Úloha VI.5 ... toaleťák

4 body; průměr 2,91; řešilo 35 studentů

Roli s papírem uchytíme do ložiska (bez tření) a necháme odmotávat konec papíru (zanedbáme lepení vrstev na sebe, tření v ložisku a hmotnost ložiska). Jakou úhlovou rychlostí se bude otáčet rulička potom, co se odmotá všechen papír? Známe poloměr a hmotnost ruličky, délkovou hustotu papíru, jeho celkovou hmotnost a délku. Uvažujte, že se papír bude odmotávat do nekonečné hloubky.

Bonus *Uvažujte, že papír dopadne na zem dříve, než se celý odmotá.*

Napadla Lukáše při čtení Michalovy záchodové úlohy.

Kdybychom se do řešení chtěli pouštět standardním postupem a počítat pohybovou rovnici odmotávajícího se pruhu papíru a rotujícího tlustého válce, sice bychom k výsledku došli, ale úloha by byla spíš cvičení na derivace a integrály. Podívejme se, jak úloha vypadá z energetického hlediska.

Pojmenujme si nejprve zadané veličiny. Nechť L je celková délka papíru, λ je jeho délková hustota (platí, že hmotnost celého papíru je $M = \lambda L$) a m je hmotnost ruličky. Prázdná rulička má poloměr R.

Potom, co se všechen papír odmotá, zůstane nám rotující dutý válec (rulička) a pruh papíru, který se v tuto chvíli dotýká válce už jen v jednom místě. Každá z těchto částí má určitou kinetickou energii, válec rotační (E_R), pruh papíru translační (E_T). Celková energie soustavy je

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{R} + E_\mathrm{T} = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \,. \tag{1}$$

V tomto vztahu vystupuje moment setrvačnosti ruličky ($J = mR^2$), úhlová rychlost ruličky ω a rychlost pruhu papíru v okamžiku odmotání v. Protože sledujeme právě tento stav, můžeme psát $v = R\omega$, protože rulička i konec papíru se v tuto chvíli musí točit stejně rychle, jelikož mezi nimi ještě existuje pevné spojení. Když víme, že $M = \lambda L$, můžeme energii role a papíru přepsat na

$$E_\mathrm{k} = \frac{\omega^2 R^2}{2}\left(m + \lambda L\right) \,. \tag{2}$$

Zamysleme se nyní nad tím, jakou hodnotu bychom napsali na druhou stranu energetické bilance. Odpověď je jasná – je to práce (označme ji W). Jediná síla, která v soustavě práci koná, je tíhová síla F, která urychluje padající pruh papíru. Protože je síla přímo úměrná délce papíru l ($F = \lambda lg$), nemůžeme ji napsat jednoduše jako součin její velikosti s délkou dráhy, po které působí, ale musíme si pomoci integrální berličkou, tj., že

$$W = \int F \,\mathrm{d}l \,.$$

Budeme uvažovat, že síla působí po dráze L (tj. celé délce papíru), takže předchozí vztah můžeme přepsat a vyřešit

$$W = \int_0^L \lambda lg \,\mathrm{d}l = \lambda g \left[\frac{l^2}{2}\right]_0^L = \frac{1}{2}\lambda g L^2 \,. \tag{3}$$

Energetická bilance nám říká, že součet kinetických energií (2) musí být roven vykonané práci (3), tedy

$$\frac{\omega^2 R^2}{2}\left(m + \lambda L\right) = \frac{1}{2}\lambda g L^2 \,.$$

Vyřešením této rovnice pro ω dostáváme vztah

$$\omega = \frac{L}{R}\sqrt{\frac{\lambda g}{m+\lambda L}}\,. \tag{4}$$

Zbývá jen vyřešit bonusovou část. Tam bohužel nelze použít energetický přístup, protože při dopadu na zem dochází k nepružným srážkám. Uvažujme, že jsou dokonale nepružné, tj. veškerá energie se pohltí při dopadu, a tudíž neexistuje síla, kterou by působila země přes papír na ruličku.

