

Úloha I.E ... Ohni to, neohýbej to!

8 bodů; průměr 4,24; řešilo 66 studentů

Změřte vzdálenosti vrypů na difrakční fólii pomocí světla ze třech různobarevných LED-diod.

Karel rozfořoval rozpočet.

Teorie

Dopadá-li světlo na mřížku, dochází k difrakci. Protože difrakci pozorujeme ve vzdálenosti l velké vzhledem ke vzdálenosti vrypů d na mřížce a velikosti osvětlené části mřížky, můžeme užít aproximace, že paprsky dopadající do daného místa na stínítku jsou rovnoběžné. Dle obrázku 1 platí

$$\sin \alpha = \frac{\Delta}{d}. \quad (1)$$

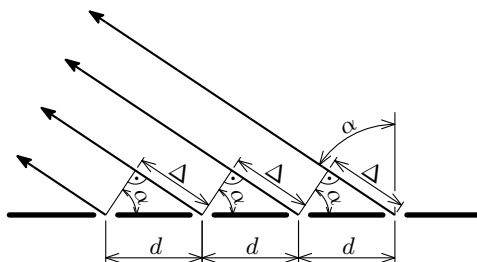
Aby v místě na stínítku určeném úhlem α (viz obrázek 2) došlo ke konstruktivní interferenci (a bylo v tomto místě tedy lokální maximum a my na stínítku viděli světlo), musí být dráhový rozdíl Δ roven celočíselnému násobku vlnové délky λ , tedy

$$\Delta = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z},$$

odkud již dostaneme podmínku pro maximum

$$\sin \alpha = \frac{k\lambda}{d}. \quad (2)$$

Obdobným způsobem bychom dostali podmínku pro minimum (pro které musí být dráhový rozdíl roven lichému násobku poloviny vlnové délky). Minima však v našem experimentu detekovat nebudeme.



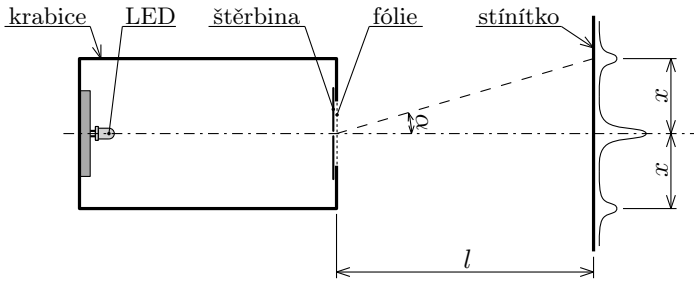
Obr. 1: Difrakce na mřížce, světlo dopadá zespodu kolmo na mřížku, pozorujeme pod úhlem α .

Budeme měřit polohu maxim na stínítku, nikoliv úhel. Z obrázku 2 plyne

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}. \quad (3)$$

Z rovnic (2) a (3) pak vyjádříme vzdálenost vrypů na difrakční fólii

$$d = \frac{k\lambda\sqrt{x^2 + l^2}}{x}. \quad (4)$$



Obr. 2: Uspořádání experimentu, za stínítkem je schematicky znázorněn očekávaný průběh intenzity.

Dosud jsme uvažovali, že difrakční fólie je rovnoběžná se stínítkem. To se nám však v praxi naprosto přesně nepodaří. Jestliže stínítko otočíme, obraz na něm se zdeformuje tak, že na jedné straně budou maxima blíže, na druhé dále. Jestliže je úhel malý, budou rozdíly menší. Uvažujme, že stínítko svírá s osou fólie úhel β (v ideálním případě $\beta = 90^\circ$). Pak dle sinové věty a za využití vlastností funkce sinus platí

