

Úvodem

Milí fykosáci,

je tu poslední brožurka letošního ročníku, kterou vás skrz přiložené zadání první série ponoukáme k řešení ročníku příštího. Gratulujeme všem, kteří dosáhli hezkého umístění v pořadí řešitelů, ale hlavně všem těm, kteří mají pocit, že je čas strávený s FYKOsem nějakým způsobem obohatil.

Příjemné prázdniny přeji

Organizátoři



Řešení VI. série

Úloha VI.1 ... antijádro

2 body; průměr 1,79; řešilo 57 studentů

Máme dvě homogenní nerotující planety tvaru dokonalých koulí s vnějšími poloměry R_Z . První z nich je dokonalá koule o hustotě ρ a na jejím povrchu je gravitační zrychlení a_g . Druhá je dutá do poloviny jejího poloměru a až pak je plná.

- Pokud by obě planety byly ze stejného homogenního materiálu, na povrchu které planety bude větší gravitační zrychlení a jaký bude poměr mezi hodnotami gravitačního zrychlení na obou planetách?
- Pokud by i na povrchu druhé planety bylo gravitační zrychlení a_g , jaká by musela být hustota druhé planety?

Karel zase vymyslel něco trochu astro s dutou zemí.

Intenzita gravitačního pole, a tedy i zrychlení na volný objekt jím vytvářené, je stejná, ať už jsme vzdáleni od hmotného bodu s nějakou hmotností či jsme na povrchu tělesa, které je kulové, má sféricky symetricky rozloženou hustotu (tj. závisí pouze na vzdálenosti od jeho hmotného středu) a jeho poloměr je roven vzdálenosti od hmotného bodu v předchozím případě. Gravitační zrychlení na povrchu homogenní koule tedy můžeme vypočítat ze známého vztahu $a_g = Gm_i/R_Z^2$, kde m_i je hmotnost dané koule. Hmotnost plné koule ze zadání, kterou si označíme M_1 je tedy pevně dána jako $M_1 = a_g R_Z^2/G$.

- Hmotnosti koulí můžeme počítat z objemů, tedy $M_1 = \rho V_Z$ a $M_2 = \rho(V_Z - V_{in})$, kde ρ je hustota koulí, V_Z je objem plné koule a V_{in} je objem dutiny. Objem koule je obecně $V_i = (4/3)\pi r_i^3$, kde r_i je poloměr dané koule. Vyjádřeme si nyní hmotnost duté koule M_2 v závislosti na hmotnosti M_1

$$M_2 = \rho(V_Z - V_{in}) = \rho \frac{4}{3}\pi \left(R_Z^3 - \frac{R_Z^3}{8} \right) = \frac{7}{8} M_1 .$$

Gravitační zrychlení na povrchu první, plné, planety by bylo

$$a_{g1} = \frac{GM_1}{R_Z^2} .$$

Gravitační zrychlení na povrchu druhé, duté, planety by bylo

$$a_{g2} = \frac{GM_2}{R_Z^2} = \frac{7GM_1}{8R_Z^2} = \frac{7}{8}a_{g1}.$$

Odpovědí tedy je, že gravitační zrychlení na povrchu první planety by bylo větší, a to 8/7krát víc než na druhé planetě.

- b) Ponechme označení hustoty plné koule jako ϱ a hustotu duté koule označme jako ϱ_2 . Hmotnost obou planet má být stejná, takže hustota duté planety musí být o něco vyšší. Zapišme si vztahy pro gravitační zrychlení na povrchu obou planet v závislosti na hustotě:

$$\tilde{a}_{g1} = G \frac{\varrho V_Z}{R_Z^2}, \quad \tilde{a}_{g2} = G \frac{\varrho_2 (V_Z - V_{in})}{R_Z^2} = G \frac{7\varrho V_Z}{8R_Z^2}.$$

Pokud má platit, že $\tilde{a}_{g1} = \tilde{a}_{g2}$, pak dostáváme výsledek

$$\varrho_2 = \frac{8}{7}\varrho.$$

Pokud dutá planeta bude mít hustotu 8/7krát tak velkou, co plná, pak budou mít obě planety na svém povrchu stejné gravitační zrychlení.

Poznámky k došlým řešením

Poznamenejme, že úloha byla pouze o určení gravitačního zrychlení. Na povrchu Země můžeme měřit spíše rozdíl tíhového zrychlení, ve kterém je i odstředivé zrychlení, a zrychlení způsobeného vztlakovou silou vzduchu. Úloha byla zadána jako jednoduchá a proto jsme ani diskuzi těchto vlivů neočekávali, nicméně bychom za ně dali bonusové body, pokud by byla diskuze správná.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha VI.2 ... go west

2 body; průměr 1,68; řešilo 50 studentů

Již před více než sto lety měření geodetů potvrdila, že když plujeme lodí směrem na západ, ukazují gravimetry větší hodnoty tíhového zrychlení než při cestě na východ. Určete, jaký rozdíl naměříme na rovníku, jestliže nejprve provedeme měření v klidu a poté za konstantní rychlosti 20 uzlů v západním směru.

Mírek se divil, proč lidé neemigrují raději na východ.

Tým geodetů ze zadání, vedený O. Heckerem z Geodetického institutu v Postupimi, měl za úkol proměřit gravitační pole Země v Atlantickém a Tichém oceánu. Měření probíhalo na lodích, které se během experimentu pohybovaly, čímž byla do experimentu zanesena systematická chyba, které si při čtení Heckerových výsledků povšiml maďarský fyzik Loránd Eötvös. Za příčinu chyby považoval rotaci Země, což se při dalších měřeních potvrdilo. Proto se dnes pokles či nárůst tíhového zrychlení v závislosti na východozápadním pohybu označuje jako Eötvösův jev¹.

Naměřený rozdíl v hodnotách tíhového zrychlení určíme čistě z rozdílu odstředivých zrychlení působících na loď v klidu a v pohybu, neboť hodnota gravitačního zrychlení je v dané malé oblasti v čase téměř konstantní. Vše vyšetřujeme v inerciální soustavě spojené se středem

¹http://www.elgi.hu/museum/elatud_.htm

Země. Označme R_Z poloměr Země, ω_Z úhlovou rychlost rotace Země a ω_1 úhlovou rychlost lodi vzhledem k povrchu Země. Potom rozdíl odstředivých zrychlení pro oba pohybové stavy loď vyjádříme jako

$$\Delta a = (\omega_Z - \omega_1)^2 R - \omega_Z^2 R.$$

Znaménka přitom volíme tak, aby záporná hodnota znamenala pokles odstředivého zrychlení, a tedy nárůst tíhového zrychlení. Závorku umocníme a odečteme člen $\omega_Z^2 R$, dostaneme vztah

$$\Delta a = -2\omega_Z\omega_1 R + \omega_1^2 R.$$

Za rychlost lodi v latitudinálním směru dosadíme $v_1 = \omega_1 R$ a upravíme vztah do výsledného tvaru

$$\Delta a = -2\omega_Z v_1 + \frac{v_1^2}{R}. \quad (1)$$

V prvním členu poznáváme složku Coriolisova zrychlení kolmou k povrchu (při pohybu po rovníku je to jeho jediná složka), druhý člen představuje odstředivé zrychlení pohybu po kružnici s poloměrem R . Z řádového odhadu je zřejmé, že druhý člen bude pro běžné rychlosti, kterých loď běžně dosahuje, zanedbatelný. Vztah lze snadno zobecnit pro pohyb v libovolném směru na libovolné zeměpisné šířce, stačí do druhého členu zahrnout pohyb v longitudinálním směru v_2 a první člen přenásobit $\cos \varphi$, kde φ je zeměpisná šířka. Získáme tak vztah

$$\Delta a = -2\omega_Z v_1 \cos \varphi + \frac{v_1^2 + v_2^2}{R},$$

který se pro $\varphi = 0^\circ$, $v_2 = 0$ zřejmě redukuje na vztah (1).

