též jednoznačně určit jeho rozměr. Proto byl brán průměr průmětu do vodorovné roviny (s tím, že balónek se pouštěly otvorem dolů), přičemž byl měřen s nejistotou asi $0,5 \text{ cm}$.

Nejistota měření hmotnosti byla malá, použité váhy rozlišují $0,01 \text{ g}$.

Při pohledu na grafy na obrázcích 4 a 5 je zřejmé, že naměřené hodnoty mají rozptyl větší než odhadnuté nejistoty. Jak již bylo zmíněno výše, pohyb balónku, který nemá tvar koule s těžištěm ve svém středu, z velké části ovlivňuje i to, jak natočený jej pustíme.

Při takto velkém rozptylu se nedá jednoznačně říci, zda naměřené hodnoty korespondují s teoreticky odvozenou závislostí. V obou případech je trend správný (tj. velikost ustálené rychlosti klesá se zvyšující se velikostí balónku a klesá se zvyšující se hmotností závaží), nicméně více se toho říci nedá.

Pokud bychom pro výpočet velikosti odporové síly použili Stokesův vztah, tedy předpoklá-



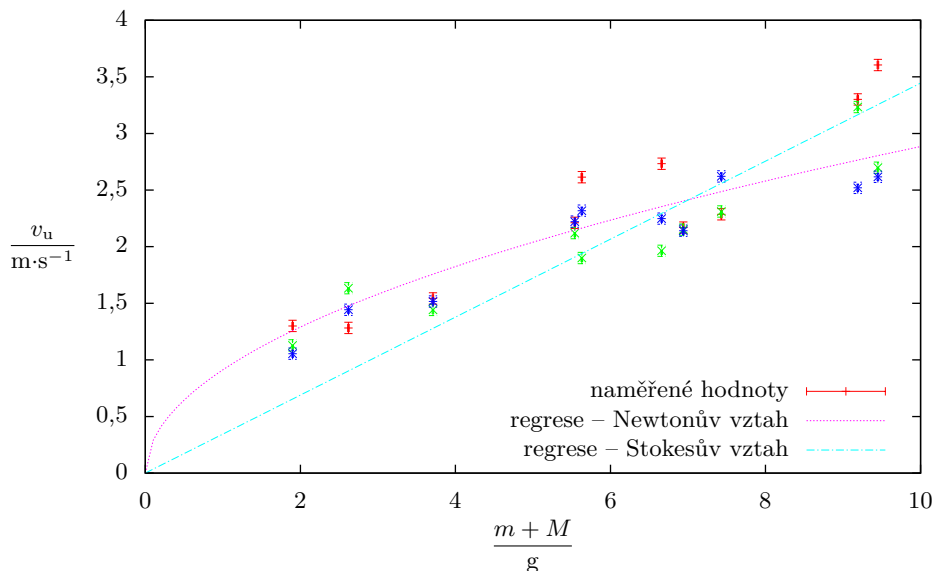
Obr. 4: Závislost velikosti ustálené rychlosti na velikosti balónku. Barevně jsou pouze pro přehlednost odlišena jednotlivá měření.

dali bychom, že velikost odporové síly je přímo úměrná průměru koule a velikosti její rychlosti, dostali bychom též, že ustálená rychlost je nepřímo úměrná průměru koule. Závislost na hmotnosti by však byla jiná – velikost ustálené rychlosti by byla přímo úměrná $m + M$. Naměřená data na obrázku 5 bychom tedy prokládali přímkou procházející počátkem (pokud by efektivní hmotnost balónku byla nulová a náklad by byl též nulový, výslednice tíhové a vztlakové síly by byla nulová, tudíž po upuštění by se balónek nezačal pohybovat), což na naměřené hodnoty zjevně nesedí.

Závěr

Analýzou videí padajících balónků v programu Tracker byla zjištěna závislost rychlosti balónku na jeho velikosti (obrázek 4) a dále závislost této rychlosti na hmotnosti balónku (obrázek 5). Použité balónky nebyly po nafouknutí symetrické, proto se při pádu různě otáčely (viz obrázek 1), kvůli čemuž rychlost nebyla během žádné fáze pohybu konstantní.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

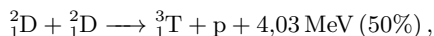
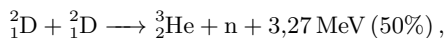


Obr. 5: Závislost velikosti ustálené rychlosti na hmotnosti balonku se závažím. Barevně jsou pouze pro přehlednost odlišena jednotlivá měření.