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin (180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{l}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Tento vztah bychom měli použít místo vztahu (3). Dále uvažujme nad tím, co se stane, nebude-li naopak fólie rovnoběžná s osou, ale bude s ní svírat úhel γ (v ideálním případě $\gamma = 90^\circ$). Uvažujme zdroj světla v nekonečnu (resp. tak daleko, aby vzdálenost zdroje od fólie byla mnohem větší než vzdálenost vrypů na fólii). Pak světlo, které v daný okamžik opustilo zdroj, dorazí na některé části fólie dříve, na některé naopak později. Potom se dráhový rozdíl při průchodu dvěma sousedními otvory mřížky zvětší o $d \cos \gamma$ a můžeme upravit vztah (1) na

$$\sin \alpha + \cos \gamma = \frac{\Delta}{d}.$$

Pak můžeme vyjádřit vzdálenost vrypů na difrakční fólii

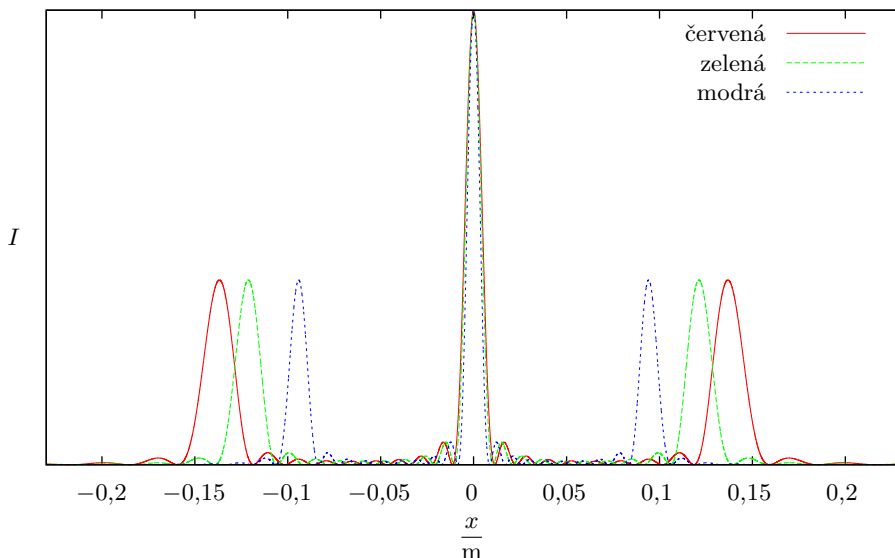
$$d = \frac{k \lambda}{\frac{x \sin \beta}{\sqrt{x^2 + l^2 - 2xl \cos \beta}} + \cos \gamma},$$

přičemž pro $\beta = \gamma = 90^\circ$ samozřejmě dostáváme vztah (4). Jelikož jde o poměrně složitý výraz, budeme dále předpokládat, že fólie i stínítko jsou na osu dokonale kolmé.

Úvahou výše jsme zjistili polohu minim a maxim, nedokážeme však jednoduše zjistit závislost intenzity na úhlu. To by bylo složitější, proto zde postup neuvádíme. Pro zájemce však zmíníme, že se pro $\beta = \gamma = 90^\circ$ dá popsat vztahem

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi p \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi p \sin \alpha}{\lambda}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi N d \sin \alpha}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \alpha}{\lambda}} \right)^2, \quad (5)$$

kde I_0 je amplituda, N je počet otvorů na mřížce a p je jejich šířka. První závorka (tzv. otvorový faktor) popisuje difrakci na otvoru šířky p (tedy na jednom otvoru mřížky). Druhá závorka



Obr. 3: Teoretická závislost intenzity na poloze na stínítku pro všechny tři vlnové délky koherentního světla, vzdálenost fólie od stínítka 20 cm, počet vrypů $N = 10$, periodu mřížky $d = 1,1 \mu\text{m}$ a šířku otvoru v mřížce $p = 0,55 \mu\text{m}$.

(tzv. mřížkový faktor) pak popisuje interferenci záření z N otvorů vzdálených d . Graf této funkce po dosazení vztahu (3) uvádíme na obrázku 3.

