Úloha V.E ... gumipuk

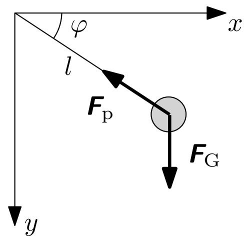
8 bodů; průměr 4,40; řešilo 25 studentů

Závaží o hmotnosti m na gumičce délky l_0 je zavěšeno v pevném bodě o souřadnicích $x = 0$ a $y = 0$. Z osy x, která je horizontálně, závaží pouštíme. Jaká bude závislost nejnižšího dosaženého bodu na poloze na ose x?

Dominika zkoušela, jak co nejlépe někomu vypíchnout oko.

Tuto úlohu pojmeme téměř úplně experimentálně a z teorie se omezíme na druhý Newtonův zákon. Speciální případ pohybu závaží sice vyřešíme analyticky, ale pro popis obecného případu pohybu vytvoříme numerický model, který potom srovnáme s experimentem. V experimentu jsme používali pomůcky s těmito parametry: hmotnost závaží $m = (51{,}5 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g}$, délka nenatažené gumičky $l_0 = (19{,}1 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$, délka gumičky s volně visícím závažím (před samotným měřením) $d = (23{,}4 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$. Stejné hodnoty parametrů byly použity v numerickém modelu.

Rozbor situace vidíme na obrázku 1.



Obr. 1: Závaží na gumičce – označení veličin a sil.

Polohu závaží budeme popisovat kartézskými souřadnicemi x, y nebo polárními l, φ. Platí transformační vztahy $l = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = x/l$, $\sin\varphi = y/l$.

Na závaží působí v každém okamžiku tíhová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ o velikosti $F_\mathrm{G} = mg$, kde g je tíhové zrychlení, a síla pružnosti gumičky $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ o velikosti $F_\mathrm{p} = k(l - l_0)$, kde k je tuhost gumičky a $(l - l_0)$ je její prodloužení (tato síla působí pouze tehdy, když $l > l_0$).

Za pomoci uvedených vztahů můžeme napsat pohybové rovnice ($\ddot{x}$ a $\ddot{y}$ značí druhou derivaci souřadnic podle času, tedy zrychlení v jednotlivých souřadnicích)

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -F_\mathrm{p}\cos\varphi\,,\\
m\ddot{y} &= F_\mathrm{G} - F_\mathrm{p}\sin\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Dosadíme-li do nich za výše uvedené veličiny a vyjádříme zrychlení, dostaneme tvar, který využijeme při numerickém řešení:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{kx\left(\sqrt{x^2+y^2} - l_0\right)}{m\sqrt{x^2+y^2}}\,, \\
\ddot{y} &= g - \frac{ky\left(\sqrt{x^2+y^2} - l_0\right)}{m\sqrt{x^2+y^2}}\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Analytické řešení

Budeme řešit případ, kdy počáteční poloha závaží je $(0,0)$, tedy že ho volně pustíme dolů (pohyb probíhá pouze v ose y).

Tuhost gumičky spočítáme z protažení vlastní vahou závaží – dáme do rovnosti tíhovou sílu a sílu, jakou je gumička napínána, a vyjádříme $k = mg/(d - l_0)$. Vyjde $k = (11{,}7 \pm 0{,}4)\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$.

Ke zjištění protažení gumičky Δl zvolíme přístup přes energie. Zvolíme-li hladinu nulové potenciální energie v bodě $(0,0)$, pak v nejnižším místě trajektorie (po puštění) se bude potenciální energie závaží rovnat energii pružnosti z natažení gumičky, neboli

$$mg(l_0 + \Delta l) = \frac{1}{2}k\Delta l^2 \,.$$

Dosadíme za k a s využitím $l = l_0 + \Delta l$ vyjádříme prodloužení

$$\Delta l = d - l_0 + \sqrt{d^2 - l_0^2}\,,$$

tedy $\Delta l = (17{,}8 \pm 0{,}4)\,\mathrm{cm}$, kde jsme nejistotu typu B určili podle zákona šíření nejistot

$$s_{\Delta l} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta l}{\partial l_0} s_{l_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta l}{\partial d} s_d\right)^2}\,,$$

kde $s_{\Delta l}$ označuje nejistotu veličiny Δl atd.