Nyní už zbývá pouze správně dosadit. Rychlost lodi je zadána v uzlech, což je mezinárodní jednotka rychlosti definovaná jako jedna námořní míle za hodinu, v soustavě SI $1 \text{ kt} = 1,852 \text{ km/h} \doteq 0,514 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Dále potřebujeme znát poloměr Země $R_Z = 6370 \text{ km}$ a úhlovou rychlost rotace Země $\omega_Z = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (vypočteno z délky jednoho siderického dne $T_s = 23,93 \text{ h}$). Rovnice (1) dává výslednou hodnotu

$$\Delta a = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Tíhové zrychlení tedy bude při pohybu na západ o $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ větší, než když loď setrvává v klidu.

Miroslav Hanzelka

mirek@fykos.cz

Úloha VI.3 ... kule a šlupka

4 body; průměr 3,41; řešilo 44 studentů

Máme měděnou plnou kouli a měděnou tenkou kulovou šlupku (tak tenkou, že můžete zanedbat její tloušťku). Obě mají při pokojové teplotě stejný poloměr. Jak se bude jejich poloměr měnit, když je začneme ohřívat? (Zapište závislost poloměru na teplotě a okomentujte ji.) U měděné šlupky uvažujte, že má v sobě malé otvory, které vyrovnávají vnitřní a vnější tlak vzduchu.

Karel se inspiroval knížkou Physics for Scientists and Engineers od Serway & Jewetta.

Máme-li při teplotě T_0 tyč délky l_0 , dokážeme malé změny její délky způsobené změnou teploty popsat pomocí koeficientu délkové teplotní roztažnosti α a teplotního intervalu ΔT vztahem

$$l(T_0 + \Delta T) = l_0 (1 + \alpha \Delta T). \quad (2)$$

Malou změnou se rozumí taková, že součin $\alpha\Delta T \ll 1$.

Co se ale děje s plošným nebo prostorovým útvarem? To samé. Představme si, že těleso, které zkoumáme, je složeno z atomů, které jsou navzájem spojeny vazbami, které podléhají stejné deformaci jako pružná tyč (tj. s teplotou se roztahují podle vztahu (2) – je jasné, že když se takto mění délka jedné vazby, při spojení více vazeb za sebe se celková délka tělesa bude měnit stejně). Ukažme si to na obdélníku (strany a, b ; plocha $S_0 = ab$), resp. kvádru (strany a, b, c ; objem $V_0 = abc$). Pokud uvažujeme, že teplotní roztažnost je izotropní (tj. do každého směru se zkoumaný předmět roztahuje stejně), dají se plocha, resp. objem vyjádřit jako

$$S(T_0 + \Delta T) = a(1 + \alpha\Delta T) \cdot b(1 + \alpha\Delta T) = S_0(1 + \alpha\Delta T)^2, \quad \text{resp.}$$

$$V(T_0 + \Delta T) = a(1 + \alpha\Delta T) \cdot b(1 + \alpha\Delta T) \cdot c(1 + \alpha\Delta T) = V_0(1 + \alpha\Delta T)^3.$$

Nyní využijeme předpokladu, že $\alpha\Delta T \ll 1$. Umocníme-li závorky, dostaneme

$$(1 + \alpha\Delta T)^2 = 1 + 2\alpha\Delta T + \alpha^2\Delta T^2,$$

$$(1 + \alpha\Delta T)^3 = 1 + 3\alpha\Delta T + 3\alpha^2\Delta T^2 + \alpha^3\Delta T^3.$$

Jestliže je koeficient α malý, jeho druhá nebo třetí mocnina je ještě menší. Můžeme tedy členy s vyššími mocninami zanedbat a dostáváme pouze lineární závislost.

$$S(T_0 + \Delta T) \approx S_0(1 + 2\alpha\Delta T),$$

$$V(T_0 + \Delta T) \approx V_0(1 + 3\alpha\Delta T).$$

Proč jsme se zabývali těmito vztahy? Odpověď souvisí se zadáním – zvětšuje-li se koule, děje se tak ve všech třech rozměrech. Roztahuje-li se zanedbatelně tenká kulová slupka, mění se rozměry jen dva (předpokládáme, že se všechno děje tak pomalu a rovnoměrně, že nedochází k žádným lokálním deformacím).

Pokud vyjádříme rozměry obou těles pomocí poloměru (první řádek bude odpovídat slupce, druhý plné kouli, bereme r_0 při původní teplotě T_0 , r při teplotě $T_0 + \Delta T$), dostaneme:

$$4\pi r^2 = 4\pi r_0^2(1 + 2\alpha\Delta T), \quad \text{resp.}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3(1 + 3\alpha\Delta T).$$

Z těchto vztahů si už jednoduše můžeme vyjádřit poměr r/r_0 v závislosti na teplotním rozdílu ΔT .

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt{1 + 2\alpha\Delta T}, \quad \text{resp.}$$

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt[3]{1 + 3\alpha\Delta T}.$$

Což znamená, že kulová slupka bude při zahřátí zvětšovat svůj poloměr s druhou odmocninou teplotního rozdílu, zatímco pro plnou kouli bude platit závislost na odmocnině třetí. Protože v argumentu odmocniny ale není stejná závislost na α , je potřeba znovu využít toho, že $\alpha\Delta T$ je malá hodnota a rozepsat si odmocninu do Taylorova polynomu.² Dostaneme

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt{1 + 2\alpha\Delta T} \approx 1 + \frac{1}{2}2\alpha\Delta T + \dots, \quad \text{resp.}$$

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt[3]{1 + 3\alpha\Delta T} \approx 1 + \frac{1}{3}3\alpha\Delta T + \dots,$$

²Pro $x \ll 1$ platí, že $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x^2)$, kde $o(x^2)$ je velmi malý, až zanedbatelný zbytek závislý na x^2 .

což se po pokrácení zlomků redukuje pro oba případy na

$$\frac{r}{r_0} = 1 + \alpha \Delta T.$$

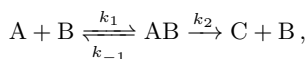
Tento výsledek je identický se vztahem (2) a znamená to, že koule i kulová slupka se bude rozpínat s teplotou stejně.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz

Úloha VI.4 ... nenasytný pavouk

4 body; průměr 2,36; řešilo 25 studentů

V tmavém koutě číhá pavouk, který právě polapil mouchu a postupně ji tráví za předpokladu, že trávení probíhá podle rovnice



kde A je muší substrát, B jsou trávicí látky (neustále v dostatku) a C je produkt trávení. AB označuje nestabilní meziprodukt. Reakce je prvního řádu, tzn. rychlost je přímo úměrná koncentraci dané látky. Určete, za jak dlouho se pavouk vydá opět na lov, jestliže mu interoreceptory oznámí pocit hladu při poklesu koncentrace substrátu na 10% původní hodnoty.

Nápověda Použijte aproximaci stacionárního stavu meziproduktu.

Mírek vzpomínal na Běstvinu.