Doteď jsme předpokládali, že světlo, které pro experiment používáme, je koherentní. Že tomu tak úplně není, ukážeme, vypočítáme-li koherentní délku, tedy takovou vzdálenost, na které můžeme záření považovat za koherentní, jako

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

kde $\Delta\lambda$ je tzv. pološířka čáry (tedy šířka v polovině výšky). V návodu byly zadány vlnové délky s nejistotou 15 nm. Odhadneme-li pološířku na $\Delta\lambda = 30$ nm, dostaneme např. pro zelenou barvu $l_c = 11 \mu\text{m}$, což je vzdálenost 10 vrypů na použité mřížce. Osvětlíme-li vrypů více (počet osvětlených vrypů budeme omezovat šterbinou), pak spolu bude interferovat vždy jen světlo z několika otvorů vedle sebe, u zbytku dojde pouze ke sčítání intenzit. Můžeme si představit, že široká šterbina představuje mnoho šterbin vedle sebe, vždy o kousek posunutých. Světlo z každé této malé šterbiny bude koherentní a po průchodu mřížkou vytvoří difrakční obrazec, z každé šterbiny o kousek posunutý. Naopak záření z různých šterbin koherentní není, proto se tyto obrazce prostě sečtou (sečtou se intenzity), což vzhledem k tomu, že jsou sčítané obrazce navzájem posunuté, způsobí rozšíření maxima na stínítku a prakticky zánik (resp. splynutí) maxim s nízkou intenzitou viditelných na obrázku 3.

Rozšíření čáry na stínítku se dá snadno vysvětlit také tím, že světlo vycházející z LED diod není z principu monochromatické (což samozřejmě s tvrzením výše úzce souvisí), tedy obsahuje

různé vlnové délky. Různé vlnové délky pak mají difrakční maxima v různé vzdálenosti.

Měření

Nyní již k samotnému uspořádání experimentu, které je vyobrazeno na obrázku 2. Všechny tři diody byly připevněny pod sebe na nepájivé kontaktní pole, které bylo přilepeno na jednu vnitřní stěnu krabice. Na opačné straně byl v krabici otvor s úzkou svísele orientovanou šterbinou (dvě vedle sebe přilepené žiletky), za kterou byla přilepena difrakční fólie, přičemž vrypy v ní byly orientovány svísele. Diody byly používány vždy po jedné, bez rezistoru a napájeny zdrojem konstantního proudu 20 mA, což je maximální proud, který může dle návodu dlouhodobě tímto typem diod protékat. Difrakční obrazec byl promítán na bílé stínítko opatřené pravítkem. Obrazec byl fotografován, přičemž v místnosti byla tma.

Při experimentování bylo třeba vyzkoušet optimální šířku šterbiny. Příliš úzká šterbina znamená malou intenzitu na stínítku. Při velmi malé šířce šterbiny bychom navíc pozorovali i difrakci na ní, což je v našem případě nepatřičné. Pokud je šterbina naopak příliš široká, difrakční proužky se rozšiřují a maxima intenzity nejsou tak ostrá, nalezení středu proužku je pak méně přesné, a tedy nejistota polohy maxima roste. Také bylo i při pohledu okem patrné, že světlo vycházející z LED není monochromatické, protože po průchodu mřížkou se na stínítku v případě modré LED objevila i zelená barva, v případě zelené barva červená.

Fotografie byla následně zpracována v programu Matlab¹. Nejprve byl od fotografií odečten černý snímek (tedy taková fotografie, která byla pořízena za stejné expozice, ale s vypnutým zdrojem světla), aby bylo možné eliminovat světlo nepocházející z LED. To se ukázalo nutné zejména u zeleného světla, u kterého bylo vzhledem k malé intenzitě třeba použít expoziční čas v řádu desítek sekund. Následně byl obrázek převeden do stupňů šedi a byly odečteny hodnoty pixelů podél zadané úsečky, na které byl vidět difrakční obrazec. Z fotografie pořízené za světla byla v pixelech odečtena délka pravítka známé délky, čímž byla kalibrována délková osa. Tímto byla zjištěna intenzita podél obrazce, resp. přesněji řečeno nějaká bezrozměrná veličina (dále ji nazýváme intenzitou), která je na intenzitě závislá. Poté již bylo možné vykreslit závislost intenzity na poloze na stínítku (graf na obrázku 5) a odečíst polohy difrakčních maxim, což bylo kvůli eliminaci šumu provedeno pomocí proložení polynomem druhého stupně v okolí maxima a následně určení maxima tohoto polynomu.

