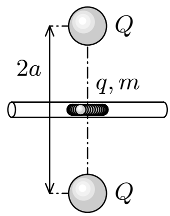
Úloha I.5 ... korálek

5 bodů; průměr 3,29; řešilo 66 studentů

Bodový korálek o hmotnosti m a s nábojem q se pohybuje v rovné trubce bez tření. Trubka se nachází ve středu mezi dvěma nabitými koulemi, každá s nábojem $Q = -q$. Vzdálenost koulí je $2a$. Uvažujte elektrostatické působení a najděte frekvenci malých kmitů korálku okolo rovnovážné polohy.

Nápověda *Uvědomte si, že velikost síly se při malých výchylkách mění pouze zanedbatelně.*

Radomír se kutálel v trubce.



Nejprve se podívejme, jak by problém vypadal bez jakýchkoli aproximací. Označme d okamžitou vzdálenost našeho korálku od každé nabité koule. Pokud Δr označíme výchylku korálku z jeho rovnovážné polohy (na spojnici nabitých koulí), tak můžeme d vyjádřit jako

$$d = \sqrt{a^2 + \Delta r^2}\,.$$

Obě nabité koule budou na korálek působit stejnou silou $\boldsymbol{F}_0$, která bude přitažlivá. Její velikost můžeme vyjádřit z Coulombova zákona elektrostatiky

$$F_0 = \frac{kq^2}{d^2} = \frac{kq^2}{a^2 + \Delta r^2}\,.$$

Pokud označíme α úhel, který svírá spojnice korálku s jednou z nabitých koulí a spojnice obou koulí, tak můžeme psát

$$\sin\alpha = \frac{\Delta r}{\sqrt{a^2 + \Delta r^2}}\,.$$

Pro velikost výsledné síly $\boldsymbol{F}$ působící na korálek můžeme z geometrie problému psát vztah

$$F = 2F_0 \sin\alpha\,.$$

Rovněž vidíme, že síla $\boldsymbol{F}$ působí proti směru výchylky korálku. Pak pro zrychlení korálku, které si označíme jako $\Delta\ddot{r}$ (označení pro druhou časovou derivaci Δr, tedy zrychlení), platí vztah

$$m\Delta\ddot{r} = -\frac{2kq^2\Delta r}{\left(a^2 + \Delta r^2\right)^{3/2}} = -\frac{2kq^2\Delta r}{a^3\left[1 + \left(\frac{\Delta r}{a}\right)^2\right]^{3/2}}\,. \tag{1}$$

Díky tomu, že výchylka je velmi malá, můžeme rovnici (1) upravit, ve druhé mocnině se totiž Δr stane v poměru k a naprosto zanedbatelným. Například, pokud by poměr $\Delta r/a$ byl 10^{-2} (tedy 1 %), tak poměr $(\Delta r/a)^2$ by byl 10^{-4}, což je již zanedbatelný zlomek. Z toho, že je výchylka malá, tedy víme, že $\Delta r/a$ je velmi malé číslo a $(\Delta r/a)^2$ lze ve jmenovateli oproti jedničce zanedbat. Rovnici pro zrychlení tedy můžeme upravit následovně

$$\Delta\ddot{r} = -\frac{2kq^2}{ma^3}\Delta r\,.$$

Tato rovnice nám připomíná rovnici pro harmonický oscilátor $a = -(k/m)\Delta x$, kde k je tuhost pružiny, m je hmotnost závaží, a je zrychlení závaží a Δx je jeho výchylka z rovnovážné polohy. Pro úhlovou frekvenci harmonického oscilátoru ω_h potom platí

$$\omega_\mathrm{h} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Tohoto řešení využijeme pro naši rovnici a můžeme psát, že frekvence kmitů při malé výchylce bude

$$\omega = \sqrt{\frac{2kq^2}{ma^3}}\,.$$

Tomáš Bárta
tomas@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.