Ze zadané reakce sestavíme dvě rovnice:

$$\frac{dc_C}{d\tau} = -\frac{dc_A}{d\tau} = k_2 c_{AB},$$

$$\frac{dc_{AB}}{d\tau} = k_1 c_A c_B - k_{-1} c_{AB} - k_2 c_{AB} = 0.$$

První rovnice nám říká, že koncentrace produktu C je přímo úměrná rychlostní konstantě k_2 a koncentraci meziproduktu AB, z něž C vzniká. Přírůstek C je zřejmě roven úbytku A. Druhá rovnice vychází z předpokladu, že se koncentrace meziproduktu v průběhu reakce ustálí, derivace c_{AB} tedy bude rovna nule. Člen $k_1 c_A c_B$ vyjadřuje nárůst koncentrace substrátu reakcí látek A a B, $-k_{-1} c_{AB}$ představuje úbytek meziproduktu zpětnou reakcí a $-k_2 c_{AB}$ označuje úbytek vlivem rozpadu na výsledný produkt C a enzym B.

Pokud si původní koncentraci trávicích látek označíme c_{B0} , můžeme jejich okamžitou koncentraci zapsat jako $c_B = c_{B0} - c_{AB}$ (kolik enzymu ubude, tolik meziproduktu vznikne). Z druhé rovnice můžeme po dosazení vyjádřit

$$c_{AB} = \frac{k_1 c_A c_{B0}}{k_{-1} + k_2 + k_1 c_A}$$

a z první rovnice potom dostaneme

$$\frac{dc_C}{d\tau} = \frac{k_2 c_{B0} c_A}{\frac{k_{-1} + k_2}{k_1} + c_A}.$$

Zavedeme konstanty $v_{\max} = k_2 c_{B0}$, která má význam maximální rychlosti tvorby produktu při maximální koncentraci enzymu, a $K = (k_{-1} + k_2)/k_1$. Úbytek koncentrace substrátu A označme x . Pro něj zřejmě platí $c_A = c_{A0} - x$ a z toho také

$$\frac{dc_C}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau}.$$

Užitím tohoto vztahu a dosazením zavedených konstant máme

$$\frac{K + c_{A0} - x}{c_{A0} - x} dx = v_{\max} d\tau.$$

Čas, za který klesne koncentrace A na 10 %, tj. $x = 0,9c_{A0}$, dostaneme integrací

$$v_{\max}\tau = \int_0^{0,9c_{A0}} \left(\frac{K}{c_{A0} - x} + 1 \right) dx = K \ln \left(\frac{c_{A0}}{c_{A0} - 0,9c_{A0}} \right) + 0,9c_{A0}$$

a konečně

$$\tau = \frac{1}{v_{\max}} (K \ln 10 + 0,9c_{A0}).$$

Za účelem získání číselné hodnoty bychom museli odhadnout rychlostní konstanty, které se však měří experimentálně. Koncentrace reaktantů taktéž nelze dobře odhadnout, takže se musíme spokojit pouze s obecným výsledkem.

Komentáře k došlým řešením

Většina řešitelů správně sestavila rovnice, resp. soustavu rovnic pro popis chemických reakcí. Nejčastějším problémem byla chybná úvaha o koncentraci enzymu B. Někteří řešení ji vůbec neuvažovali s tím, že je konstantní. To sice ano, po ustanovení rovnováhy platí

$$\frac{dc_B}{d\tau} = 0,$$

ale tato konstantní hodnota nemusí být a není rovna počáteční koncentraci c_{B0} . Jak je napsáno v textu, v rovnováze se ustálí na hodnotě $c_B = c_{B0} - c_{AB}$ (kolik enzymu ubude, tolik meziproductu vznikne). Tato chyba se zpravidla objevila hned na začátku a táhla se celým řešením. V jejím důsledku byl ve výsledku pouze logaritmický člen, lineární se neobjevil. Zajímavou poznámku na vrub lineárního členu udělal Jakub Dolejší, který si všimnul, že vztah

$$-\frac{dc_A}{d\tau} = k_2 c_{AB}$$

na první pohled naznačuje, že rychlost změny koncentrace bude konstantní, neb koncentrace meziproductu je konstantní. Háček je v tom, že c_{AB} se sice skutečně s časem nemění, ale je závislá na c_A . Na to nesmíme zapomenout. Právě to vnáší do řešení onu exponenciálu, potažmo logaritmus.

Tereza Steinhartová
terkas@fykos.cz

Úloha VI.5 ... toaleták

4 body; průměr 2,91; řešilo 35 studentů

Roli s papírem uchytneme do ložiska (bez tření) a necháme odmotávat konec papíru (zanedbáme lepení vrstev na sebe, tření v ložisku a hmotnost ložiska). Jakou úhlovou rychlostí se bude otáčet rulička potom, co se odmotá všechny papír? Známe poloměr a hmotnost ruličky, délkovou hustotu papíru, jeho celkovou hmotnost a délku. Uvažujte, že se papír bude odmotávat do nekonečné hloubky.

Bonus Uvažujte, že papír dopadne na zem dříve, než se celý odmotá.

Napadla Lukáše při čtení Michalovy záchodové úlohy.

Kdybychom se do řešení chtěli pouštět standardním postupem a počítat pohybovou rovnici odmotávajícího se pruhu papíru a rotujícího tlustého válce, sice bychom k výsledku došli, ale úloha by byla spíš cvičení na derivace a integrály. Podívejme se, jak úloha vypadá z energetického hlediska.

Pojmenujme si nejprve zadané veličiny. Nechť L je celková délka papíru, λ je jeho délková hustota (platí, že hmotnost celého papíru je $M = \lambda L$) a m je hmotnost ruličky. Prázdná rulička má poloměr R .

Potom, co se všechny papír odmotá, zůstane nám rotující dutý válec (rulička) a pruh papíru, který se v tuto chvíli dotýká válce už jen v jednom místě. Každá z těchto částí má určitou kinetickou energii, válec rotační (E_R), pruh papíru translační (E_T). Celková energie soustavy je

$$E_k = E_R + E_T = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2. \quad (3)$$

V tomto vztahu vystupuje moment setrvačnosti ruličky ($J = mR^2$), úhlová rychlost ruličky ω a rychlost pruhu papíru v okamžiku odmotání v . Protože sledujeme právě tento stav, můžeme psát $v = R\omega$, protože rulička i konec papíru se v tuto chvíli musí točit stejně rychle, jelikož mezi nimi ještě existuje pevné spojení. Když víme, že $M = \lambda L$, můžeme energii role a papíru přepsat na

$$E_k = \frac{\omega^2 R^2}{2} (m + \lambda L). \quad (4)$$

Zamysleme se nyní nad tím, jakou hodnotu bychom napsali na druhou stranu energetické bilance. Odpověď je jasná – je to práce (označme ji W). Jediná síla, která v soustavě práci koná, je tíhová síla F , která urychluje padající pruh papíru. Protože je síla přímo úměrná délce papíru l ($F = \lambda l g$), nemůžeme ji napsat jednoduše jako součin její velikosti s délkou dráhy, po které působí, ale musíme si pomoci integrální berličkou, tj., že

$$W = \int F dl.$$

Budeme uvažovat, že síla působí po dráze L (tj. celé délce papíru), takže předchozí vztah můžeme přepsat a vyřešit

$$W = \int_0^L \lambda l g dl = \lambda g \left[\frac{l^2}{2} \right]_0^L = \frac{1}{2} \lambda g L^2. \quad (5)$$

Energetická bilance nám říká, že součet kinetických energií (4) musí být roven vykonané práci (5), tedy

$$\frac{\omega^2 R^2}{2} (m + \lambda L) = \frac{1}{2} \lambda g L^2.$$

Vyřešením této rovnice pro ω dostáváme vztah

$$\omega = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{\lambda g}{m + \lambda L}}. \quad (6)$$

Zbývá jen vyřešit bonusovou část. Tam bohužel nelze použít energetický přístup, protože při dopadu na zem dochází k nepružným srážkám. Uvažujme, že jsou dokonale nepružné, tj. veškerá energie se pohltí při dopadu, a tudíž neexistuje síla, kterou by působila země přes papír na ruličku.