Když prodloužení přičteme k původní délce gumičky l_0, dostaneme

$$l_0 + \Delta l = (36{,}9 \pm 0{,}4)\,\mathrm{cm}\,.$$

Numerický model

Numerickým řešením rovnic (1) Eulerovou metodou (prvního řádu) jsme získali model pohybu závaží. Jako počáteční podmínky jsme zvolili čas $t = 0\,\mathrm{s}$, $y = 0\,\mathrm{m}$, $v_x = v_y = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; polohu x_0 jsme měnili v intervalu $\langle 0, 2\,l_0\rangle$. Simulaci jsme nechali běžet 20 s s časovým krokem 0,001 s.

Pro hrubý odhad chyby metody zkusíme měnit časový krok a sledovat, o kolik se prodloužení změní. Je-li prodloužená délka 31,908 7 cm s krokem 0,001 s, 31,922 3 cm s polovičním krokem 0,000 5 s a 31,901 8 cm s dvojnásobným krokem 0,002 s, odhadneme chybu na 0,05 cm.

Zvolená metoda je sice jedna z nejjednodušších, nicméně vypočtený pohyb se od výsledků jiných metod významně liší až po několika kyvech.

Pro dvacet různých počátečních poloh jsme vykreslili polohu závaží a závislost délky gumičky na čase a odečetli délku gumičky, když poprvé dosáhla spodní úvrati. Číselné výsledky jsou v tabulce 1 a vyneseny v grafu na obrázku 2.

Pro zajímavost jsme vykreslili pohyb závaží pro dvě různé počáteční polohy (obrázky 3 a 4).

Experiment

Jako závaží jsme použili nástrčnou hlavici, lidově ořech. Gumičku jsme k němu připevnili stylově další gumičkou. Celý pokus jsme filmovali oproti světlému pozadí a nezapomněli na měřítko. Z videa jsme potom odečetli délku gumičky ve spodní úvrati. Pro každou polohu jsme udělali několik pokusů, z nich aritmetický průměr a výběrovou směrodatnou odchylku; její hodnotu jsme potom použili jako délku chybové úsečky.

Výsledky jsou v grafu na obrázku 5.

Tabulka 1: Maximální délka gumičky $l_{\max}$ pro různé počáteční polohy x – z numerického modelu.

x/l_0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$l_{\max}$/cm	36,93	36,89	36,76	36,53	36,20	35,76	35,21

x/l_0	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$l_{\max}$/cm	34,51	33,66	32,65	31,91	33,15	34,47	35,88

x/l_0	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$l_{\max}$/cm	37,25	38,50	39,67	40,80	41,95	43,13	44,36

Diskuze

Ve výsledném grafu nelze v rámci chyb s jistotou pozorovat hledanou klesající závislost. Mohlo by to být chybami měření, které by mohly být způsobeny nahráváním videa v kvalitě 30 fps, nepřesným uspořádáním, zkreslením videa, atd. – ale tyto důvody nebudou hlavní příčinou neúspěchu. Porovnejme klidovou délku gumičky před měřením a po dvaceti měřeních – 19,1 cm a 21,3 cm! Hlavním problémem tedy bude hystereze gumičky.

Guma je polymer (přírodní kaučuk) a v klidovém stavu je tvořena navzájem smotanými uhlovodíkovými řetězci, které se po natažení narovnají. Při opětovném uvolnění se ale nenaskládají zpátky přesně tak, jak byly, a pokud proces stále opakujeme, na stejné prodloužení potřebujeme stále méně práce.

