Úloha II.5 ... kelímek na vodě

5 bodů; průměr 2,73; řešilo 51 studentů

Kužel obrácený podstavou vzhůru může držet ve vzduchu na stříkajícím proudu vody, který vychází ze země s konstantním hmotnostním průtokem a počáteční rychlostí v_0. V jaké výšce nad zemí se bude kužel v rovnováze vznášet?

Bonus *Vyšetřete stabilitu kužele v této poloze.* *Radomír pil až do dna.*

Označme hmotnost kužele jako M, poloměr podstavy kužele r, jeho výšku h a jeho vrcholový úhel 2α, kde $\operatorname{tg} \alpha = r/h$.

Zaměřme se nejdříve na proud vody stříkající ze země. Aby byla úloha jednoduše řešitelná, zavedeme následující předpoklady.

- Proud má u země horizontální řez ve tvaru kruhu. Z axiální symetrie problému je potom zřejmé, že průřez proudu zůstane kruhový ve všech výškách nad zemí.
- Osa kužele souhlasí s osou symetrie vodního proudu.
- Rozměry kužele jsou dostatečně malé, abychom si mohli dovolit položit horizontální složku rychlosti proudu v okolí kužele rovnu nule.[1]
- Tlak v celém proudu vody je přibližně konstantní.[2]

Označíme-li v_0 rychlost vodního proudu u země, vidíme ze zákona zachování energie (připomeňme, že tlak vody v celém proudu považujeme přibližně za konstantní), že jeho rychlost ve výšce H nad zemí v okolí osy proudu bude

$$v(H) = \sqrt{v_0^2 - 2Hg}\,,$$

a tedy, že jednotkou vodorovné plochy ve výšce H proteče za jednotku času hmotnost $\mu(H) = \varrho v(H)$, kde ϱ jsme označili hustotu vody (zde pro změnu uplatňujeme předpoklad o nulové horizontální složce rychlosti proudu). Rovněž vidíme, že pro

$$H_\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{2g}$$

máme $v(H_\mathrm{m}) = 0$. Voda ale někam odtéct musí, takže pro místa při vrcholu proudu náš předpoklad o nulové horizontální složce selhává. Budeme tedy uvažovat pouze případ, kdy se kužel nenachází v blízkosti vrcholu proudu.

Dále si musíme zvolit model srážky proudu s kuželem. Poslouží nám přiblížení, kdy budeme požadovat zachování složky rychlosti proudu, která je tečná k povrchu kužele (tedy žádné tření). Pro normálovou složku pak uvážíme obecný případ nepružné srážky, kdy $v'_\perp = e v_\perp$ ($v'_\perp$ resp. $v_\perp$ značí normálové rychlosti před srážkou resp. po srážce a $0 \leq e \leq 1$ je koeficient restituce). Ve skutečnosti je to skoro jistě o hodně složitější a museli bychom se ponořit do studia mechaniky kontinua, abychom se mohli následně vynořit s realističtějším modelem obtékání kužele. Proto se ani nebudeme snažit započítávat jiné síly působící na kužel (hydrostatickou, vztlakovou apod.) než tíhovou sílu a reakci na srážkou s proudem vody.

Při výpočtu síly, kterou proud vody působí na kužel, postupujeme tak, že si plochu pláště rozsekáme na koaxiální prstýnky o poloměru $x = y \operatorname{tg} \alpha$, kde projekce jejich šířky do vodorovné

[1] Jelikož očekáváme, že vertikální složka rychlosti proudu bude s rostoucí výškou klesat, bude se dle rovnice kontinuity proud rozšiřovat a rychlosti elementů vody budou obecně mít nenulovou horizontální složku. Tato horizontální složka však zřejmě bude klesat směrem k ose symetrie, kde musí být nulová.

[2] Pokud bychom se rozhodli řešit problém exaktně pomocí rovnic pro nestlačitelnou tekutinu v homogenním gravitačním poli, mohli bychom zjistit podmínky, za kterých je tento předpoklad splněn. To zde ovšem dělat nebudeme, neboť je to vysoce nad rámec toho, co by i šikovný středoškolák měl zvládnout.

roviny (aneb účinný průřez ve vertikálním směru) je $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{d}y$. Za jednotku času potom na plochu jednoho prstýnku dopadne element vody o hmotnosti

$$\mathrm{d}m = 2\pi x\mu(H+y)\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = 2\pi y\mu(H+y)\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,,$$

jehož rychlost se při srážce v normálovém směru změní o $(1+e)v(H+y)\sin\alpha$. Z druhého Newtonova zákona pak ihned víme, že na plochu prstýnku působí v normálovém směru síla o velikosti

$$\mathrm{d}F_\perp = 2\pi(1+e)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\mu(H+y)v(H+y)y\,\mathrm{d}y\,.$$

Integrujeme-li tuto sílu po povrchu kužele, zjistíme, že horizontální složky se nám vyruší a zbude nám pouze celková vertikální síla působící na kužel, jejíž velikost vyjde (dosazujeme za $\mu(H+y)$ a $v(H+y)$)

$$F_{\mathrm{vert}} = 2\pi\varrho(1+e)\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\int_0^h\left(v_0^2-2gH-2gy\right)y\,\mathrm{d}y,$$

kde předpokládáme, že se kužel nenachází poblíž vrcholu proudu a tedy, že voda dopadá na celý jeho plášť. Po triviální integraci pak dostáváme

$$F_{\mathrm{vert}} = 2\pi\varrho h^2(1+e)\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\left(\frac{v_0^2}{2}-gH-\frac{2}{3}gh\right)\,.$$