Zaměřme se nejdříve na okamžik, ve kterém se konec odmotávajícího se papíru právě dotkne země. Budou nás zajímat dvě veličiny, aktuální poloměr toaletního papíru $r_{\mathrm{p}0}$ a aktuální úhlová rychlost ruličky s papírem $\omega_{\mathrm{r}0}$. Dosud jsme se nemuseli zabývat tím, že papír má nějakou tloušťku – v našich úvahách ji bude reprezentovat počáteční poloměr papíru na roli r_0. Také se bude hodit označit si hloubku role d a objemovou hustotu papíru ϱ. Pomocí počáteční hmotnosti papíru m_0 ji budeme moci svázat s dříve definovanou hustotou λ a délkou L. Z geometrie situace víme, že

$$\begin{aligned} m_0 &= \lambda L\\ m_0 &= \pi d\varrho\left(r_0^2 - R^2\right)\,, \end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že $\pi d\varrho = \lambda L/(r_0^2 - R^2) = A$. Tuto substituci budeme moci využít, když budeme určovat $r_{\mathrm{p}0}$ po odmotání papíru délky h.

$$\lambda L - \lambda h = \pi d\varrho\left(r_{\mathrm{p}0}^2 - R^2\right)\,,$$

což po úpravách dá

$$r_{\mathrm{p}0} = \sqrt{R^2 + \frac{\lambda(L-h)}{A}}\,. \tag{5}$$

Úhlovou rychlost $\omega_{\mathrm{r}0}$ určíme podobně jako v hlavní části úlohy, z energetické bilance. Na levé straně bude opět stát součet kinetických energií (rotační a translační)

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{rot}} + E_{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2}\left(J_{\mathrm{r}} + J_{\mathrm{p}}\right)\omega_{\mathrm{r}0}^2 + \frac{1}{2}\lambda h v^2\,.$$

Stejně jako dříve víme, že $v = \omega r$, v tomto případě $v = \omega_{\mathrm{r}0} r_{\mathrm{p}0}$. Na pravou stranu rovnice dosadíme opět vykonanou práci podle vztahu (3), tentokrát ale jen po dráze rovné h, takže vyřešíme rovnici

$$\frac{1}{2}\left(J_{\mathrm{r}} + J_{\mathrm{p}}\right)\omega_{\mathrm{r}0}^2 + \frac{1}{2}\lambda h\omega_{\mathrm{r}0}^2 r_{\mathrm{p}0}^2 = \frac{1}{2}\lambda g h^2\,.$$

Pokud dosadíme za moment setrvačnosti ruličky, resp. papíru $J_{\mathrm{r}} = mR^2/2$, resp.

$$J_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\lambda\left(L-h\right)\left(r_{\mathrm{p}0}^2 - R^2\right)\,,$$

dostaneme výsledek

$$\omega_{\mathrm{r}0} = \sqrt{\frac{2\lambda g h^2}{mR^2 + \lambda\left(L-h\right)\left(r_{\mathrm{p}0}^2 - R^2\right) + 2\lambda h r_{\mathrm{p}0}^2}}\,. \tag{6}$$

Nyní se podívejme na situaci z hlediska druhé impulsové věty ($J\varepsilon = M_F$), ze které bychom mohli určit, jak se bude soustava chovat dál. Rozeberme si jednotlivé členy. Začněme momentem setrvačnosti J. Veličiny závislé na čase označme např. jako $b(t)$.

$$J = J_\mathrm{r} + J_\mathrm{p} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}A\left(r_\mathrm{p}(t)^2 - R^2\right)^2 . \tag{7}$$

Zde jsme využili geometrie ruličky a vztahu pro moment setrvačnosti dutého válce. Dalším jednoduchým členem je moment síly M_F. Síla, která ruličku roztáčí, je totiž konstantní a rovna tíze papíru o délce h. Působiště síly se ovšem přibližuje ose otáčení, je vždy ve vzdálenosti $r_\mathrm{p}(t)$ od ní.