Zaměříme se nejdříve na okamžik, ve kterém se konec odmotávajícího se papíru právě dotkne země. Budou nás zajímat dvě veličiny, aktuální poloměr toaletního papíru r_{p_0} a aktuální úhlová rychlost ruličky s papírem ω_{r_0} . Dosud jsme se nemuseli zabývat tím, že papír má nějakou tloušťku – v našich úvahách ji bude reprezentovat počáteční poloměr papíru na roli r_0 . Také se bude hodit označit si hloubku role d a objemovou hustotu papíru ϱ . Pomocí počáteční hmotnosti papíru m_0 ji budeme moci svázat s dříve definovanou hustotou λ a délkou L . Z geometrie situace víme, že

$$\begin{aligned} m_0 &= \lambda L \\ m_0 &= \pi d \varrho (r_0^2 - R^2), \end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že $\pi d \varrho = \lambda L / (r_0^2 - R^2) = A$. Tuto substituci budeme moci využít, když budeme určovat r_{p_0} po odmotání papíru délky h .

$$\lambda L - \lambda h = \pi d \varrho (r_{p_0}^2 - R^2),$$

což po úpravách dá

$$r_{p_0} = \sqrt{R^2 + \frac{\lambda(L-h)}{A}}. \quad (7)$$

Úhlovou rychlost ω_{r_0} určíme podobně jako v hlavní části úlohy, z energetické bilance. Na levé straně bude opět stát součet kinetických energií (rotační a translační)

$$E_k = E_{\text{rot}} + E_{\text{trans}} = \frac{1}{2} (J_r + J_p) \omega_{r_0}^2 + \frac{1}{2} \lambda h v^2.$$

Stejně jako dříve víme, že $v = \omega r$, v tomto případě $v = \omega_{r_0} r_{p_0}$. Na pravou stranu rovnice dosadíme opět vykonanou práci podle vztahu (5), tentokrát ale jen po dráze rovné h , takže vyřešíme rovnici

$$\frac{1}{2} (J_r + J_p) \omega_{r_0}^2 + \frac{1}{2} \lambda h \omega_{r_0}^2 r_{p_0}^2 = \frac{1}{2} \lambda g h^2.$$

Pokud dosadíme za moment setrvačnosti ruličky, resp. papíru $J_r = mR^2/2$, resp.

$$J_p = \frac{1}{2} \lambda (L-h) (r_{p_0}^2 - R^2),$$

dostaneme výsledek

$$\omega_{r_0} = \sqrt{\frac{2\lambda g h^2}{mR^2 + \lambda(L-h)(r_{p_0}^2 - R^2) + 2\lambda h r_{p_0}^2}}. \quad (8)$$

Nyní se podívejme na situaci z hlediska druhé impulsové věty ($J\varepsilon = M_F$), ze které bychom mohli určit, jak se bude soustava chovat dál. Rozeberme si jednotlivé členy. Začněme momentem setrvačnosti J . Veličiny závislé na čase označme např. jako $b(t)$.

$$J = J_r + J_p = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}A(r_p(t)^2 - R^2)^2. \quad (9)$$

Zde jsme využili geometrie ruličky a vztahu pro moment setrvačnosti dutého válce. Dalším jednoduchým členem je moment síly M_F . Síla, která ruličku roztáčí, je totiž konstantní a rovna tíze papíru o délce h . Působíště síly se ovšem přibližuje ose otáčení, je vždy ve vzdálenosti $r_p(t)$ od ní.

$$M_F = \lambda h g r_p(t). \quad (10)$$

Zbývá už jen vyjádřit úhlové zrychlení ε . Zde si pomůžeme menším derivačním trikem trikem. Platí, že

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dr_p} \frac{dr_p}{dt}.$$

První část ($d\omega/dr_p$) využijeme později, zbývá zjistit, jak přepsat druhou (dr_p/dt). Víme, že z papíru každou chvíli ubude hmotnost $dm_p = \lambda v dt$, tudíž, pokud opět využijeme toho, že $v = \omega r_p$, dostaneme

$$\frac{dm_p}{dt} = \lambda \omega r_p.$$

Změna hmotnosti jde ovšem vyjádřit i jinak – přes geometrii. Hmotnost papíru je totiž $m_p = A(r_p(t)^2 - R^2)$, což po zderivování dá

$$\frac{dm_p}{dt} = 2A r_p(t) \frac{dr_p}{dt}.$$

Pokud porovnáme oba způsoby zápisu dm_p/dt , najdeme vztah pro dr_p/dt .

$$\frac{dr_p}{dt} = \frac{\omega \lambda}{A}. \quad (11)$$

Spojíme-li tedy členy (9), (10) a (11) zpět do impulsové věty, dostaneme

$$\frac{1}{2} \left[mR^2 + A(r_p(t)^2 - R^2)^2 \right] \frac{d\omega}{dr_p} \frac{\omega \lambda}{A} = \lambda h g r_p(t),$$

což je jednoduchá diferenciální rovnice, kterou lze vyřešit separací proměnných. V separovaném tvaru bude vypadat následovně:

$$\omega d\omega = \frac{2A h g r_p}{mR^2 + A(r_p^2 - R^2)^2} dr_p.$$

Pokud zintegrujeme obě strany, dostaneme

$$\left[\frac{\omega^2}{2} \right]_{\omega_{r_0}}^{\omega_r} = \left[\frac{gh}{R} \sqrt{\frac{A}{m}} \arctg \left(\frac{r_p^2 - R^2}{R} \sqrt{\frac{A}{m}} \right) \right]_{r_{p_0}}^R,$$

příčemž indexy u hranatých závorek vyjadřují tzv. meze integrace. Ty jsme určili z již dříve známých počátečních podmínek (dolní meze), resp. jsou zřejmé – ω_r je hledaná úhlová rychlost a R je poloměr ruličky bez papíru. Odečteme-li meze a všimneme si, že pro $r_p = R$ se odpovídající člen vynuluje kvůli funkci \arctg , dostaneme

$$\omega_r = \sqrt{\omega_{r_0}^2 - \frac{2gh}{R} \sqrt{\frac{A}{m}} \arctg\left(\frac{r_{p_0}^2 - R^2}{R} \sqrt{\frac{A}{m}}\right)}.$$

Do tohoto výsledku, který představuje úhlovou rychlost ruličky po odmotání všeho papíru do hloubky $h < L$, zbývá již jen dosadit z (7), (8) a desubstituovat A , nicméně to si již laskavý čtenář udělá za cvičení sám.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz

Úloha VI.P ... světlo přesně podle norem 5 bodů; průměr 2,83; řešilo 24 studentů

Navrhněte rozmístění světel nad stolem tak, abyste dodrželi normy pro osvětlení. K dispozici máte dostatečné množství kompaktních zářivek (lidově úsporných žárovek) se světelným tokem $P = 1400$ lm. Normy říkají, že pro běžné pracovní úkony má být osvětlení pracovní plochy $E = 300$ lx. Zářivky můžete umístit do libovolných pozic na strop ve výšce $H = 2$ m nad pracovní plochu. Pro jednoduchost uvažujte čtvercovou pracovní plochu o straně $a = 1$ m a zářivku považujte za bodový izotropní zdroj záření. Odraz a rozptyl světla zanedbejte.