Závěr

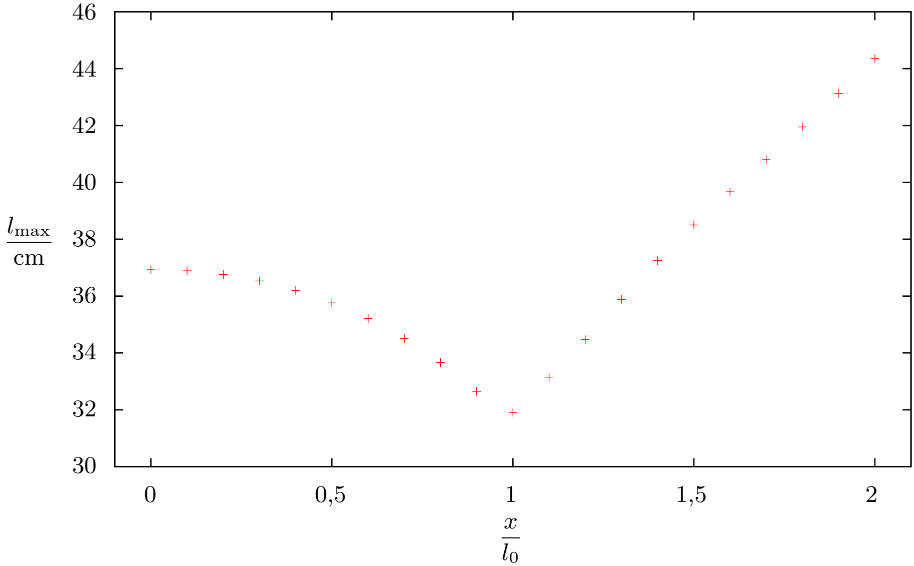
Numerický model ukazuje, že prodloužení gumičky směrem od polohy $(0,0)$ nejprve klesá, v poloze $(l_0,0)$ je nejmenší a pak dál roste.

Délka gumičky ve spodní úvrati z polohy $(0,0)$ bude 36,93 cm. Z analytického řešení máme pro srovnání $\Delta l = (36{,}9 \pm 0{,}4)$ cm. Do tohoto intervalu se numerický model krásně trefil.

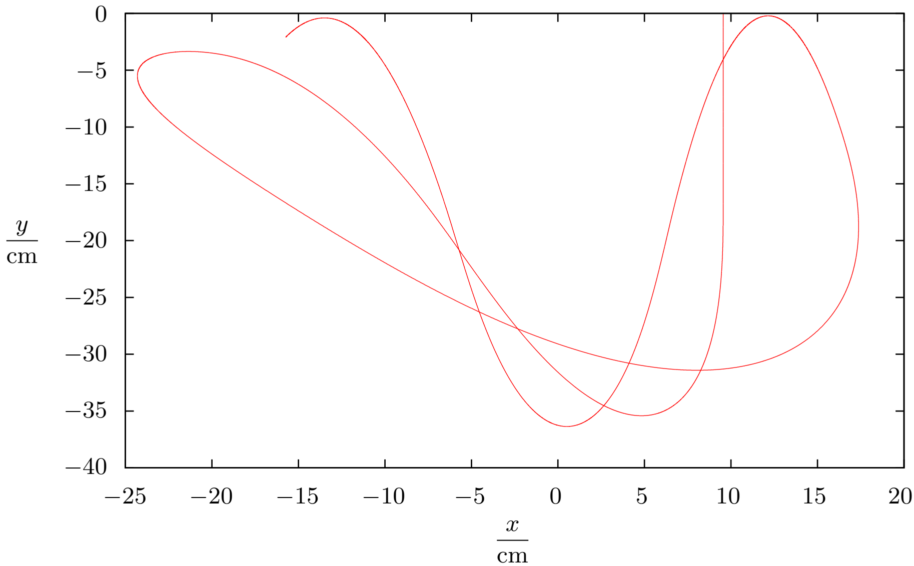
Experimentálně se nám tento výsledek bohužel nepodařilo potvrdit. Kvůli velké hysterezi gumičky jsou chybové úsečky v grafu závislosti prodloužení na poloze tak velké, že z něj nelze závislost s jistotou určit.