Kromě vlastnoručně napsaného skriptu pro Matlab je možné použít i již hotové řešení, např. volně dostupný program ImageJ², který umí mj. vykreslit profil intenzity podél zadané úsečky a data uložit pro další zpracování, viz obrázek 4.

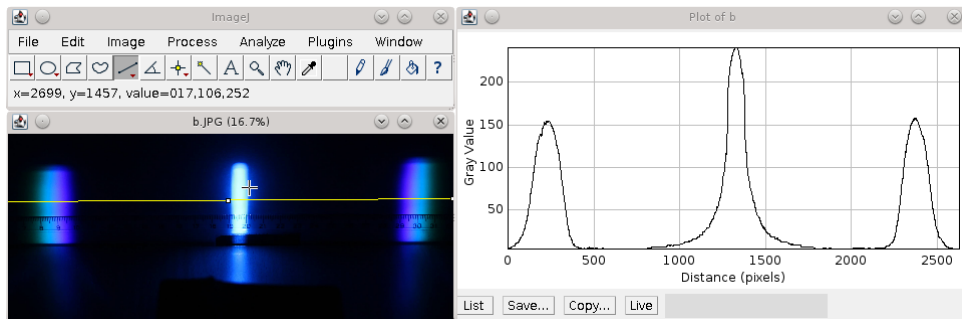
Graf na obrázku 5 končí prvním difrakčním maximem, protože další maxima nebyla viditelná.

Vlnové délky použitých zdrojů světla (LED diod) známe, v případě červené LED je to (623 ± 15) nm pro zelenou (572 ± 15) nm a pro modrou (470 ± 15) nm.

Měřili jsme vzdálenost maxim prvního řádu od maxima druhého řádu, což jsou pro každou zpracovávanou fotografii (pro danou vlnovou délku λ a danou vzdálenost stínítka od mřížky l) dvě hodnoty $-x_1$ a x_2 . Z každé z nich bylo následně možné vypočítat vzdálenost vrypů d_1 , resp. d_2 . Všechny tyto hodnoty uvádím v tabulce 1.

¹Zájemci si skript pro Matlab včetně ukázkových fotografií mohou stáhnout na <http://fykos.cz/rocnik27/1-e.zip>. Po drobných úpravách by měl jít spustit též v Octave. Do skriptu je třeba vložit jména souborů s fotografiemi, polohu difrakčního obrazce na nich a délku měřítka v pixelech. Po spuštění načte obrázky, najde maxima, vykreslí profil intenzity a vypočítá vzdálenost vrypů na fólii včetně nejistoty.

²<http://rsbweb.nih.gov/ij>



Obr. 4: Pomocí programu ImageJ je možné vykreslit průběh intenzity podél zadané úsečky.

Tabulka 1: Naměřené a z nich vypočítané hodnoty.

λ nm	l mm	x_1 mm	x_2 mm	d_1 μm	d_2 μm
470 ± 15	150 ± 3	69 ± 1	71 ± 1	$1,12 \pm 0,04$	$1,10 \pm 0,04$
470 ± 15	200 ± 3	93 ± 1	91 ± 1	$1,11 \pm 0,04$	$1,13 \pm 0,04$
470 ± 15	250 ± 3	117 ± 1	116 ± 1	$1,11 \pm 0,04$	$1,12 \pm 0,04$
572 ± 15	150 ± 3	93 ± 1	92 ± 1	$1,09 \pm 0,03$	$1,09 \pm 0,03$
572 ± 15	200 ± 3	121 ± 1	118 ± 1	$1,11 \pm 0,03$	$1,13 \pm 0,03$
572 ± 15	250 ± 3	155 ± 1	156 ± 1	$1,09 \pm 0,03$	$1,08 \pm 0,03$
623 ± 15	150 ± 3	103 ± 1	102 ± 1	$1,10 \pm 0,03$	$1,11 \pm 0,03$
623 ± 15	200 ± 3	140 ± 1	136 ± 1	$1,09 \pm 0,03$	$1,11 \pm 0,03$
623 ± 15	250 ± 3	170 ± 1	171 ± 1	$1,11 \pm 0,03$	$1,10 \pm 0,03$

Nejistoty měření

Nejistoty vlnové délky máme zadané na $\Delta\lambda = 15$ nm.