$$M_F = \lambda h g r_\mathrm{p}(t) . \tag{8}$$

Zbývá už jen vyjádřit úhlové zrychlení ε. Zde si pomůžeme menším derivačním trikem trikem. Platí, že

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r_\mathrm{p}}\frac{\mathrm{d}r_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} .$$

První část ($\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}r_\mathrm{p}$) využijeme později, zbývá zjistit, jak přepsat druhou ($\mathrm{d}r_\mathrm{p}/\mathrm{d}t$). Víme, že z papíru každou chvíli ubude hmotnost $\mathrm{d}m_\mathrm{p} = \lambda v \mathrm{d}t$, tudíž, pokud opět využijeme toho, že $v = \omega r_\mathrm{p}$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}m_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = \lambda\omega r_\mathrm{p} .$$

Změna hmotnosti jde ovšem vyjádřit i jinak – přes geometrii. Hmotnost papíru je totiž $m_\mathrm{p} = A\left(r_\mathrm{p}(t)^2 - R^2\right)$, což po zderivování dá

$$\frac{\mathrm{d}m_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = 2A\ r_\mathrm{p}(t)\frac{\mathrm{d}r_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} .$$

Pokud porovnáme oba způsoby zápisu $\mathrm{d}m_\mathrm{p}/\mathrm{d}t$, najdeme vztah pro $\mathrm{d}r_\mathrm{p}/\mathrm{d}t$.

$$\frac{\mathrm{d}r_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega\lambda}{A} . \tag{9}$$

Spojíme-li tedy členy (7), (8) a (9) zpět do impulsové věty, dostaneme

$$\frac{1}{2}\left[mR^2 + A\left(r_\mathrm{p}(t)^2 - R^2\right)^2\right]\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r_\mathrm{p}}\frac{\omega\lambda}{A} = \lambda h g r_\mathrm{p}(t) ,$$

což je jednoduchá diferenciální rovnice, kterou lze vyřešit separací proměnných. V separovaném tvaru bude vypadat následovně:

$$\omega\mathrm{d}\omega = \frac{2Ahgr_\mathrm{p}}{mR^2 + A\left(r_\mathrm{p}^2 - R^2\right)^2}\mathrm{d}r_\mathrm{p} .$$

Pokud zintegrujeme obě strany, dostaneme

$$\left[\frac{\omega^2}{2}\right]_{\omega_{\mathrm{r}0}}^{\omega_r} = \left[\frac{gh}{R}\sqrt{\frac{A}{m}}\operatorname{arctg}\left(\frac{r_\mathrm{p}^2 - R^2}{R}\sqrt{\frac{A}{m}}\right)\right]_{r_{\mathrm{p}0}}^{R} ,$$

přičemž indexy u hranatých závorek vyjadřují tzv. meze integrace. Ty jsme určili z již dříve známých počátečních podmínek (dolní meze), resp. jsou zřejmé – ω_r je hledaná úhlová rychlost a R je poloměr ruličky bez papíru. Odečteme-li meze a všimneme si, že pro $r_\mathrm{p} = R$ se odpovídající člen vynuluje kvůli funkci arctg, dostaneme

$$\omega_\mathrm{r} = \sqrt{\omega_{\mathrm{r}0}^2 - \frac{2gh}{R}\sqrt{\frac{A}{m}}\operatorname{arctg}\left(\frac{r_{\mathrm{p}0}^2 - R^2}{R}\sqrt{\frac{A}{m}}\right)}\,.$$

Do tohoto výsledku, který představuje úhlovou rychlost ruličky po odmotání všeho papíru do hloubky $h < L$, zbývá již jen dosadit z (5), (6) a desubstituovat A, nicméně to si již laskavý čtenář udělá za cvičení sám.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz