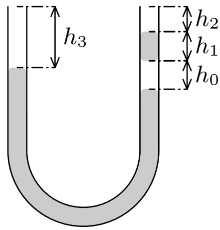
Úloha II.5 ... horko u U-trubice

5 bodů; průměr 2,73; řešilo 26 studentů



V U-trubici je rtuť se vzduchovou bublinou výšky h_0 v jednom rameni, jak můžete vidět na obrázku. Co se stane, pokud se okolní atmosféra změní následujícími způsoby? Předpokládejte, že rtuť při změně teploty nemění objem (hustotu), stejně tak i sklo, ze kterého je U-trubice, a vzduch se chová jako ideální plyn. Původní stav okolní atmosféry je popsán teplotou $T_0 = 300\,\mathrm{K}$, tlakem $p_\mathrm{a} = 10 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ a složením je vzduch. Předpokládejte, že celý systém je stále v termodynamické rovnováze, rovněž bublinu považujte za válec.

a) *Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek a přitom budou ramena U-trubice volná.*
b) *Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek, ale před touto změnou pevně uzavřeme oba konce U-trubice.*
c) *Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek, ale před zahřátím pevně uzavřeme pouze jeden konec U-trubice.*

Pro všechny body zadání určete výsledné rozměry bubliny ve rtuti a výškový rozdíl mezi hladinami v obou částech U-trubice.

Bonus *Započtěte lineární teplotní roztažnost rtuti.*

Karel se zapotil.

Nejdříve se podíváme na to, co nám říká zadání, co budeme uvažovat a co můžeme zanedbat. Dle zadání máme zanedbat teplotní roztažnost rtuti a skla, proto se nebude měnit „délka“ jednotlivých částí rtuťového sloupce, viz Guldinova věta.[1] Ale určitě máme uvažovat vlastnosti atmosféry. Protože vzduch má deset tisíckrát menší hustotu než rtuť, zanedbáme jeho hustotu proti hustotě rtuti, což znamená, že nebudeme uvažovat změnu tlaku vzduchu zapříčiněnou okolní gravitací. U rtuti ale již gravitační interakci započítat musíme. Dále je v zadání uvedeno, že je vše v termodynamické rovnováze, což znamená, že teplota vzduchu uvnitř U-trubice je stejná jako teplota vzduchu okolo.

Rovnováha

Budou-li oba konce volné, tak na horních hladinách rtuti bude atmosférický tlak a musíme z hydrostatické rovnováhy určit rozdíl $h_2^0 - h_3^0$ v závislosti na h_0^0, h_1^0 a $h_2^0 + h_3^0$ (celkové množství rtuti v trubici).

Napíšeme proto rovnici pro hydrostatický tlak ve spodní části trubice

$$p_\mathrm{a} + (H - h_3^0)\varrho_\mathrm{Hg} g = p_\mathrm{a} + (H - h_2^0)\varrho_\mathrm{Hg} g - h_0^0 \varrho_\mathrm{Hg} g\,,$$

kde jsme označili H celkovou výšku trubice. Jednoduchou algebraickou úpravou dostáváme

$$h_3^0 - h_2^0 = h_0^0\,, \tag{1}$$

kde horní index nula značí *rovnovážný stav*, nikoli umocňování. Protože jde o počáteční stav, nemá cenu se zajímat o velikost bubliny, její výška je stále h_0. Ještě si dopočítáme, jaký bude tlak v bublině. Protože na bublinu tlačí jednak atmosféra, jednak rtuť výšky h_1, bude tlak uvnitř roven

$$p_{\mathrm{b}_0} = p_\mathrm{a} + h_1 \varrho_\mathrm{Hg} g\,.$$

[1] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Guldinova_věta`

Volné konce

Pokud zvýšíme teplotu na dvojnásobek, jediná část našeho systému, které se to dotkne, je bublina. Její tlak se nezmění, protože stále je nad ní atmosférický tlak a kapka výšky h_1, proto bude tlak uvnitř p_{b_0}. Vzhledem k platnosti stavové rovnice pro ideální plyn platí $h_0 = 2h_0^0$, protože jsme teplotu zvýšili na dvojnásobek za zachovávajícího se tlaku. Můžeme užít stejného postupu jako v předešlém případě a dostáváme podmínku pro rovnováhu, tj. rozdíl hladin ve tvaru

$$\Delta = h_3 - h_2 = h_0 = 2h_0^0\,,$$

který je stejný jako velikost bubliny.