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`

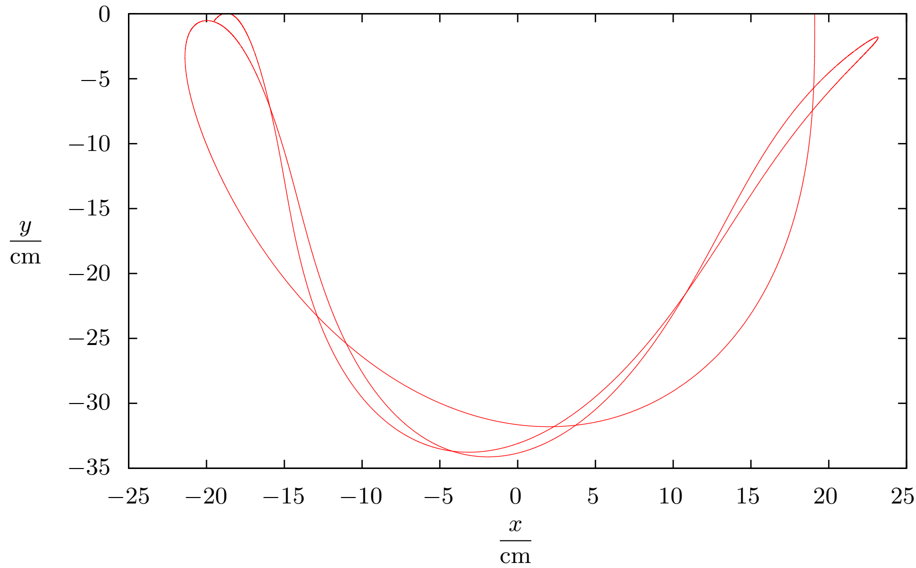
Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.



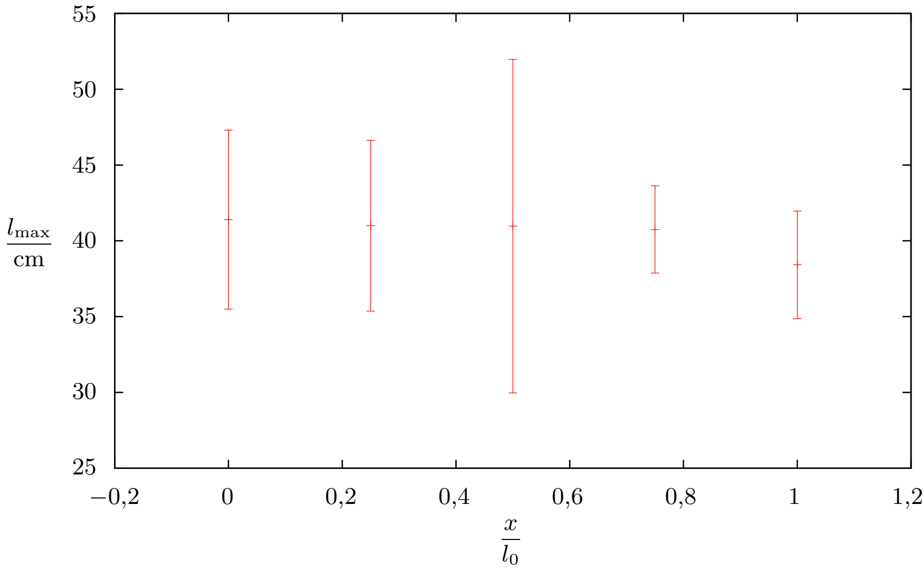
Obr. 2: Závislost prodloužení gumičky na počáteční poloze – z numerického modelu.



Obr. 3: Pohyb závaží pro počáteční polohu $(l_0/2, 0)$.



Obr. 4: Pohyb závaží pro počáteční polohu $(l_0, 0)$.



Obr. 5: Naměřená závislost prodloužení gumičky na x-ové poloze, z které závaží pouštíme.