

Úvodem

Milé řešitelky a milí řešitelé!

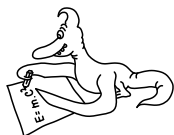
Toto je poslední číslo XXVIII. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře, a tak v této brožurce najdete aktuální výsledkovou listinou. Gratulujeme všem, kteří FYKOS řeší, a zvláště pak těm, kteří byli se svými myšlenkami tak úspěšní, že se umístili na předních pozicích.

Vážíme si práce každého řešitele, neboť svým úsilím dokazuje, že má zájem o přírodní vědy.

Rádi bychom také pozvali čtvrtáky, kteří jdou studovat na vysokou školu (a nemusí to být nutně MFF UK) do organizátorských řad. Přivítáme vaši spolupráci, pokud máte zájem pomáhat při organizaci FYKOSu.

Mladší srdečně zveme do dalšího ročníku, zadání jeho první série naleznete v přiloženém letáčku. Také bychom vás všechny chtěli poprosit, abyste informaci o tom, že existuje tak skvělá věc jako FYKOS, šířili dál svým spolužákům, kamarádům a dalším středoškolákům (případně základoškolákům), které by něco takového mohlo zajímat.

Organizátoři



Řešení VI. série

Úloha VI.1au

2 body; průměr 1,65; řešilo 52 studentů

Želva A'Tuin, na jejímž krunýři stojí čtyři sloni nesoucí na svých hřbetech Zeměplochu, není žádný drobeček. Předpokládejme, že bychom byli znudění kulatostí naší Země a chtěli ji vyměnit za kruhovou placku se stejnou hmotností a hustotou a s tloušťkou $h = 1$ km nesenou vlastní želvo-slóní partou. V případě, že by naše želva cestou vesmírem vrazila špičkou ocasu do planety, za jak dlouho by si uvědomila bolestivý podnět, jestliže její ocas s centrální nervovou soustavou spojuje jediný dlouhý neuron a délka tohoto neuronu je přibližně stejná jako průměr naší placky? O kolik dříve/později by si bolest ve stejném případě uvědomila A'Tuin (délku neuronu považujte za ekvivalentní její délce, která činí 18 000 km)? Pro číselný odhad předpokládejme, že rychlost šíření vzruchu v nervové soustavě poněkud nadměrných tvorů je stejná jako u pozemských živočichů, u nichž činí $v \doteq 120 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

A víte snad o lepším vymyšleném světě, než je Zeměplocha? Kiki ne!

Pokud by plochá Země měla stejnou hustotu i hmotnost jako ta kulatá, pak by musela mít i stejný objem. Máme tedy válecek a kouli stejných objemů, takže poloměr válce r můžeme vyjádřit jako

$$r = \sqrt{\frac{4R^3}{3h}},$$

kde $R \doteq 6400$ km je poloměr kulaté Země a $h = 1$ km je výška válce.

Délka neuronu je ekvivalentní dvěma poloměrům takového válce a rychlost vedení v známe ze zadání. Doba vedení vzruchu od ocasu do centrální nervové soustavy u želvy nesoucí takovouto placku by tedy byla

$$t = \frac{2r}{v} = \frac{4R}{v} \sqrt{\frac{R}{3h}} \doteq 114 \text{ dní}.$$

U A'Tuin by tato doba byla $t' = s/v$, kde s je její délka, respektive délka neuronu, číselně bychom tedy dostali $t \doteq 1,74$ dne. A'Tuin by si tedy důsledky nárazu planety uvědomila o více než 112 dní dříve, než by tomu bylo u druhé želvy!¹

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha VI.2 ... dýchej zhluboka

2 body; průměr 1,48; řešilo 44 studentů

Mág Šedomil oslavil sté narozeniny již před drahnou dobou a začíná se pomalu obávat, že ho Smrt' počítá svou dlouho odkládanou návštěvou. Rozhodne se proto, že se nechá zatlouct do kouzelné truhly, kam se k němu Smrt' nedostane. Bohužel zapomněl řemeslníkům říci, aby přidali dýchací otvory. Vzduch v truhle zaujímá objem $V_0 = 4001$, objemový zlomek kyslíku je $\varphi_0 = 0,21$. Při každém nádechu a výdechu se zužitkuje pouze $k = 20\%$ objemových kyslíku v dechovém objemu $V_d = 0,51$. Dechová frekvence mága po uzavření truhly postupně roste podle vztahu $f(t) = f_0\varphi_0/\varphi(t)$, kde $f_0 = 15$ dech \cdot min $^{-1}$ je počáteční dechová frekvence a $\varphi(t)$ objemový zlomek kyslíku v čase t . Určete, za jak dlouho si pro Šedomila přijde Smrt', jestliže minimální obsah kyslíku ve vzduchu potřebný pro přežití je $\varphi_s = 0,06$.