Oba konce uzavřené

Nyní již bude do hry vstupovat kromě hydrostatiky též termodynamika, protože budeme muset uvažovat změny tlaku jednotlivých částí plynu. Napíšeme soustavu rovnic popisující danou situaci, jednak to budou stavové rovnice pro ideální plyn, kde označíme $\Lambda = \varrho_{\mathrm{Hg}} g$, jednak rovnice rovnováhy tlaků pro oba kusy rtuti, nakonec také podmínku neměnné délky trubice, resp. rtuti v ní

$$p_3 + (H - h_3)\Lambda = p_2 + h_1\Lambda + p_0 + (H - h_0 - h_1 - h_2)\Lambda\,, \tag{2}$$

$$p_0 = p_2 + h_1\Lambda\,, \tag{3}$$

$$\frac{(p_\mathrm{a} + h_1\Lambda)h_0^0}{T_0} = \frac{p_0 h_0}{T}\,,$$

$$\frac{p_\mathrm{a} h_2^0}{T_0} = \frac{p_2 h_2}{T}\,,$$

$$\frac{p_\mathrm{a} h_3^0}{T_0} = \frac{p_3 h_3}{T}\,,$$

$$h_0 + h_2 + h_3 = h_0^0 + h_2^0 + h_3^0 = L_0\,, \tag{4}$$

kde horní index 0 označuje klidovou délku, která byla určena v předchozím bodu. Toto je soustava rovnic pro neznámé h_0, h_2, h_3, p_0, p_2 a p_3.

Nejdříve zavedeme substituci $p_i = \alpha_i/h_i$ pro $i = 0, 2, 3$, kde α_i jsou číselné konstanty. Dále v rovnici (2) zjistíme, že při použití rovnice (4) vymizí všechny členy obsahující h až na h_3 a dále zbudou členy obsahující tlak. Do rovnice (3) pouze dosadíme z naší substituce za p_i. Dostáváme

$$\frac{\alpha_3}{h_3} = \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_0}{h_0} + (L_0 + 2h_3)\Lambda\,,$$

$$\frac{\alpha_0}{h_0} = \frac{\alpha_2}{h_2} + h_1\Lambda\,,$$

$$h_3 = L_0 - h_0 - h_2\,.$$

V našem případě po dosazení za α_0/h_0 do první rovnice, patřičném roznásobení a dosazení $h_3 = L_0 - h_0 - h_2$, dostáváme

$$\alpha_3 h_2 = 2\alpha_2(h_0 + h_2) + (h_1 + L_0 - 2h_0 - 2h_2)h_2(L_0 - h_0 - h_2)\Lambda\,,$$

$$\alpha_0 h_2 = \alpha_2 h_0 + h_0 h_1 h_2 \Lambda\,,$$

což můžeme upravit na

$$\begin{aligned}0 =& 2h_2^3\Lambda + h_2^2(-3L_0 + 4h_0 - h_1)\Lambda + h_2(2h_0^2 - h_0(h_1 + 3L_0) - \\ &- \alpha_3 + 2\alpha_2 + h_1 L_0 + L_0^2) + 2\alpha_2 h_0 \,, \\ 0 =& h_2 h_0 h_1 \Lambda - h_2\alpha_0 + h_0\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{h_2\alpha_0}{h_2 h_1 \Lambda + \alpha_2} \,.\end{aligned}$$

Dosadíme do první rovnice za h_0. Získáme tím analyticky neřešitelnou rovnici pátého stupně pro h_2, h_0 a h_3 získáme pomocí zpětných substitucí. Tím také určíme rozdíl hladin $\Delta = h_3 - h_2$ a velikost bubliny je h_0.

