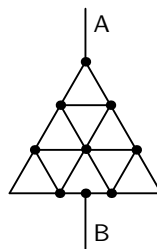


Úloha V.4 ... trojúhelníkový odporník 4 body; průměr 2,71; řešilo 42 studentů

Určete odpor trojúhelníku vytvořeného z odporového drátu mezi svorkami A a B, které vidíte na obrázku. Jedna strana malého trojúhelníčku (ze kterých se skládá velký trojúhelník) má odpor R_0 . Odpor přírodních vodičů neuvažujte. *Karel si maloval trojúhelníčky.*



Obr. 1:
Trojúhelník

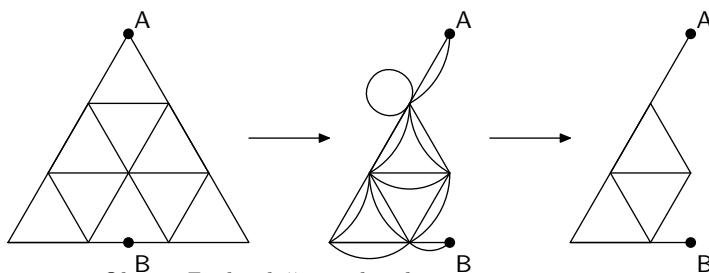
Zamysleme sa, čím vieme popísať elektrický obvod. Každému uzlu vieme priradiť potenciál φ a každému drôtu prúd I . Ak spája drôt s odporom r i -ty a j -ty uzol, potom ním tečie prúd

$$I_{ij} = \frac{\varphi_i - \varphi_j}{r}$$

z i -tého do j -tého uzla (ak je záporný, znamená to len, že kladný prúd $-I_{ij} = I_{ji}$ tečie opačným smerom). Ide o obyčajný Ohmov zákon – napätie medzi uzlami je totiž rozdiel ich potenciálov a prúd tečie z väčšieho potenciálu na menší.

Ak teda pridáme medzi 2 uzly s rovnakými potenciálmi drôt s ľubovoľne malým odporom, nebude týmto drôtom tiecť žiadny prúd – ten ale netiekol ani pred tým, takže sa v obvode nič, vrátane odporu medzi bodmi A a B, nezmení. Potom môžeme tento drôt skracovať na ľubovoľne malú dĺžku, až kým sa naše 2 uzly spoja do jedného, tiež bez zmeny odporu medzi bodmi A a B. Pozor, pri takomto spojení uzlov stále existujú všetky pôvodné drôty!

Dvojíc s rovnakými potenciálmi sa dá ľahko nájsť dosť veľa. Obvod je totiž symetrický podľa osi AB, teda každé 2 uzly, ktoré sú si navzájom obrazmi v tejto osovej súmernosti, budú mať aj rovnaké potenciály. Spojme teda každé dva také uzly do jedného.



Obr. 2: Zjednodušenie obvodu pomocou symetrie.

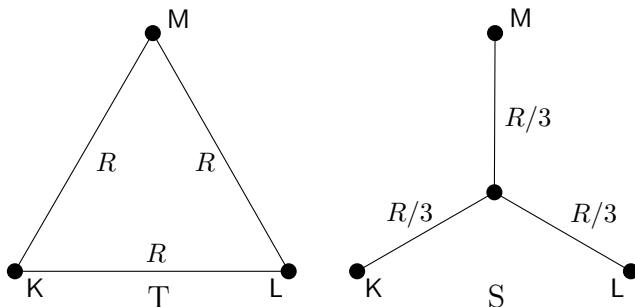
Pri druhom zjednodušení na obr. 2 ešte zahodíme drôt, ktorý spájal jeden uzol sám so sebou (týmto drôtom žiadny prúd zjavne netečie) a nahradili každé 2 paralelne zapojené drôty s rovnakými odpormi r jedným drôtom s odporom $r/2$. Celá strana malého trojuholníčka bude potom mať odpor $R_0/2$ a jej polovica pri uzle A odpor $R_0/4$.

Transformácia trojuholník-hviezda

Predstavme si čiernu skrinku, do ktorej môžeme pripojiť drôty na niekoľkých miestach (tzv. termináloch), zvoliť potenciály na týchto termináloch a merať prúdy, ktoré cez tieto drôty tečú.

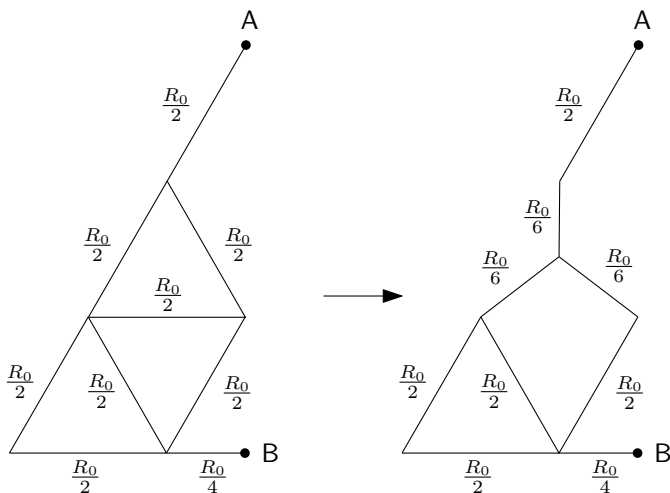
Ak by sme mali dve takéto čierne skrinky (T a S), pre ktoré nameráme pre rovnaké potenciály vždy rovnaké prúdy, potom môžeme v ľubovoľnom obvode vymeniť skrinku T za skrinku S (a naopak) bez toho, aby sa ľubovoľná veličina (odpory, prúdy, atď.) v obvode zmenila.

Dá sa dokázať¹ že skrinky na obr. 3 (s terminálmi K, L a M) sú v tomto zmysle ekvivalentné. Zapojeniu v skrinke T hovoríme trojuholník, zapojeniu v skrinke S zasa hviezd². Ekvivalentnú hviezdzu vieme nájsť ľubovoľnému trojuholníku, vzťahy medzi odpormi v hviezde a v trojuholníku sú ale zložitejšie.



Obr. 3: Ekvivalentné zapojenia do trojuholníka a do hviezdy.

Všimnime si, že práve trojuholník zložený z drôtov s rovnakými odpormi sa v našom (už zjednodušenom) obvode nachádza. Môžeme ho teda nahradiť hviezdou ako na obr. 4.



Obr. 4: Zjednodušenie obvodu nahradením trojuholníka hviezdou.

¹Ide o veľmi známy trik pri počítaní odporov, dôkaz preto neuvádzame.

²i

Odpor R tohoto obvodu už spočítáme přímočiaro – už zo základnej školy predsa vieme, že sériovo zapojené rezistory s odpormi R_1 a R_2 sa správajú ako jeden rezistor s odporom $R_1 + R_2$ a pri paralelnom zapojení zasa ako rezistor s odporom

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

Odpor medzi bodmi A a B teda bude

$$R = \frac{R_0}{4} + \frac{1}{\frac{\frac{R_0}{6} + \frac{R_0}{2}} + \frac{1}{\frac{R_0}{6} + \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{2}{R_0}}}} + \frac{R_0}{6} + \frac{R_0}{2} = \frac{101}{84}R_0.$$

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.