Úloha VI.S ... seriálová

6 bodů; průměr 2,44; řešilo 9 studentů

- Spočítejte dobu udržení energie v tokamaku COMPASS, kde je energie plazmatu 5 kJ a ohmický ohřev 300 kW.
- Spočítejte, jaký alfa ohřev by byl v tokamaku COMPASS, pokud by v něm hořela DT směs. Typická teplota plazmatu je 1 keV, hustota 10^{20} m^{-3} , objem plazmatu cca 1 m^3 . Při uvážení ohmického ohřevu z předešlého příkladu spočítejte Q .
- S využitím obrázku v textu seriálu a znalosti DD reakce



kde opět 3/4 energie v první reakci odnáší neutron, spočítejte celkový ohřev plazmatu, který se vyvine během jedné DD reakce (uvažujte, že následně proběhne i DT fúze s produktem druhé reakce), a odhadněte nároky na dobu udržení při hustotě 10^{20} m^{-3} a teplotě 10 keV.

Robin.

- Doba udržení energie je definovaná jako poměr energie v plazmatu a dodávaného příkonu

$$\tau_E = \frac{W}{P_H} = 17 \text{ ms}.$$

- Pro výpočet ohřevu od alfa částic použijeme vztahy z minulého dílu seriálu

$$p_\alpha = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle E_\alpha,$$

příčemž je z obrázku nutné odhadnout účinný průřez reakce pro 1 keV, tj. zhruba $10^{-26} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Po dosazení dostaneme hodnotu ohřevu přibližně

$$p_{\alpha} = 14 \text{ W}.$$

Když tuto hodnotu vydělíme ohmickým příkonem, dostaneme $Q = 0,00004$.

- c) V první větvi DD reakce se na ohřev plazmatu využije 1/4 uvolněné energie, tj. 0,82 MeV. V druhé části se nejprve uvolní celá energie z první reakce (tj. 4,03 MeV) a následně 3,5 MeV z DT reakce. Po zprůměrování daném pravděpodobnostmi obou větví získáme průměrně 4,2 MeV.

Z grafu účinných průřezů vyplývá, že pro DD reakci a teplotu 10 keV je účinný průřez cca $10^{-24} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ a celkový fúzní výkon na jednotku objemu bude přibližně

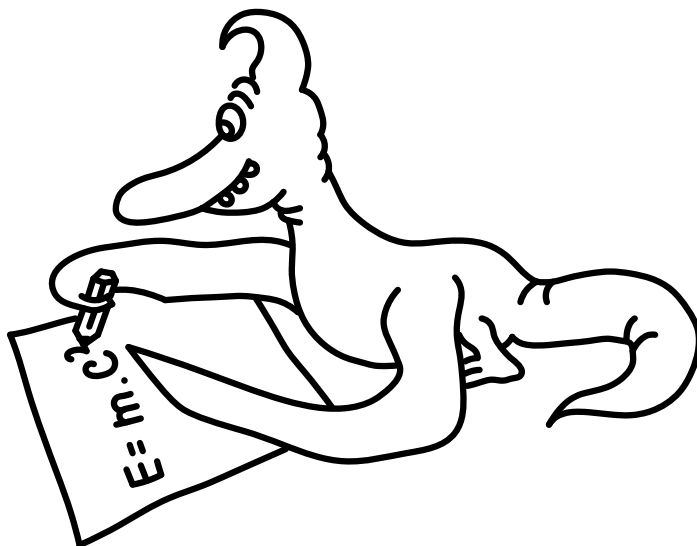
$$p_{\text{DD}} = 1,6 \text{ kW}.$$

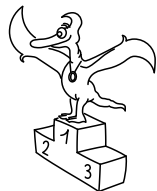
Pro splnění Lawsonova kritéria bude zapotřebí doba udržení energie

$$\tau_{\text{E}} > \frac{12T}{n\langle\sigma v\rangle E_{\alpha}},$$

po dosazení vyjde limita zhruba 285 s.