Pro rovnovážnou výšku nad zemí H_{eq} platí (porovnáme F_{vert} s tíhovou silou působící na kužel Mg, ze symetrie je rovněž zřejmé, že výsledný moment síly působící na kužel je automaticky nulový)

$$H_{\mathrm{eq}} = \frac{v_0^2}{2g}-\frac{2}{3}h-\frac{M}{2\pi\varrho h^2\left(1+e\right)\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha},$$

neboli po dosazení $H_{\mathrm{m}} = v_0^2/2g$ a $S_{\mathrm{eff}} = \pi r^2 = \pi h^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$ (účinný průřez kužele ve vertikálním směru),

$$H_{\mathrm{eq}} = H_{\mathrm{m}}-\frac{2}{3}h-\frac{M}{2\varrho S_{\mathrm{eff}}\left(1+e\right)\sin^2\alpha}\,. \tag{1}$$

Selský rozum nám říká, že H_{eq} by měla růst s rostoucí v_0 (ekvivalentně s rostoucí H_{m}), klesat s rostoucí M, růst s rostoucím e, růst s rostoucím S_{eff} a také že $H_{\mathrm{eq}} \leq H_{\mathrm{m}}$. Všechny tyto vlastnosti vztah (1) splňuje, což je pro nás znamením, že jsme na správné cestě.

Skutečně, pokud nevychází $H_{\mathrm{eq}} \approx H_{\mathrm{m}}$, je náš předpoklad, že se kužel nenachází poblíž vrcholu proudu, validní a vztah (1) můžeme považovat za náš konečný výsledek. Zvolíme-li přibližné kritérium platnosti této podmínky jako $H_{\mathrm{eq}} \lesssim H_{\mathrm{m}}-h$, pak tato podmínka přestává platit pro

$$h \gtrsim \frac{3M}{2\varrho S_{\mathrm{eff}}\left(1+e\right)\sin^2\alpha}\,.$$

Tuto nerovnost můžeme vyčíslit pomocí předem definovaných parametrů problému. Pokud zjistíme, že neplatí, selže náš předpoklad o nulovosti horizontální složky rychlosti proudu a my musíme přistoupit k exaktnímu řešení problému. Jak jsme ale napsali výše, to zde provádět nebudeme.

Na závěr se pokusme adresovat otázku stability takovéto rovnovážné polohy (předpokládáme zjednodušující podmínky zmíněné výše).

Nejdříve, z předpokládané symetrie vůči horizontálnímu posunutí, je zřejmé, že rovnovážná poloha je indiferentní vůči horizontálním výchylkám translačního charakteru.[3] Stejně tak je poloha indiferentní vůči malým pootočením kolem osy kužele (axiální symetrie problému).

Dále, vychýlíme-li kužel o malou vzdálenost η ve vertikálním směru, máme velikost výslednice sil působících na kužel

$$F = M\ddot{\eta} = 2\varrho S_{\mathrm{eff}}\,(1+e)\sin^2\alpha\left(gH_{\mathrm{m}} - gH_{\mathrm{eq}} - g\eta - \frac{2}{3}gh\right) - Mg\,,$$

což po dosazení za H_{eq} dává

$$M\ddot{\eta} = -\left[2g\varrho S_{\mathrm{eff}}\,(1+e)\sin^2\alpha\right]\eta\,,$$

kde $k = 2g\varrho S_{\mathrm{eff}}(1+e)\sin^2\alpha > 0$, takže síla je namířena proti výchylce a rovnovážná poloha je tedy stabilní. Rovnou můžeme rovněž odečíst úhlovou frekvenci kmitů kužele kolem rovnovážné polohy $\omega = \sqrt{k/M}$, kde k je definované výše.

Konečně, fixujeme těžiště a pootočíme kužel o malý úhel kolem libovolné osy kolmé na osu kužele (úhel měříme od směru vzhůru). Nakreslíme-li si přehledný obrázek, na kterém si pootočený kužel rozdělíme vertikální rovinou kolmou na pootočení a procházející těžištěm kužele, jasně vidíme, že pro dostatečně malé úhly (tak, aby plášť kužele na opačné straně od pootočení ještě nebyl rovnoběžný s vertikálou) je účinný průřez té části kužele, který se od těžiště nachází ve směru pootočení, větší než účinný průřez opačné části (navíc, ve směru pootočení dopadá proud na kužel více kolmo, takže se vertikální složka hybnosti přenáší efektivněji). Výsledný moment síly je tedy namířen proti směru pootočení a poloha je tedy *stabilní* vůči výchylkám tohoto druhu (při pootočení rovněž mírně klesne celkový účinný průřez, takže kužel klesne ve vertikálním směru, ale jak jsme ukázali výše, poloha je ve vertikálním směru stabilní). Pro větší výchylky pak předpokládáme přítomnost druhé, *labilní*, rovnovážné polohy.

Kuba Vošmera
`kuba@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[3] Přestaneme-li ignorovat horizontální složku rychlosti, tato symetrie nám zmizí a je navíc zřejmé, že takovéto výchylky budou labilní, neboť ve směru posunutí budou vektory rychlosti proudu natočené více od kolmice k povrchu pláště kužele (a hybnost se bude přenášet méně efektivněji, viz faktor $\sin^2\alpha$ v (1)) a naopak, na druhé straně budou vektory rychlosti proudu natočené více ke kolmici, takže se hybnost bude přenášet efektivněji. Výsledná horizontální síla na kužel tedy bude podporovat výchylku v růstu.