## Úloha I.5 ... Young cylinder

5 bodů; průměr 2,77; řešilo 30 studentů

*Představte si dvouštěrbinový Youngův pokus, jen místo klasického plochého stínítka dejte válec s osou směřující kolmo na spojnici štěrbin. Střed válce je ve vzdálenosti $L$ od štěrbin, poloměr válce je $R = L/2$, vzdálenost štěrbin je $a$. Jak bude vypadat difrakční obrazec po rozvinutí pláště válce do roviny? Udejte polohy maxim pomocí souřadnice $x$ vedené po plášti válce.*

*Terka vypotila úlohu, aby mohla místo schůzky na přednášku.*

Po chvilce zamyšlení nad náčrtkem situace jistě nebyl problém uhádnout, že úloha je opravdu pouze variací na slavný Youngův experiment s trochou té geometrické omáčky. Než ale přikročíme k jádru řešení, dovolíme si stručné odvození notoricky známé podmínky pro interferenční maximum $k\lambda = a \sin \varphi_k$, bez které se v dalším povídání neobejdeme.[1] Připomeňme, že $k \in \mathbb{Z}$ značí řád maxima, $\lambda$ je vlnová délka koherentního záření použitého v experimentu a $a$ je vzdálenost štěrbin. Je zřejmé, že zadání nám dovoluje ignorovat 3D povahu problému a lze tedy uvažovat pouze 2D řez kolmý na stínítko. Potom $\varphi_k$ definují jednotlivé směry jakožto odchylky (počítáme v kladném smyslu) od přímky kolmé na stínítko, která prochází středem $\mathsf{O}$ spojnice štěrbin $\mathsf{S}_1$ a $\mathsf{S}_2$ (nazývejme ji dále *osou symetrie*).

Uvažujme nyní dva libovolné paprsky vycházející ze štěrbin. Ty se v obecném případě protnou v bodě $\mathsf{P}$. Označme $|\mathsf{S}_{1,2}\mathsf{P}| = s_{1,2}$ a $|\mathsf{OP}| = s$. Potom (kosinová věta)

$$s_{1,2} = \sqrt{s^2 + \frac{a^2}{4} \pm as \sin \varphi} = s\sqrt{1 + \frac{a^2}{4s^2} \pm \frac{a}{s} \sin \varphi}\,,$$

kde $\varphi$ je odchylka ve smyslu definice z předchozího odstavce. Uvažujeme-li ale pouze taková $s$, že $s \gg a$, potom můžeme s chutí aplikovat přibližný vztah

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx,\ \forall n \in \mathbb{R}$$

pro $x \ll 1$ a po chvíli zápasení dostaneme požadovaný výsledek

$$s_1 - s_2 = \Delta = a \sin \varphi\,,$$

neboť aby došlo v $\mathsf{P}$ ke konstruktivní interferenci, musí být $\Delta = k\lambda$. Vidíme tedy, že veličina $\varphi$ je plně postačující k popisu problému.

Nyní se budeme zabývat případem, kdy světlu vystupujícímu ze štěrbin vložíme do cesty válec tak, jak to definuje zadání. K popisu polohy na povrchu válce tedy zavedeme úhel $\alpha$, který počítáme v kladném směru od průsečíku osy symetrie s povrchem válce (toho blíže ke štěrbinám), z něhož se na kýženou souřadnici $x$ dostaneme přepočtem $x = R\alpha$. Je vidět, že kromě množiny maxim, co se na povrch válce zobrazí, existuje i neprázdná množina těch, kterým se to nepovede. Poslední hypotetické maximum, které bychom na válci uviděli, je přitom definováno tečnou z $\mathsf{O}$ na válec, takže se můžeme omezit pouze na taková $\varphi$, která splňují[2]

$$|\sin \varphi| \leq \frac{R}{L} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |k| \leq \frac{a}{2\lambda} \text{ a } |\varphi| \leq \frac{\pi}{6}\,,$$

[1] Jako jednoduché cvičení se čtenář může přesvědčit, že v obecnější situaci, kdy na štěrbiny dopadají paprsky pod úhlem $\psi$, můžeme psát

$$k\lambda = a\left(\sin \varphi_k - \sin \psi\right)\ .$$

[2] Je jedno, jestli vzdálenost $L$ bereme od štěrbin nebo od bodu $\mathsf{O}$, neboť za předpokladu $L \gg a$ obě tyto varianty splývají.

což mimochodem znamená, že $|\alpha| \leq \pi/3$. Dále, ze sinové věty můžeme napsat

$$\frac{s}{\sin\alpha} = \frac{L}{2\sin\varphi}\,,$$

kde (pro změnu z kosinové věty)

$$s = L\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\alpha}\,.$$

Označme nyní $f \equiv f(k) = a/(2k\lambda)$. Potom

$$\frac{L\sqrt{5/4 - \cos\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{L}{2\sin\varphi} = \frac{La}{2k\lambda} = Lf,$$

a tedy

$$f^2\sin^2\alpha = \frac{5}{4} - \cos\alpha\,.$$

To vede (po použití $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$) na kvadratickou rovnici ($y = \cos\alpha$)

$$f^2y^2 - y + \left(\frac{5}{4} - f^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad y_{1,2} = \frac{1 \pm 2\sqrt{(f^2-1)\,(f^2-1/4)}}{2f^2}$$

a dostáváme se k důležité povinnosti vybrat to správné řešení. Víme, že pro kladná $k$ je $k \leq a/(2\lambda)$, a tedy $f \geq 1$, takže můžeme s klidnou hlavou zkoumat ku příkladu hodnotu $y_{1,2}$ pro $f = 10$, neboť funkce $y(f)$ by byla pro $f \in \mathbb{R}$ zřejmě spojitá na intervalu $\langle 1, \infty)$. Zkoumaná hodnota je ale pro případ znaménka mínus evidentně záporná, i když $\forall k \in \langle 0, a/(2\lambda)\rangle : \alpha \in \langle 0, \pi/3\rangle$, a tedy $\cos\alpha \geq 0$ a to je jasný spor. Správně je tedy znaménko plus. Rekapitulace na závěr: získali jsme posloupnost $y_k \equiv y[f(k)]$, která pro $|\alpha| \leq \pi/3$ udává polohy $\alpha_k = x_k/R$ na povrchu válce pro $|k| \leq a/(2\lambda)$ (připomeňme, že $y_k = \cos\alpha_k$).

Toť tedy k řešení zadaného úkolu. Samozřejmě bychom se mohli pokusit analyticky vyjádřit samotné rozložení intenzity na povrchu válce, ale již při pohledu na výsledek „pouhého“ snažení se o udání polohy maxim nám musí být zřejmé, že pravděpodobně nepůjde o nic elegantně zapsatelného, zvláště pokud se neomezíme na standardní aproximace a přidáme si tomu například ubývání intenzity se vzdáleností od zdroje.

***Jakub Vošmera***
`kuba@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.