## Úloha V.5 ... hlídání dětí

5 bodů; průměr 2,97; řešilo 37 studentů

*Mějme houpačku zavěšenou na dvou svislých lanech délky $l = 1{,}5\,\mathrm{m}$ na vodorovné tyči o poloměru $r = 4\,\mathrm{cm}$. Dítěti sedícímu na houpačce udělíme v dolní úvrati takovou rychlost $v_0$, aby dítě vykonalo celou otočku kolem horizontální tyče a lana byla během namotávání stále napnutá. Zároveň chceme, aby počáteční rychlost byla nejmenší možná. Určete rozdíl úhlové rychlosti $\omega_1$ houpačky s dítětem po návratu do dolní úvrati a počáteční úhlové rychlosti $\omega_0$.*
Nápověda *Pro výpočet odstředivého zrychlení můžete uvažovat, že se dítě pohybuje lokálně po kružnici.*
*Mirek si vždycky rád hrál s mladšími sourozenci.*

V celé úloze budeme předpokládat, že lana mají zanedbatelnou šířku i hmotnost, a dítě s houpačkou budeme považovat za hmotný bod. Víme, že během rotace houpačky kolem tyče se budou lana postupně navíjet a tím se bude zkracovat poloměr rotace. Houpačka se tedy bude pohybovat po Archimédově spirále, tj. zkrácení lana bude přímo úměrné úhlu, o který se houpačka otočila.

Aby zůstala lana napnutá a dítě z houpačky nevypadlo, musí být v horní úvrati odstředivá síla větší nebo rovna síle tíhové.[1] Zároveň však musíme splnit podmínku, že počáteční rychlost houpačky musí být co nejmenší. Toho dosáhneme právě tehdy, když si budou odstředivá a tíhová síla přesně rovny. Pro zjednodušení zatím předpokládejme, že při otočení o malý úhel se změní délka lana pouze minimálně, a můžeme proto velikost odstředivé síly v daném bodě počítat ze vztahu $F = mv^2/d$, kde $d$ je vzdálenost od osy otáčení (diskusi vlivu tohoto zanedbání viz níže).

Délka lana v horní úvrati je $l - \pi r/2$, protože lana se začnou navíjet až po otočení o $\pi/2$. Z úvah v předchozím odstavci nám plyne rovnost

$$\frac{v_\mathrm{u}^2}{l - \pi r/2} = g\,, \tag{1}$$

kde $v_\mathrm{u}$ je rychlost houpačky v horní úvrati. Zároveň ze zákona zachování mechanické energie získáme vztah

$$\frac{1}{2}\left(v_0^2 - v_\mathrm{u}^2\right) = gl\left(2 + \frac{r}{l} - \frac{\pi}{2}\frac{r}{l}\right)\,. \tag{2}$$

Z rovnice (1) vyjádříme $v_\mathrm{u}^2$, dosadíme do (2) a vyjádříme počáteční rychlost

$$v_0^2 = gl\left(5 + 2\frac{r}{l} - \frac{3}{2}\pi\frac{r}{l}\right)\,. \tag{3}$$

Rychlost $v_1$ v dolní úvrati po otočení houpačky o plný úhel určíme opět na základě ZZME z rovnice

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}v_1^2 = gl\left(\frac{r}{l} + \frac{3}{2}\pi\frac{r}{l}\right)\,, \tag{4}$$

kde nárůst potenciální energie je úměrný součtu délky namotaného lana a poloměru tyče (střed rotace je nyní právě o tento jeden poloměr výše než na počátku). Ze vztahů (3) a (4) dostaneme

$$v_1^2 = gl\left(5 - \frac{9}{2}\pi\frac{r}{l}\right)\,. \tag{5}$$

[1] Horní úvratí zde myslíme polohu, kdy je houpačka nejvýše, lana tedy směřují kolmo vzhůru. Správně bychom podmínku pro síly měli vyšetřovat v mírně odlišné poloze, viz níže.