Karel se zamýšlel nad normami EU.

Připomeňme, že světelný tok odpovídá celkové světelné energii, která opustí zdroj za jednotku času. Jednotkou světelného toku však není watt (J/s), nýbrž lumen.³ Osvětlení je pak světelný tok vztažený na plochu kolmou ke směru záření. Není-li plocha kolmá, uplatní se jen část toku odpovídající průmětu na normálu plochy, což můžeme pohodlně vektorově zapsat jako

$$E = \frac{P}{4\pi|\mathbf{R}|^2} \cos \alpha = \frac{P}{4\pi|\mathbf{R}|^2} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$$

kde \mathbf{R} je relativní poloha zdroje vůči osvětlovanému místu, \mathbf{n} je normála osvětlované plošky ($|\mathbf{n}| = 1$) a α je úhel mezi těmito dvěma vektory. Poznamenejme, že výše uvedený vzorec předpokládá zdroj, jenž svítí do všech směrů stejně.

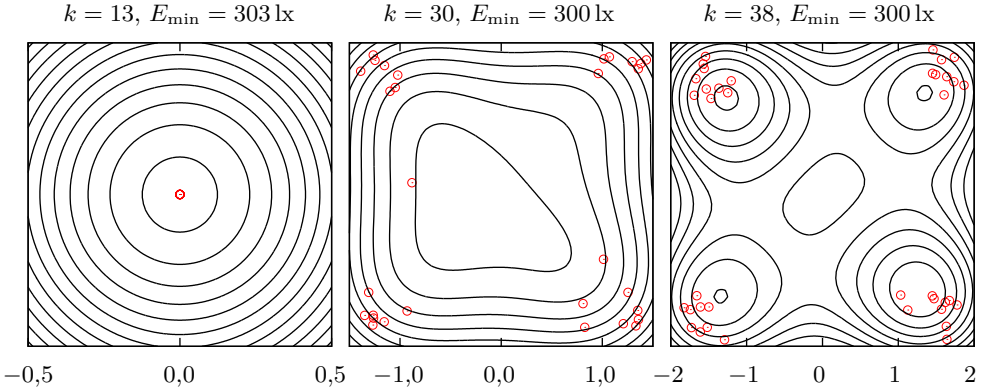
Jedna kompaktní zářivka (dále KZ) osvětlí tedy bod \mathbf{r} na stole následovně

$$E_i(\mathbf{r}) = \frac{P}{4\pi|\mathbf{R}_i|^3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_i.$$

Počátek souřadné soustavy jsme zvolili ve středu stolu, takže normála povrchu stolu $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T$ a $\mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}$, kde \mathbf{r}_i je poloha i -té KZ. Vzhledem k charakteru osvětlení můžeme příspěvky k osvětlení od jednotlivých KZ počítat, celkem tedy

$$E(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^k E_i(\mathbf{r}),$$

³Pro monochromatický zdroj o frekvenci 540 THz jsou svázány poměrem 683 lm/W.



Obr. 1: Osvětlení stolů velikosti $a = 1$ m („nežihané“ triviální řešení), $a = 3$ m a $a = 4$ m z výšky $h = 2$ m.

kde počítáme s použitím k KZ.

Nyní přejdeme k číselným hodnotám. Nejprve se pokusme odhadnout, kolik budeme minimálně potřebovat KZ. Dosadíme-li hodnoty pro osvětlení přesně pod jednou KZ, vyjde $E \approx 28$ lx, což normu řádově nesplňuje. Vyděme z jednoduchého rozmístění všech žárovek nad středem stolu (bodový zdroj :-). Pod jedenácti KZ je již $E \approx 306$ lx, ale to bychom nesplnili normu na rozích stolu ($E \approx 257$ lx). Abychom s tímto rozmístěním normu splnili na celé ploše stolu, stačí, když ji zkontrolujeme na (libovolném) rohu, jelikož ten je od středu nejhůře osvětlen (kvůli vzdálenosti i úhlu dopadu). Tím dojdeme k počtu $k = 13$, s nímž i roh osvětlený $E \approx 303$ lx splňuje normu.

Z výše uvedených čísel se nabízí otázka, zda bychom vhodnějším rozmístěním jedenácti nebo dvanácti žárovek nedosáhli i dostatečného osvětlení rohů. Jelikož prostor netriviálních rozmístění je obtížně analyzovatelný ($\langle -a/2, a/2 \rangle^{22}$, respektive $\langle -a/2, a/2 \rangle^{24}$), předpokládejme vzhledem k symetrii úlohy řešení, které je invariantní vůči rotaci o 90° . Další zjednodušení budíž využít pouze úhlopříčky. Umístíme $[k/4]$ KZ na každou úhlopříčku ve vzdálenosti $-t$ a t od středu čtverce a $(k \bmod 4)$ KZ do středu. Prostor řešení je pak už jen jednodimenzionální a maximalizací osvětlení rohů dostáváme optimum $t = 0$ m, takže triviální řešení s $k = 13$ je v této situaci optimální z hlediska k .

Závěrem poznamenejme, že kdyby byl poměr h/a menší, triviální řešení by již nebylo optimální (co do počtu KZ pro splnění normy) a bylo by nutné použít nějakou metodu vícedimenzionální (globální) optimalizace, např. simulované žhání⁴. Příklad takových výsledků je na obrázku 1, kde je dobře vidět, že zcela obecná optimalizační metoda si poradila (využili jsme implementaci simulovaného žhání v programu GNU Octave⁵), ale s využitím dalších omezení (např. ona symetrie) bychom dosáhli i lepších výsledků.

⁴Viz 1. díl seriálu 21. ročníku (<http://fykos.cz/archiv/rocnik21/serial>).

⁵<http://fykos.cz/rocnik27/6-6-samin.zip>

Komentáře k došlým řešením

Častou chybou bylo, že řešitelé zapomínali zohlednit závislost osvětlení na úhlu dopadu paprsků. Mnoho řešení též bylo hodnoceno níže kvůli nedostatečnému zdůvodnění zvoleného rozložení.

Mnozí si vzali (správně) na pomoc počítač při výpočtu osvětlení (obdiv ale patří i Jakubovi Dolejšimu, Kateřině Smítalové a Kláře Stefanové, kteří udělali zevrubnou analýzu „ručně“). O krok dál šel Filip Ayazi a počítač použil i k optimalizaci.

Michal Koutný
michal@fykos.cz

Úloha VI.E ... želatinová rychlost světla 8 bodů; průměr 5,81; řešilo 32 studentů

Uřčete rychlost světla v průhledném želatinovém dortu, který sami připravíte. Nezapomeňte popsat jeho složení.

Nápověda *Sežeňte si na to třeba laser nebo mikrovlnku.*

si prohlížel různé fyzikální stránky na internetu a narazil na <http://www.sciencebuddies.org>

Karel

Teorie

Nejprve si řekněme něco ke dvěma možným metodám pro určování rychlosti světla v prostředí pevné látky. Obě tyto metody jsou proveditelné v domácích podmínkách.