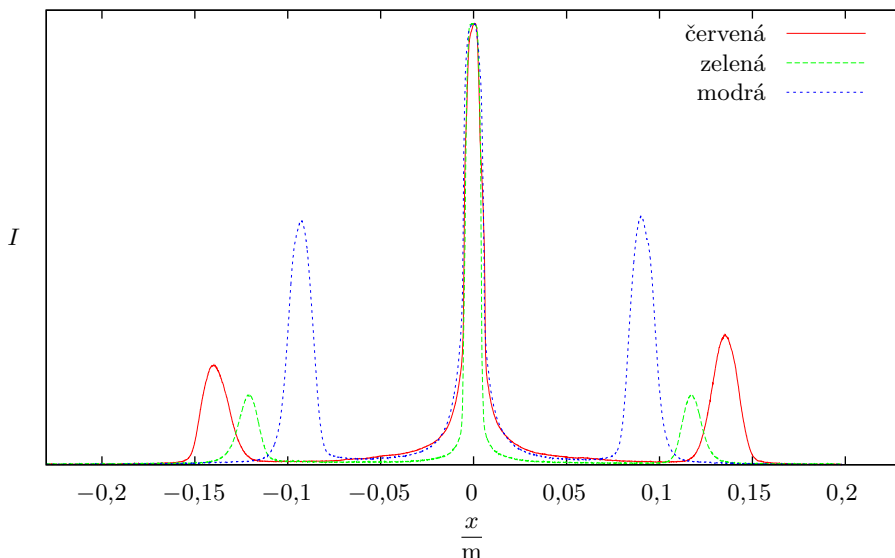
Vzdálenost l difrakční fólie od stínítka byla měřena pravítkem, nejistotu odhadneme na $\Delta l = 3$ mm.

Pokud bychom polohu difrakčních maxim určovali pouhým okem, byla by její nejistota poměrně velká, závisela by na šířce štěrbin (při široké štěrbině bude proužek široký a střed se bude hledat obtížně) a vzdálenosti fólie od stínítka. Protože jsme však pomocí fotoaparátu změřili profil intenzity, můžeme maxima najít mnohem přesněji. V našem případě bychom odhadli nejistotu na $\Delta x = 1$ mm.

Z výše uvedených byla nejistota typu B (tedy nejistota způsobená např. nepřesností použitých měřidel) vypočítána (a uvedena u veličin d_1 a d_2 v tabulce 1) pomocí zákona šíření nejistot jako

$$\Delta_B d = \sqrt{\left(\Delta\lambda \frac{\partial d}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\Delta l \frac{\partial d}{\partial l}\right)^2 + \left(\Delta x \frac{\partial d}{\partial x}\right)^2}.$$

Dále budeme uvažovat $\Delta_B d = 0,04$ μm .



Obr. 5: Změřená závislost intenzity na poloze na stínítku pro všechny tři barvy LED a pro vzdálenost fólie od stínítka 20 cm.

Protože bylo zpracováno 9 snímků, dostali jsme 18 různých hodnot d . Z těchto hodnot byla vypočítána výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru. Po vynásobení Studentovým koeficientem dostáváme nejistotu typu A $\Delta_A d = 0,01 \mu\text{m}$.