Nyní už jsme schopni po odmocnění vztahů (3) a (5) vyjádřit rozdíl úhlových rychlostí

$$\omega_1 - \omega_0 = \frac{\sqrt{\frac{g}{l}\left(5 - \frac{9}{2}\pi\frac{r}{l}\right)}}{1 - \frac{3}{2}\pi\frac{r}{l}} - \sqrt{\frac{g}{l}\left(5 + 2\frac{r}{l} - \frac{3}{2}\pi\frac{r}{l}\right)} \doteq 0{,}61\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,. \tag{6}$$

Při výpočtu úhlových rychlostí jsme (podobně jako v případě odstředivého zrychlení) použili přímo délku lana příslušející oběma polohám. Pokud ovšem budeme chtít zahrnout skutečnost, že se houpačka pohybuje přibližně po spirále, budeme muset poloměry použité ve výpočtu odstředivé síly a úhlové rychlosti nahradit poloměrem oskulační kružnice. To je taková kružnice, jejíž poloměr je roven převrácené hodnotě křivosti trajektorie ve zkoumaném bodu této trajektorie. Pro parametricky zadanou rovinnou křivku

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

je poloměr $R$ oskulační kružnice definován vztahem

$$R = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}\,, \tag{7}$$

kde $\dot{x}$ je derivace $x$ podle parametru $t$. Trajektorie houpačky leží na Archimédově spirále s počátkem rotujícím po kružnici, kterou v parametrizaci úhlem $\vartheta$ popíšeme rovnicí

$$a(\vartheta) = \begin{pmatrix} r\left(\sin\vartheta + \left(\frac{l}{r} - \vartheta\right)\cos\vartheta\right) \\ r\left(-\cos\vartheta + \left(\frac{l}{r} - \vartheta\right)\sin\vartheta\right) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Úhel $\vartheta$ je volen tak, aby byl nulový ve chvíli, kdy houpačka při otáčení poprvé dorazí do vodorovné polohy. Tato volba parametrizace je výhodná, protože se pro kladná $\vartheta$ vyhneme úseku na začátku pohybu, během kterého se houpačka pohybuje přesně po kružnici. Poloze, kdy má lano délku $L(\vartheta)$, pak odpovídá hodnota parametru $\vartheta = (l - L(\vartheta))/r$. Po dosazení (8) do (7) dostaneme velmi sympatický výraz

$$R = r\left(\frac{l}{r} - \vartheta\right).$$

Za $\vartheta$ nyní dosadíme hodnoty $\vartheta_1$, $\vartheta_2$ odpovídající dolní úvrati po jedné otočce a horní úvrati, tedy

$$\vartheta_1 = \frac{3}{2}\pi = \frac{l - L(\vartheta_1)}{r}\,,$$
$$\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} = \frac{l - L(\vartheta_2)}{r}\,.$$

Tento zápis pomocí okamžité délky $L(\vartheta)$ nám nyní umožňuje kompaktně zapsat hledané poloměry oskulačních kružnic

$$R(\vartheta) = r\left(\frac{l}{r} - \frac{l - L(\vartheta)}{r}\right) = L(\vartheta)\,.$$

Odtud je již vidět, že se při ztotožnění okamžité délky lana a poloměru rotace nedopouštíme žádné chyby.

Nyní se vrátíme k výpočtu počáteční úhlové rychlosti $\omega_0$, u nějž jsme poznamenali, že podmínka na rovnost velikostí odstředivé síly a tíhové síly v horní úvrati (1) není zcela správná. Polohu, kde má tato rovnost nastat, určíme na základě zákona zachování energie. Jelikož se charakter pohybu houpačky změní při dosažení vodorovné polohy, budeme ji považovat za počáteční a popíšeme ji pomocí $\vartheta = 0$, $\dot{\vartheta} = \omega_\mathrm{h}$. Používáme tedy stejnou parametrizaci jako při výpočtu poloměru oskulační kružnice. Potom můžeme pro kinetickou a potenciální energii psát

$$T = \frac{1}{2} m R(\vartheta)^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} m (l - r\vartheta)^2 \dot{\vartheta}^2 \,,$$
$$V = mg\left(r(1-\cos\vartheta) + (l - r\vartheta)\sin\vartheta\right) \,.$$

Nulovou hladinu potenciální energie jsme přitom nastavili do vodorovné polohy, kinetická energie odpovídá pohybu po oskulační kružnici. Z volby nulové hladiny potenciální energie plyne, že celková mechanická energie systému je

$$E = \frac{1}{2} m \omega_\mathrm{h}^2 l^2 \,.$$

Ze zákona zachování $E = T + V$ jsme schopni vyjádřit kvadrát úhlové rychlosti

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{\omega_\mathrm{h}^2 l^2 - 2gr(1-\cos\vartheta) - 2g(l - r\vartheta)\sin\vartheta}{(l - r\vartheta)^2} \,.$$