DARK IN HERE, ISN'T IT? (Aneb Mirek a jeho kamarád Smrt').

Najprv si rozmyslíme, že pri dýchání sa typicky vymieňa jedna molekula vzdušného O_2 za jednu molekulu CO_2 (vodnú paru zanedbáme) a všetko prebieha pri konštantnej teplote. Podľa stavovej rovnice ideálneho plynu sa vtedy nemení tlak a látkové množstvo plynu bude vždy priamo úmerné jeho objemu, stačí nám teda počítat s objemami namiesto látkových množstiev.

Pri jednom nádychu sa do mágových pľúc dostane kyslík s objemom $V_{k,d} = \varphi V_d$; objem spotrebovaného kyslíku pri jednom nádychu a výdychu je $kV_{k,d}$.

Zoberme si teraz časový interval $[t, t + \Delta t]$ – čas Δt by mal byť dostatočne krátky na to, aby sa počas neho príliš nemenil objemový zlomek kyslíka. Za ten čas sa mág nadýchne $f(t)\Delta t$ -krát a pri tom spotrebuje kyslík o objeme

$$\Delta V_k = f(t)\Delta t k V_{k,d} = f_0 \frac{\varphi_0}{\varphi(t)} \Delta t k \varphi(t) V_d = (f_0 \varphi_0 k V_d) \Delta t.$$

Všimnime si, že aj keď sa frekvencia dýchania s časom mení (alebo skôr vďaka tomu ako sa mení), ΔV_k je priamo úmerné Δt , objem kyslíka v truhle teda klesá lineárne s časom:

$$V_k = V_{k,0} - f_0 \varphi_0 k V_d t = \varphi_0 V_0 - f_0 \varphi_0 k V_d t,$$

kde sme vyjadrili objem kyslíku na začiatku $V_{k,0}$ pomocou objemového zlomku ako $V_{k,0} = \varphi_0 V_0$.

Hľadáme čas t_s , kedy V_k klesne na hodnotu $\varphi_s V_0$. Ten už vyjadríme ľahko:

$$t_s = \frac{V_0(\varphi_0 - \varphi_s)}{V_d \varphi_0 f_0 k} \doteq 190 \text{ min}.$$

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

¹Tahání za ocas by však bylo možné provádět zcela beztržně u obou želv, neboť doba, za kterou by reagovala a odpinkla vás jím daleko do vesmíru, by byla ještě jednou taková.

Úloha VI.3 ... pracovní pohovor

4 body; průměr 2,39; řešilo 36 studentů

Jedna z pracoven lorda Vetinariho má kruhový púdorys o poloměru R a je umístěna na ložiscích, díky nimž se může otáčet kolem své osy. Pro zajištění otáčení se používá motor, který může působit libovolným momentem síly. Při otáčení působí na podlahu místnosti třecí moment M_0 , nezávislý na rychlosti, který je shodný se statickým třecím momentem. Židle pro návštěvy je umístěna tak, že člověk na ní sedící pocítí účinky rotace pouze tehdy, přesáhne-li úhlové zrychlení hodnotu ε_0 . Určete, za jakou nejkratší dobu se může místnost otočit o 180° , aby návštěva nic nepoznala, a jaká práce je k tomuto otočení potřeba. Celková hmotnost místnosti, kterou můžete považovat za homogenní disk, je m .