Snad nejelegantnějším řešením je změření indexu lomu n , který lze chápat jako poměr rychlosti světla ve vakuu (vzduchu – v našich podmínkách nerozlišitelné) c ku rychlosti světla v daném prostředí v , $n = c/v$. To je sice užitečná formule, kterou skutečně použijeme pro vyčíslení rychlosti světla v našem experimentu, ale je nutno mít na paměti, že tato představa je fyzikálně chybná, protože index lomu je obecně závislý na vlnové délce.

O původu indexu lomu pojednává R. P. Feynman v prvním díle svých přednášek v kapitole 31. Převyprávět zde tuto kapitolu by bylo poněkud zbytečné, vřele doporučujeme prostudovat alespoň oddíly 31.1 a 31.2 (jsou to 3 listy, které vám možná změni život :)). Zmiňme ale alespoň stěžejní myšlenky. Vše vychází ze dvou předpokladů, které jsou poměrně intuitivní a „stojí někde poblíž základů celé fyziky“: celkové elektrické pole lze vyjádřit jako součet polí vytvořených všemi náboji ve vesmíru; radiační pole vytvořené jedním nábojem je dáno jeho zrychlením vypočteným se zpožděním při rychlosti c . Pole procházející látkou je tedy tvořeno polem ze zdroje E_s a polem, které vzniká rozkmitáním atomů látky E_a . Příspěvek od atomů je fázově posunutý, což my pozorováním součtu $E_s + E_a$ vnímáme jako zpomalení světla v daném prostředí.

Druhou metodou, která připadala v úvahu, bylo měření rychlosti světla pomocí mikrovlnné trouby. Rychlost šíření elektromagnetické vlny o vlnové délce λ a frekvenci f lze zapsat jako $v = \lambda f$. V mikrovlnné troubě vzniká stojaté vlnění. Vyndáme-li otočný táč a položíme materiál do trouby, bude se látka v místech kmiten zahřívat rychleji než v místech uzlů. Provedeme-li tento experiment na čokoládě, vytaví se na ní pravidelný vzorek. Rozestupy uzlů odpovídají polovině vlnové délky a s užitím údaje o frekvenci, kterou nám poskytne výrobce, již snadno do počteme rychlost světla.

S žele ale nastal problém. Frekvence, která je užívaná v mikrovlnných troubách, je $f = 2,45$ GHz a odpovídá rezonanční frekvenci molekuly vody. To má své opodstatnění – voda má velkou tepelnou kapacitu a tepelnou vodivost. Potraviny zpravidla vodu obsahují a jejím rychlým zahřátím se tak dostane do ohřívané věci dostatek tepla za krátkou dobu, proto jsou

mikrovlnky tak rychlé. Zároveň to s sebou ale nese mnohá omezení a nevýhody. Pokud jste zkoušeli někdy rozmrazovat něco v mikrovlnce, možná jste si všimli, že to není tak úplně ono. Zatímco potraviny obsahující kapalnou vodu se ohřívají v celém objemu z výše uvedeného důvodu, zmrzlé věci se ohřívají jen od povrchu. Led má totiž rezonanční frekvenci už trochu jinde, a proto neabsorbuje přítomné záření o nic lépe než zbylé složky potravin. Na povrchu, kde dochází k tání vlivem vyšší okolní teploty, je pak už zase absorpce, a tedy ohřívání, velké. To je tedy případ, kdy nám vadí příliš pomalé předávání energie. V případě želé, které je skoro samá voda v kapalném skupenství, naopak dochází k tak rychlému zahřátí, že se vzorek rozteče dřív, než jsme schopni určit polohy uzlů.

Navíc, i kdybychom nějakým způsobem polohy uzlů odečetli a rychlost světla určili (některým řešitelům se to skutečně alespoň trochu povedlo), odpovídalo by to pravděpodobně rychlosti světla dané vlnové délkou ve vodě.

Měření bylo tedy provedeno pouze metodou určení indexu lomu pro vlnovou délku $\lambda = 650$ nm (to je nutno uvést, neboť pro jiné vlnové délky se budou výsledky lišit kvůli disperzi).

Experiment

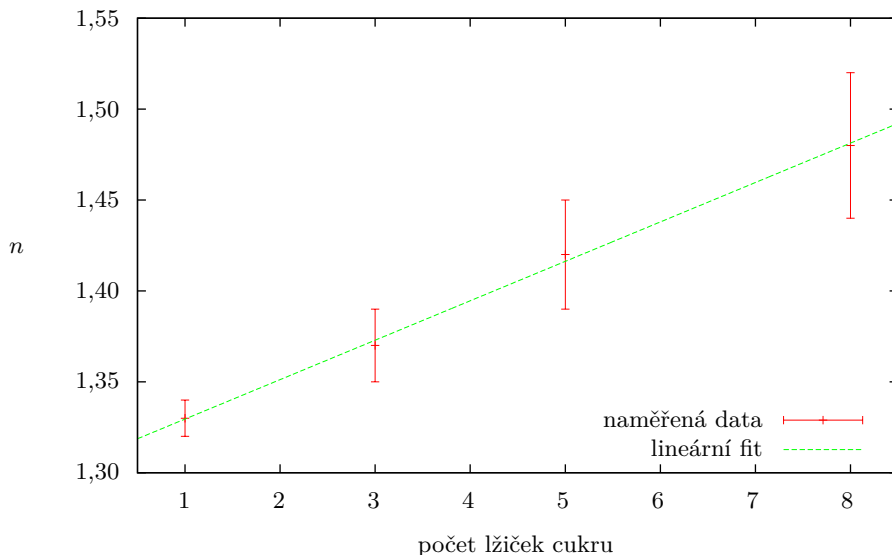
Index lomu jsme měřili následujícím způsobem: Půlkruhový kus želé jsme podložili papírem s úhlovou stupnicí po 10° tak, že její střed splýval se středem původního kruhu želé. Laserem jsme pak svítili do tohoto středu tak, aby se paprsek zlomil na celé desítky stupňů (10–50) a odečetli jsme vstupní úhel na podloženém úhломěru.

Nejprve jsme měření provedli pro červené neslazené želé. Koncentrace cukru v celé várce byla konstantní. Zajímavým efektem byla změna indexu lomu po roztavení a opětovném zatuhnutí. Pro primárně zatuhlé želé vyšel index lomu $n = (1,25 \pm 0,03)$, pro roztavené a znovu zatuhlé $n = (1,45 \pm 0,04)$. Tento efekt je komentován níže. V tomto druhu želé byla poměrně velká absorpce, což značně komplikovalo měření (paprsek neprošel až ven z půlkruhu), ale naštěstí rozptyl pro tuto vlnovou délku byl optimální – bylo možno dobře pozorovat dráhu laseru uvnitř materiálu.

Hodnoty byly určeny fitem naměřených dat závislostí danou Snellovým zákonem $\vartheta_i = \arcsin(n \sin \vartheta_t)$, kde ϑ_i je vstupní úhel, ϑ_t je úhel, pod kterým se paprsek zlomí, a n je index lomu coby fitovací parametr. Udávané chyby jsou chyby fitu.