Pro odstředivé zrychlení potom máme

$$a_\mathrm{d} = (l - r\vartheta)\dot{\vartheta}^2$$

a požadujeme, aby stále platilo

$$a_\mathrm{d} \geq g\sin\vartheta \,,$$

kde $g\sin\vartheta$ je složka tíhového zrychlení ve směru lana. Rovnost má nastat pouze v jednom jediném bodě blízkém horní úvrati – v něm musí mít rozdíl zrychlení minimum, které nalezneme derivací. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\frac{\omega_\mathrm{h}^2 l^2 - 2gr(1-\cos\vartheta) - 2g(l - r\vartheta)\sin\vartheta}{l - r\vartheta} - g\sin\vartheta = 0 \,, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\frac{\omega_\mathrm{h}^2 l^2 - 2gr(1-\cos\vartheta) - 2g(l - r\vartheta)\sin\vartheta}{l - r\vartheta} - g\sin\vartheta\right) = 0 \tag{10}$$

pro proměnné $\omega_\mathrm{h}$, $\vartheta$. Z rovnice (9) jsme schopni vyjádřit

$$\omega_\mathrm{h}^2 l^2 = 2gr(1-\cos\vartheta) + 3g\sin\vartheta(l - r\vartheta) \tag{11}$$

a po zderivování (10) a dosazení za $\omega_\mathrm{h}^2 l^2$ z (11) dostaneme

$$3\cos\vartheta(l - r\vartheta) - r\sin\vartheta = 0 \,.$$

Získali jsme tak transcendentní rovnici pro $\vartheta$, kterou nedokážeme analyticky řešit.

K poměrně přesnému výsledku bychom dospěli rozvinutím funkce $\sin\vartheta$ a $\cos\vartheta$ do Taylorovy řady kolem bodu $\vartheta = \pi/2$. Pokud bychom provedli rozvoj do druhého řádu,[2] řešili bychom kvadratickou rovnici pro $\vartheta$. Výsledkem je $\vartheta \doteq 1{,}561\,52\,\mathrm{rad}$.

Větší přesnosti však můžeme dosáhnout numerickými metodami. Mezi nejrozšířenější metody řešení nelineárních soustav rovnic patří metoda bisekce (půlení intervalu), metoda tečen, metoda sečen a metoda regula falsi. Jejich podrobný popis a implementaci do programovacího jazyka C++ nalezneme např. v knize *Numerical Recipes in C*.[3] My zde použijeme metodu tečen zvanou též Newtonova. Tato metoda aproximuje funkci $f(x)$ v okolí odhadu $x_k$ prvním členem Taylorova rozvoje, tj. tečnou v bodě $[x_k, f(x_k)]$. Řešíme rovnici $f(x) = 0$ v aproximaci

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_k - x) = 0\,.$$

Řešení této rovnice označíme $x_{k+1}$ a pokračujeme v iteraci až po dosažení konvergence, lépe řečeno dokud není splněna podmínka $|x_k - x_{k+1}| < \delta$, kde $\delta$ volíme podle požadované přesnosti. Metoda tečen konverguje obecně rychleji než ideově jednodušší metoda bisekce, ale na rozdíl od ní může selhat a divergovat. Nebudeme zde uvádět přesné předpoklady kladené na zkoumanou funkci, ale snadno si rozmyslíme, že problematická budou například okolí stacionárních bodů (derivace nulové, dělíme nulou).

Implementace základní verze metody tečen do některého z běžných programovacích jazyků není složitá, my jsme však raději zvolili odladěnou funkci NEWTON obsaženou v programovacím jazyce IDL. Pro odhad $\vartheta = 1{,}55$ jsme dostali výsledek $\vartheta \doteq 1{,}561\,52\,\mathrm{rad}$ a z (11) jsme dopočetli $\omega_\mathrm{h} \doteq 4{,}375\,82\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Hledaná poloha, ve které má nastat rovnost sil, je od svislé polohy odchýlena o přibližně $0{,}5^\circ$. Ze ZZME triviálně dopočteme $\omega_0 \doteq 5{,}676\,95\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Zjednodušený výpočet $\omega_0$ v (6) dává hodnotu $5{,}676\,87\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Lišíme se až na páté platné číslici, odhad kritické polohy $\vartheta = \pi/2$ je tedy velmi dobrý.

***Miroslav Hanzelka***
`mirek@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.



[2] $\cos\vartheta \approx \pi/2 - \vartheta$ a $\sin\vartheta \approx 1 - (\pi/2 - \vartheta)^2/2$

[3] Starší verze dostupné online na `http://www.nr.com/oldverswitcher.html`.