Michael Komm
robin@fykos.cz





Konečné pořadí řešitelů XXVI. ročníku



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student</i>	Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
			4	4	4	4	4	5	8	6	39	<i>100</i>	236
1.	Jiří Jarošík	G J. Vrchlického, Klatovy	4	4	3	1	2	-	6	1	21	<i>61</i>	139
2.	Anna Kufová	G M. Koperníka, Bílovec	4	4	1	2	1	2	6	2	22	<i>51</i>	121
3.	Klára Stefanová	G B. Němcové, Hradec Králové	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>63</i>	64
4.	František Zajíc	G, Nymburk	4	4	-	1	-	-	-	-	9	<i>78</i>	54
5.	Marek Otýpka	G, Židlochovice	4	-	4	1	1	-	-	-	10	<i>64</i>	53
6.	Filip Šmejkal	G Uherské Hradiště	-	4	-	1	0	-	-	-	5	<i>42</i>	45
7.	Jaroslav Cerman	G a SOŠ, Jilemnice	2	4	-	-	-	-	-	-	6	<i>57</i>	43
8.	Lukáš Kotlaba	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>66</i>	42
9.	Jakub Kolář	Reálné G a ZŠ, Prostějov	-	-	2	-	1	1	6	-	10	<i>47</i>	40
10.	Milan Zongor	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	4	-	-	-	4	-	-	10	<i>53</i>	34
11.	Petr Vítovský	G Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>63</i>	31
12.	Diana Miezgová	G Liptovský Hrádok	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>65</i>	26
13.	Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	-	-	-	-	-	-	-	2	<i>38</i>	23
14.	Pavel Kůs	G J. Š. Baara, Domažlice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>81</i>	17
15.	Karel Chládek	G, Lanškroun	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>40</i>	16
16.	Michal Ržonca	G L. Štúra, Zvolen	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>42</i>	15
17.	Pavel Grepl	G J. Wolкера, Prostějov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>37</i>	13
18.	Alena Košáková	G, Strakonice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>55</i>	12
19.-22.	Šimon Jelínek	G, Mostecká, Chomutov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>69</i>	11
19.-22.	Jakub Novotný	G Brno-Řečkovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>52</i>	11
19.-22.	David Pokorný	G, Bučovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>65</i>	11
19.-22.	Ondřej Poláček	G F. Palackého, Val. Meziříčí	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>69</i>	11
23.-25.	Vojtěch Kaprál	G J. Wolкера, Prostějov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>38</i>	10
23.-25.	Josef Kolář	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>83</i>	10
23.-25.	Martin Kudělka	G, Neumannova, Žďár n. S.	4	-	-	0	-	-	-	-	4	<i>48</i>	10
26.-29.	Ondřej Běhávka	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>100</i>	8
26.-29.	Timotej Mareš	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>50</i>	8
26.-29.	Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	4	4	-	-	-	-	-	-	8	<i>100</i>	8
26.-29.	Honza Touš	G, Nymburk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>67</i>	8
30.	Petr Martinek	G, Voděradská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>56</i>	5
31.-35.	Jan Alfery	G Na Pražače, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>100</i>	4
31.-35.	Michal Fiala	G Brno-Řečkovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>100</i>	4
31.-35.	Pavel Herínek	ZŠ Luhačovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>100</i>	4
31.-35.	Vojtěch Juríček	G, Kralupy	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>50</i>	4
31.-35.	Vítek Paulík	G, Nymburk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>100</i>	4
36.	Matěj Kosma	SPŠ Ostrava - Vítkovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>25</i>	3
37.	Ladislav Hustý	G, Frýdlant nad Ostravicí	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>25</i>	2