Druhý typ želé, průhledný, měl absorpci mnohem menší, a tak bylo možno měřit na „kulatém úhломěru“, tedy s větší přesností, jak vstupní, tak výstupní úhel. Toto želé bylo připraveno nejprve bez cukru a pak ve 4 hrníčcích do něj bylo přidáno 1, 3, 5 a 8 lžiček cukru. Jedna lžička odpovídá přibližně 2,2 g a hrníčky měly objem 250 ml – tyto údaje slouží pro orientaci, v jakém rozsahu koncentrací jsou námi naměřené a vyvozené výsledky platné. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 1 a vyneseny do grafu na obrázku 2. Zjišťujeme, že index lomu želé s rostoucí koncentrací cukru v námi měřeném rozsahu lineárně roste. Z lineárního fitu závislosti je možné získat extrapolovanou hodnotu neslazeného želé (konstantní člen lineární závislosti). Tato extrapolovaná hodnota vyšla $n_{\text{neslazené}} = (1,31 \pm 0,04)$.

Nyní se vracíme k pozorované změně indexu lomu po roztavení a opětovném ztuhnutí červeného želé. Nabízejí se dvě možná vysvětlení a pravděpodobně budou oba efekty přítomny. Těžko však určíme v jaké míře, diskuse bude tedy kvalitativní. Index lomu závisí, jak se dozvíte ve zmiňované kapitole ve Feynmanovi, na hustotě (přesněji řečeno na počtu nábojů na jednotkový objem). Po přetavení patrně tato hustota vzrostla, a to jednak tím, že látka dostala možnost se lépe, více nahusto, uspořádat. To je možné přirovnat k jevu, který pozorujeme i nízkomolekulárních látek, jako je například voda. Ta nám mnohem lépe zmrzne po převaření. Druhý možný



Obr. 2: Závislost indexu lomu na množství cukru.

důvod je, že při roztavení (roztátí) želé se samozřejmě zvýšila teplota a tím se zrychlilo odpařování vody. Změnila se tedy koncentrace, složení. Celá směs zhoustla. Zvýšení indexu lomu může být také synergickým efektem těchto dvou jevů – želé se lépe uspořádá nejen proto, že k tomu dostane možnost tepelným rozvolněním, ale také proto, že se s menším obsahem vody uspořádává snáze (to pozorujeme i mechanicky – přidáme-li méně vody, je tužší).

Závěrem uvedme v tabulce 1 hodnoty rychlosti světla v želé spočtené z naměřených indexů lomu, bereme-li rychlost světla ve vakuu $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Tabulka 1: shrnutí výsledků

typ a počet lžiček	n	$\frac{v}{10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$
červená želatina	1,25±0,03	2,40±0,06
č. žel. přetavená	1,45±0,04	2,07±0,06
bílá s 1 lž. cukru	1,33±0,01	2,26±0,02
bílá s 3 lž. cukru	1,37±0,02	2,19±0,03
bílá s 5 lž. cukru	1,42±0,03	2,11±0,04
bílá s 8 lž. cukru	1,48±0,04	2,03±0,05

Tereza Steinhartová
terkas@fykos.cz

Úloha VI.S ... spektrální

6 bodů; průměr 4,06; řešilo 16 studentů

1. Jak bude vypadat spektrum otevřené struny na hmotnostní hladině $M^2 = 2/\alpha'$? Kolik máme možných stavů struny na této hladině?
2. Pokud bychom uvažovali interakci tachyonu s jinými strunami, zjistili bychom, že ho můžeme popsat přibližně jako částici pohybující se v nějakém potenciálu. Uvažujme model struny, která je upevněna na nestabilní D-bráně. Odpovídající potenciál tachyonu je určen vztahem

$$V(\varphi) = \frac{1}{3\alpha'} \frac{1}{2\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)^2 \left(\varphi + \frac{1}{2}\varphi_0 \right),$$

kde α' a φ_0 jsou kladné konstanty. Roznásobte závorky a určete hmotnost tachyonu jako dvojnásobek koeficientu stojícího před φ^2 . Najděte minimum potenciálu $\tilde{\varphi}$ a ukažte, že provedeme-li v potenciálu záměnu $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} + \varphi$ (tj. rozvíjíme teorii kolem minima tachyonového potenciálu), dostaneme po roznásobení a odečtení koeficientu před φ^2 kladnou hmotnost tachyonu. Záporná hmotnost tedy ukazuje na nestabilitu D-brány a ve stabilní konfiguraci, kdy D-brána vymizí (minimum potenciálu), již hmotnost není záporná.

3. Teorie superstrun umožňuje popis fermionů. Pro jejich popis je však potřeba antikomutujících veličin. Pro ty se zavede namísto komutátoru antikomutátor vztahem

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

Najděte takové dvě 2×2 matice a a b , které splňují $\{a, a\} = 1$, $\{b, b\} = 1$ a $\{a, b\} = 0$.

1. Připomeňme vzorec pro hmotnost struny z minulého dílu⁶

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{I=2}^d j a_j^{\dagger I} a_j^I - 1 \right).$$

Hmotnost $M^2 = 2/\alpha'$ dostaneme působeními na „vakuum“ $|p^1, p^2, \dots, p^d\rangle$:

$$a_3^{\dagger I} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle, \quad a_2^{\dagger I} a_1^{\dagger J} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle, \quad a_1^{\dagger I} a_1^{\dagger J} a_1^{\dagger K} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle,$$

pro obecně různé indexy I, J, K . Stavů s takovouto hmotností je obecně nekonečně mnoho, lineárně nezávislých⁷ je však

$$(d-1) + (d-1)^2 + (d-1)^3,$$

kde každý člen odpovídá předchozím možnostem v uvedeném pořadí.

2. Prostým roznásobením $V(\varphi)$ ze zadání získáváme

$$V(\varphi) = \frac{1}{6\alpha'\varphi_0} \left(\varphi^3 - \frac{3}{2}\varphi_0\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi_0^3 \right).$$

Efektivní hmotnost pole φ odečteme tedy jako imaginární, $m^2 = -1/(2\alpha')$. S použitím diferenciálního počtu (uznáváme i výpočet pomocí symbolického programu nebo výpočet

⁶V seriálu nám tam vypadla suma přes všechny dimenze I , za což se omlouváme, ale z textu to snad bylo pochopitelné.

⁷Tj. takových, které se nedají navzájem lineárně poskládat.

uhodnutím) určíme lokální minimum potenciálu jako $\varphi_{min} = \varphi_0$. Když dosadíme do potenciálu $\varphi' = \varphi - \varphi_0$ a opět roznásobíme závorky, dostáváme

$$V(\varphi') = \frac{1}{6\alpha'\varphi_0} \left(\varphi'^3 + \frac{3}{2}\varphi_0\varphi'^2 \right),$$

efektivní hmotnost φ je tedy ve stabilní konfiguraci $m^2 = 1/(2\alpha')$.