Nakonec vypočteme výslednou nejistotu

$$\Delta d = \sqrt{(\Delta_A d)^2 + (\Delta_B d)^2} = 0,05 \mu\text{m}.$$

Diskuse výsledků

Po vypočítání vzdálenosti vrypů též již dokážeme (ačkoliv jen pro červenou a zelenou) vysvětlit, proč byla viditelná pouze maxima prvního řádu. Dle vztahu (2) musí platit $k\lambda < d$ (funkce sinus je vždy menší nebo rovna 1, nicméně hodnota 1 by znamenala pravý úhel, což na stínítku nezachytíme), což pro změřenou hodnotu d a zadané vlnové délky červeného a zeleného světla platí pouze pro $k = 1$. Pro modrou barvu je přípustné i $k = 2$, nicméně maximum druhého řádu též nebylo viditelné. Ve vztahu (5) určuje intenzitu maxim druhá závorka. Dle velikosti otvoru v difrakční mřížce se může stát, že tento člen bude v místě maxima členu prvního nulový, pak by celý výraz byl nulový, a tedy maximum by v daném místě nebylo. Také se může stát, že intenzita bude tak malá, že maximum nebudeme schopni detekovat.

Srovnáme-li teoretickou závislost intenzity na obrázku 3 a naměřenou na obrázku 5, objevíme několik rozdílů. Jedním z nich jsou chybějící malá maxima. Pro výpočet teoretické závislosti byl pro názornost použit počet vrypů $N = 10$. Ve skutečnosti však bylo vzhledem k šířce štěrbin asi 0,5 mm osvětleno asi 500 otvorů. Se vzrůstajícím počtem otvorů intenzita těchto maxim klesá

(zájemci si mohou zkusit vykreslit vztah (5) pro různé parametry). Druhým rozdílem je rozdílná intenzita maxim prvního řádu pro různé vlnové délky. To je možné připsat způsobu záznamu a následném zpracování. Maxima nultého řádu neměla po zpracování stejnou intenzitu, což bylo způsobeno rozdílnou svítivostí jednotlivých diod, a tedy nutností přizpůsobovat expoziční čas (příčemž nebylo možné jednoduše trefit takový, aby byla intenzita stejná).

Závěr

Pomocí analýzy fotografií difrakčních obrazců byla změřena vzdálenost vrypů na difrakční fólii $d = (1,11 \pm 0,05) \mu\text{m}$.

Komentář k došlým řešením

Nejčastější chyba v došlých řešeních bylo špatné zaokrouhlování. Nejistota výsledku by měla být zaokrouhlena na jednu platnou číslici, je-li první platná číslice 1 (popř. někdy i 2), pak na dvě platné číslice. Podle nejistoty se pak zaokrouhlí i střední hodnota. Někteří řešitelé uvedli výsledky s přesností na pikometry ($1 \cdot 10^{-12} \text{m}$). U experimentálních úloh stále se opakující chybou bylo též nepopsání značení fyzikálních veličin.

Často řešitelé též chybně použili aproximaci $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha$, přestože správně dodali, že platí jen pro malé úhly α . Úhly prvních maxim byly asi 25° – 35° , což rozhodně nemůžeme považovat za malý. Nikdo z těch, kteří tuto aproximaci použili, tak nedostali správný výsledek, ačkoliv měli naměřené správné hodnoty.

Mnoho řešitelů si neuvědomilo, že měření je vhodné několikrát opakovat pro jiné hodnoty veličin, které můžeme měnit. Při tomto experimentu to byla vzdálenost stínítka od fólie, která šla (při dostatečné tmě) měnit ve velkém rozsahu, čímž bylo možné získat více hodnot a vyloučit tak chyby při některých měřeních. U této úlohy bylo velmi vhodné měřit vzdálenost obou maxim 1. řádu od maxima 0. řádu, čímž bylo možné vyloučit chybu vzniklou nerovnoběžností difrakční fólie se stínítkem, což bohužel mnoho řešitelů též neudělalo.

Velmi často jsme se při opravování setkali též s tím, že nebyl dostatečně nebo vůbec popsán pozorovaný jev, tedy difrakce (v některých řešeních se slovo difrakce dokonce ani nevyskytovalo), a nebyly vůbec diskutovány nejistoty měření.

Malá rada na závěr – obrázek nejen vydá za celé odstavce textu, ale často i pomůže při výpočtu.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.