Kategorie druhých ročníků


jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
		4	4	4	4	4	5	8	6	39	100	236
1. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	6	4	0	4	5	8	2	33	77	176
2. <i>Tomáš Fiala</i>	G, SOŠ a VOŠ, Ledec n. Sáz.	4	6	4	2	3	-	-	3	22	72	139
3. <i>Martin Kihoulou</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	0	2	2	-	3	2	-	11	66	132
4. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	4	6	4	1	1	-	-	2	18	73	119
5. <i>Mikuláš Zindulka</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	77	105
6. <i>Erik Döme</i>	G Hubeného, Bratislava	2	4	-	-	-	-	8	-	14	66	91
7. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	-	-	-	-	-	-	-	-	-	73	84
8. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	4	4	-	-	-	-	-	-	8	75	79
9. <i>Miloslav Staněk</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	4	6	-	-	-	-	-	-	10	89	74
10. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76	68
11. <i>Samuel Kočiščík</i>	G Poštová, Košice	2	6	3	1	-	5	-	-	17	73	62
12. <i>Ondřej Bohdal</i>	G Jura Hronca, Bratislava	4	4	-	-	-	-	-	-	8	79	55
13. <i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	-	-	-	-	-	-	-	-	-	66	53
14. <i>Dušan Stěhule</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	4	4	-	-	-	-	-	-	8	72	50
15. <i>Zdeněk Turek</i>	G a SOŠ, Rokycany	2	4	-	-	-	-	-	-	6	78	45
16. <i>Jakub Dvořák</i>	G, Botičská, Praha	4	4	-	-	-	-	-	-	8	76	44
17. <i>Štěpán Štěpán</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	84	37
18. <i>Petr Doležal</i>	G Z. Wintra, Rakovník	-	-	-	-	-	-	-	-	-	82	32
19. <i>Petr Smíšitel</i>	G, Bučovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	82	27
20. <i>Jakub Maruška</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	26
21. <i>Radovan Zeman</i>	G, Uničov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	25
22. <i>Marek Liška</i>	G a SOŠPg, Jeronýmova, Liberec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	83	24
23. <i>Petr Buchal</i>	G, Mimoň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	23
24. <i>Štefan Stanko</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	65	20
25. <i>Filip Čonka</i>	G L. Štúra, Zvolen	-	-	-	-	-	-	-	-	-	66	19
26. <i>Benedikt Peňko</i>	G Matyáše Lercha, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	71	15
27.-29. <i>Olga Leskovjanová</i>	Masarykovo G, Vsetín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58	14
27.-29. <i>Matěj Sehnal</i>	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	14
27.-29. <i>Hana Šáchová</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	48	14
30. <i>Jan Ulrich</i>	G a SOŠE, Sedlčany	-	-	-	-	-	-	-	-	-	71	12
31.-34. <i>Matěj Malý</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	8
31.-34. <i>Jan Marek</i>	G Zábřeh	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	8
31.-34. <i>Jan Soukup</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	8
31.-34. <i>Petr Turnovec</i>	SOŠ a SOU, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	8
35.-36. <i>František Pavelka</i>	G, Uničov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	6
35.-36. <i>Veronika Veresová</i>	G Rimavská Sobota	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	6
37.-40. <i>Dávid Barbora</i>	G Fr. Švantnera	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	4
37.-40. <i>Stanislav Bartoš</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	4
37.-40. <i>Jana Orságová</i>	Masarykovo G, Vsetín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	24	4
37.-40. <i>Dávid Sekáč</i>	SZŠ Moyzesova, KE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	22	4
41.-42. <i>Petra Hrubcová</i>	G, Nad Alejí, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25	2
41.-42. <i>Ondřej Soukup</i>	Gymnázium Mozartova, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	2
43. <i>Andrej Peleš</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student</i>	škola <i>Pilný</i>	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
	MFF UK	2	2	4	4	4	5	8	6	35	100	212
1. <i>Jakub Kvorcka</i>	G, Dubnica n. Váhom	2	4	4	2	1	1	6	2	22	77	155
2. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	99	109
3. <i>Radka Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	2	2	3	2	1	4	6	–	20	65	108
4. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	2	2	2	1	1	4	5	–	17	64	97
5. <i>Jiří Guth</i>	G, Jírovцова, České Budějovice	2	3	3	–	–	–	–	–	8	89	88
6. <i>Peter Hojnoš</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	2	2	–	1	–	–	–	–	5	59	85
7. <i>Daniel Slezák</i>	Svobodná chebská škola	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	69
8. <i>Lukáš Knob</i>	G, Kojetín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	62
9.–10. <i>Petr Kepčija</i>	G, Jírovцова, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	59
9.–10. <i>Viktor Skoupý</i>	G, Moravská Třebová	2	2	–	–	–	–	–	–	4	71	59
11. <i>Lucie Valentová</i>	G, Boskovice	1	2	1	–	–	–	5	–	9	55	56
12. <i>Mark Daniel</i>	G Párovská, Nitra	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	48
13.–14. <i>Adam Práda</i>	G, Ostrov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	33
13.–14. <i>Karolína Šromeková</i>	ŠpMNDaG Teplická	2	2	3	1	–	4	6	–	18	69	33
15. <i>Martin Jurček</i>	G, Studentská, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	78	32
16. <i>Míchal Belina</i>	G Volgogradská, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	30
17.–18. <i>Martin Šípka</i>	G Kežmarok	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	25
17.–18. <i>Martin Wirth</i>	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	25
19. <i>Marek Koščo</i>	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	22