3. Nejdříve si relace ze zadání trochu přepíšeme

$$\{a, a\} = aa + aa = 2a^2 = I_2, \quad (2b^2 = I_2),$$

kde I_2 značí jednotkovou matici 2×2 . Pro složky a_{ij} matic ze zmíněného získáváme následující podmínky (pro b_{ij} jsou zcela analogické):

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} &= \frac{1}{2}, & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} &= \frac{1}{2}, \\ (a_{11} + a_{22})a_{12} &= 0, & (a_{11} + a_{22})a_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Máme dohromady osm obecně komplexních složek dvou 2×2 matic, takže řešení bude určitě nejednoznačné. Stačí tedy vybrat nějakou jednoduchou matici a splňující dané rovnice a zkonstruovat b tak, aby splňovala relaci $ab = -ba$. Nesmíme však vybrat násobek jednotkové matice, která komutuje se vším, takže k antikomutaci bychom ji opravdu nedonutili. Zvolme tedy například $a_{11} = a_{22} = 0$ a $a_{12} = a_{21} = 1/\sqrt{2}$. Tuto *konkrétní* matici a vložíme do komutační relace s maticí b a získáváme pro její složky podmínky

$$b_{12} = -b_{21}, \quad b_{11} = -b_{22}.$$

Zkombinováním s předchozími podmínkami pak dostáváme

$$b_{11}^2 - b_{12}^2 = \frac{1}{2}, \quad b_{11}b_{12} = 0.$$

Pokud bychom požadovali složky b_{ij} pouze reálné, byly by už plně určeny danými rovnicemi, protože $b_{11}^2 \geq 1/2$, a tudíž z druhé rovnice $b_{12} = 0$. V reálném oboru je pak už jediným řešením matice

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(při zvoleném a). Pokud bychom však složky matice povolili komplexní, řešení by bylo například i

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

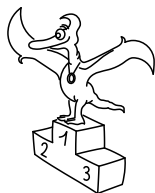
Tím si však nemusíte lámat hlavu – plný počet bodů získáte za libovolné z obdobných řešení. Zmíníme jen pro zajímavost, že pokud lineárně zkombinujete tři zmíněné matice

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

se třemi koeficienty odpovídajícími složkám nějakého vektoru \mathbf{A} kolmého na vektor \mathbf{B} , jehož tři složky naopak použijeme na tvorbu druhé lineární kombinace těchto matic, dostanete dvě matice, které jsou opět řešením našeho zadání. (Můžete schválně vyzkoušet a promyslet proč.)

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz

Miroslav Rapčák
miro@fykos.cz



Konečné pořadí řešitelů XXVII. ročníku



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
		4	4	4	4	4	5	8	6	39	<i>100</i>	236
1. Jan Preiss	G, Lovosice	4	4	4	3	4	3	7	4	33	78	179
2. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	4	4	4	3	4	3	6	2	30	77	178
3. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	4	4	4	3	4	2	6	–	27	79	177
4. Jáchym Bártík	G Havlíčkův Brod	4	4	4	3	4	2	6	3	30	72	170
5. Jozef Lipták	G Tajovského, B. Bystrica	4	2	4	1	4	–	6	2	23	67	145
6. Přemysl Štastný	G, Žamberk	4	4	4	3	4	3	6	–	28	67	134
7. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	4	2	0	4	2	–	–	16	52	107
8. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	4	4	4	–	2	2	3	–	19	61	100
9. Vít Horáček	G L. Jaroše, Holešov	4	4	1	–	–	–	6	–	15	68	77
10. Jaroslav Janoš	G, Lesní čtvrť, Zlín	4	–	–	–	–	–	–	–	4	77	75
11. Kateřina Stodolová	G, Dašická, Pardubice	4	4	2	–	–	–	6	–	16	77	69
12.–13. Adam Poláček	G, Havlíčkův Brod, Český Těšín	2	2	–	0	0	2	0	–	6	51	61
12.–13. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	61
14. Jozef Burkuš	G, Rožňava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	60
15. Petr Jakubčík	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	58
16.–17. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	4	4	–	–	–	–	6	–	14	82	56
16.–17. František Zajíc	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	56

Kategorie druhých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
		4	4	4	4	4	5	8	6	39	<i>100</i>	236
1. Petr Hrubý	G, Polička	4	2	4	2	1	4	7	4	28	73	172
2. Dominika Ďurovčíková	G Hlohovec	4	4	2	–	1	3	7	6	27	73	159
3. Tomáš Hrbek	G J. Ressela, Chrudim	4	4	4	3	4	4	8	3	34	66	155
4. Jakub Jambřích	G J. A. Raymana, Prešov	4	2	4	3	1	2	4	–	20	63	146
5. Jiří Jarošík	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	66	112
6. Klára Stefanová	G B. Němcové, HK	4	4	4	–	1	2	7	–	22	71	111
7. Daniela Šimánková	G, Pelhřimov	2	2	1	1	–	–	1	–	7	59	99
8. Samuel Obuch	G Jána Hollého, Trnava	4	4	4	–	0	–	–	–	12	56	95
9. Vojtěch Jelínek	G, Neumannova, Žďár n. S.	4	4	4	–	–	–	–	–	12	57	85
10.–11. Kuba Pilař	G J. Ressela, Chrudim	4	4	4	–	–	–	6	–	18	60	79
10.–11. Pavel Souček	G, Nymburk	4	2	4	4	4	–	–	–	18	81	79
12. Jaroslav Stránský	G, Tišnov	4	4	2	–	2	–	–	–	14	56	67
13. Minh Tran Anh	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	4	–	–	–	–	–	–	8	70	63
14. Marek Otýpka	G, Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	56
15. Pavel Kús	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	53
16. Jakub Marták	G Golianova, Nitra	2	2	1	0	0	1	–	–	6	28	47
17. Tomáš Drozdík	G Andreja Vrábla, Levice	4	–	–	–	–	–	–	–	4	64	46

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
		2	2	4	4	4	5	8	6	35	<i>100</i>	212
1. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	2	4	3	4	5	8	6	34	<i>100</i>	213
2. <i>Luboš Vozdecký</i>	G a SOŠZZE Vyškov	1	2	4	3	4	3	6	6	29	<i>84</i>	179
3. <i>Pavel Peterka</i>	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	4	3	4	-	7	2	24	<i>83</i>	168
4. <i>Mojmír Poprocký</i>	G Matyáše Lercha, Brno	1	1	4	2	-	2	5	4	19	<i>73</i>	144
5. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, HK	2	2	3	4	4	4	-	3	22	<i>87</i>	138
6. <i>Jakub Sláma</i>	G Opatov, Praha	1	1	4	-	3	3	-	-	12	<i>69</i>	133
7. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	2	2	4	3	4	-	7	4	26	<i>80</i>	102
8. <i>Jakub Maruška</i>	G Andreja Vrábla, Levice	2	2	4	-	3	-	6	-	17	<i>69</i>	99
9. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	1	1	4	-	3	-	6	-	15	<i>73</i>	97
10. <i>Tomáš Fiala</i>	G, SOŠ a VOŠ, Ledec n. Sáz.	2	2	4	3	2	-	6	-	19	<i>74</i>	96
11. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>75</i>	80
12.-13. <i>Samuel Kočiščák</i>	G Poštová, Košice	2	1	2	-	1	-	-	-	6	<i>64</i>	74
12.-13. <i>Miloslav Staněk</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	2	1	-	-	-	-	-	-	3	<i>80</i>	74

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
		2	2	4	4	4	5	8	6	35	<i>100</i>	212
1. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Dubnica n. Váhom	2	1	3	3	4	4	6	6	29	<i>92</i>	195
2. <i>Ondřej Zelenka</i>	SPŠ a SOŠGS Most	2	2	4	3	5	4	6	7	33	<i>87</i>	162
3. <i>Lýdia Janitorová</i>	G, Šrobárova, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>56</i>	49
4. <i>Zuzana Vlasáková</i>	G, Rumburk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>67</i>	47
5. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>76</i>	45
6. <i>Míchal Belina</i>	G Volgogradská, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>65</i>	33
7. <i>Tomáš Tměj</i>	G, Arabská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>79</i>	30
8. <i>Denisa Lampášová</i>	G, Považská Bystrica	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>83</i>	25
9. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>89</i>	24
10.-11. <i>Peter Hojnosť</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>78</i>	21
10.-11. <i>Ján Ondráš</i>	G Grösslingova, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>75</i>	21
12. <i>Marek Martaus</i>	G Velká okružná, Žilina	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>65</i>	20

**FYKOS****UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.