Jeden konec uzavřený

Je-li jeden z konců uzavřený, tak řešení bude vypadat obdobně jako v předešlém případě, kdy jsme studovali oba konce uzavřené, ale víme, že p_2 resp. p_3 bude atmosférický tlak a také odpadne jedna ze stavových rovnic, která vázala vzdálenost od konce trubice s tlakem. Zde si ukážeme řešení pro případ, kdy je uzavřen pouze pravý konec trubice a levý je volný.

Sepíšeme si stejnou soustavu rovnic jako v úkolu b)

$$\begin{aligned} p_\mathrm{a} + (H - h_3)\Lambda &= p_2 + h_1\Lambda + p_0 + (H - h_0 - h_1 - h_2)\Lambda \,, \\ p_0 &= p_2 + h_1\Lambda \,, \\ \frac{(p_\mathrm{a} + h_1\Lambda)h_0^0}{T_0} &= \frac{p_0 h_0}{T} \,, \\ \frac{p_\mathrm{a} h_2^0}{T_0} &= \frac{p_2 h_2}{T} \,, \\ h_0 + h_2 + h_3 &= h_0^0 + h_2^0 + h_3^0 = L_0 \,, \end{aligned}$$

Opět provedeme substituci za p_i pomocí α_i a využijeme poslední rovnice pro zjednodušení rovnice první.

$$\begin{aligned} p_\mathrm{a} &= \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_0}{h_0} + (L_0 - 2h_0 - 2h_2)\Lambda \,, \\ \frac{\alpha_0}{h_0} &= \frac{\alpha_2}{h_2} + h_1\Lambda \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{\alpha_0 h_2}{\alpha_2 + h_1 h_2 \Lambda} \,, \\ h_3 &= h_0 + h_2 \,. \end{aligned}$$

V tomto případě budeme postupovat analogicky dosazovací metodou. Obdržíme polynom čtvrtého stupně v h_2, h_0 a h_3 opět získáme zpětnou substitucí. A rozdíl hladin je pak $\Delta = h_3 - h_2$, velikosti bubliny je h_1.

Započtení teplotní roztažnosti rtuti

Myšlenka pro řešení této části je stejná jako v případech předešlých. Jediný rozdíl je v tom, že se změní velikost kapky rtuti dle vztahu

$$h_1 = \Gamma h_1^0 \,,$$

kde opět horní index 0 značí klidovou délku a $\Gamma = 1 + \alpha \Delta T$ je relativní změna délky rtuti. Dále budeme muset zavést parametr L, jenž označuje celkovou délku trubice. Podmínka pro neměnnost délky trubice a rtuti v ní se změní na

$$L - (h_0^0 + h_2^0 + h_3^0) = (L - (h_0 + h_2 + h_3))\,\Gamma\,.$$

Dále bude postup řešení stejný. Musíme akorát dát pozor na to, že se hustota rtuti sníží v poměru odpovídajícím objemové roztažnosti, a proto se změní též hodnota konstanty Λ.

Započtení teplotní roztažnosti skla

Pokud bychom chtěli započíst též teplotní roztažnost skla, postup bude naprosto stejný jako při započtení pouze teplotní roztažnosti rtuti, akorát budeme uvažovat Γ'. Nejdříve uvažujme, že má rtuť stejnou roztažnost jako sklo, potom se celá aparatura pouze transformuje podobnostní transformací a výsledek bude stejný. Pokud bude teplotní roztažnost rtuti jiná, můžeme nechat rtuť roztáhnout „nadvakrát“ – nejdříve stejně jako sklo a pak ten zbytek, což je opět ekvivalentní případu, kdy se zanedbá roztažnost skla, pouze nakonec uvažovaná roztažnost rtuti musí být jiná než tabulková.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`