20.–21. <i>Jaroslav Hofierka</i>	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	81	21
20.–21. <i>Vendula Kotyzová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	21
22. <i>Jiří Jaskowiec</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	19
23. <i>Václav Dvořáček</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	18
24. <i>Tomáš Zahradník</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	17
25. <i>Jan Studený</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	15
26.–30. <i>Patriks Aldersons</i>		–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	14
26.–30. <i>Ota Čapek</i>	G, Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	14
26.–30. <i>Daniel Kolář</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	14
26.–30. <i>Ján Ondráš</i>	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	14
26.–30. <i>Patrik Štefek</i>	Matičín G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	14
31.–32. <i>Viktor Dolník</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	12
31.–32. <i>Jiřina Svobodová</i>	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	12
33.–35. <i>Jakub Kušnír</i>	G, L. Štúra, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	–	–	30	8
33.–35. <i>Karolína Pěčková</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	8
33.–35. <i>Tereza Štěpánová</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	8
36.–39. <i>Irena Bačinská</i>	ŠpMNDaG Teplická	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	7
36.–39. <i>Lenka Hackerová</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	7
36.–39. <i>Veronika Chadimová</i>	G, Vysoké Mýto	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	7
36.–39. <i>Stanislav Valtera</i>	G, Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	117	7
40.–41. <i>Filip Bartůněk</i>	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	6
40.–41. <i>František Prinz</i>	G a JŠ, Břeclav	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6
42.–43. <i>Ege Aygün</i>	Dogus Science School	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	5
42.–43. <i>Tomáš Kořínek</i>	G, Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	5
44.–47. <i>Sarp Demiralay</i>	Dogus Science School	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	4
44.–47. <i>Aranika Hrušková</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	4
44.–47. <i>Daniela Prokešová</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	4
44.–47. <i>Norbert Slávka</i>	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	4
48.–49. <i>Lukáš Hejda</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	3
48.–49. <i>Filip Januš</i>	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	3
50.–51. <i>Dávid Princík</i>		–	–	–	–	–	–	–	–	–	15	2
50.–51. <i>Jozef Rojník</i>	G L. Štúra, Zvolen	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2
52.–53. <i>Soňa Ondrušová</i>	G, Ostrov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	20	1
52.–53. <i>Matouš Završel</i>	Křesťanské G, Kozinova, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
		2	2	4	4	4	5	8	6	35	100	212
1. <i>Miroslav Hanzelka</i>	G, Česká Lípa	2	2	4	1	4	5	10	3	31	91	184
2. <i>Jakub Šafin</i>	G, P. Horova, Michalovce	2	3	4	4	–	4	6	5	28	81	161
3. <i>Peter Šišan</i>	G PdC, Piešťany	2	3	3	4	2	–	8	–	22	70	117
4. <i>Jakub Bahyl</i>	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	77
5.–6. <i>David Matejov</i>	G, Dubnica n. Váhom	1	3	3	–	–	–	–	–	7	80	76
5.–6. <i>Tereza Uhlířová</i>	G, Omská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	76
7. <i>Lubomír Grund</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	75
8. <i>David Siegert</i>	G, Klášterec n. O.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	55
9. <i>Vít Nosek</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	50
10.–11. <i>Míchal Červenáček</i>	G Púchov	2	3	2	2	1	4	–	2	16	66	46
10.–11. <i>Veronika Dočkalová</i>	G, Elgartova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	46
12. <i>Míchal Buráň</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	78	31
13.–14. <i>Tomáš Gonda</i>	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	97	30
13.–14. <i>Erik Hendrych</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	30
15.–16. <i>Lukáš Fusek</i>	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	66	29
15.–16. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	29
17. <i>Tomáš Kello</i>	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	22
18. <i>Lukáš Tímko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	21
19.–21. <i>Jakub Doležal</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	18
19.–21. <i>Ivana Monková</i>	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	18
19.–21. <i>Tomáš Turlík</i>	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	18
22.–23. <i>Jaroslav Průcha</i>	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	16
22.–23. <i>Bogdan Yaparov</i>		–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	16
24.–26. <i>Ján Dudič</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	9
24.–26. <i>Albert Štěrba</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	9
24.–26. <i>Jana Zelenková</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	9
27. <i>Míchal Nožička</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	8
28. <i>Matúš Uriček</i>	G Púchov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	7
29. <i>David Kasal</i>	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	4
30. <i>Viktor Korba</i>		–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	3
31.–32. <i>Klaudia Mráziková</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2

**FYKOS****UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.