Bonus Předpokládejte, že návštěvník pocítí vliv rotace tehdy, přesáhne-li úhlový ryv (změna zrychlení) hodnotu j_0 . *Mirek si už zase spletl dveře od pokoje.*

Úloha má poněkud delší zadání, rozebereme si proto nejprve jednotlivé části a rozmyslíme si, co se po nás chce a jak budeme postupovat. Důležité je uvědomit si, že motor je schopen nastavit libovolný moment síly, s nímž se místnost bude otáčet. Pro hledání nejmenšího času tedy nemusíme uvažovat vůbec třecí moment M_0 , ten sehraje roli až při výpočtu práce. Naše úloha tedy vypadá následovně: máme integrál

$$\varphi_{\text{ot}} = \int_0^T \omega(t) dt, \quad \frac{d\omega}{dt} < \varepsilon_0 \quad \forall t \in [0, T],$$

kde $\varphi_{\text{ot}} = \pi$ a ω je úhlová rychlost, a naším úkolem je minimalizovat celkový čas T , za který se místnost otočí. Zadání by šlo přeformulovat jako variační úlohu na hledání minima s danými podmínkami. My si však vystačíme s elementárními úvahami, přičemž si pomůžeme náčrtky rychlostních diagramů.

Ještě si uvědomme jednu podstatnou věc – ačkoli to zadání explicitně nezmiňuje, je přirozené předpokládat, že po otočce o $\varphi_{\text{ot}} = \pi$ místnost nerotuje. Kdyby tomu tak nebylo, Vetinariho host by po vyměřeném čase T vstal a nejpozději při otevření dveří by si rotace všiml (pravděpodobně by se před ním otáčela nějaká část vnější stěny).

Nyní budeme předpokládat, že řešení má jednoduchý tvar, kdy první polovinu času zrychlujeme s konstantním zrychlením ε_0 a druhou polovinu času se stejných zrychlením zpomalujeme, a ukážeme, že tak skutečně dosáhneme minimálního času. Podívejme se na obrázek 1. Víme, že zrychlení je definováno jako první časová derivace rychlosti a že si tuto derivaci můžeme v grafu znázornit jako tečnu, jež udává sklon křivky $\omega(t)$ v daném bodě. Obsah plochy pod grafem je rovný úhlu, o který se místnost otočí. Zrychlení je konstantní ε_0 , resp. $-\varepsilon_0$, graf se proto skládá ze dvou úseček, které spolu s časovou osou vytvářejí rovnoramenný trojúhelník. Výšku tohoto trojúhelníku, tj. maximální rychlost, můžeme snadno spočítat. Pro rovnoměrně zrychlený pohyb máme

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{\text{ot}}}{2} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{T}{2} \right)^2, \\ \omega_{\text{max}} &= \varepsilon_0 \frac{T}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

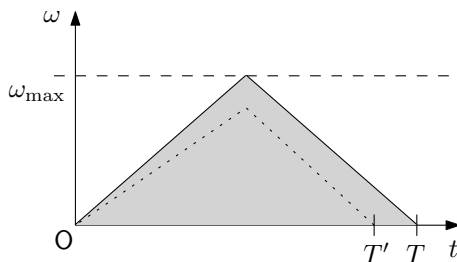
z čehož snadno vyjádříme

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{\varepsilon_0 \varphi_{\text{ot}}}.$$

Nyní si představme, že základnu trojúhelníku zmenšíme, tj. zkrátíme čas T na $T' < T$. Pak zřejmě klesne obsah plochy pod grafem (polovina základny krát výška), nedojde tedy k otočení

o celé φ_{ot} . Co kdyby plocha neměla tvar trojúhelníku, tj. zrychlení by nebylo po částech konstantní? Obsah by se poté také nutně zmenšil, argument² je snadný: pokud by křivka $v(t)$ protla pravou odvěsnu trojúhelníku, již bychom se nestihli vrátit zpět v čase T , protože sklon křivky nemůže být větší než sklon odvěsny. Podobně, kdybychom se na začátku někdy pohybovali se zrychlením menším než ε_0 , nestihli bychom v čase $T/2$ dosáhnout maximální rychlosti a pak jsme již omezeni pravou odvěsnou. V žádném menším čase tedy nedokážeme místnost otočit o φ_{ot} . Hledaný minimální čas je tedy podle rovnice (1)

$$T = 2\sqrt{\frac{\varphi_{ot}}{\varepsilon_0}}.$$



Obr. 1: Náčrtek závislosti úhlové rychlosti rotace místnosti na čase. Čárkovaná čára ilustruje, proč nelze dosáhnout kratšího času T potřebného k otočce o π .

Když už nyní máme jasno v tom, jak bude vypadat pohyb místnosti, můžeme spočítat práci motoru, kterou musí na jednu otočku o φ_{ot} vykonat. Analogicky k translačnímu pohybu je práce při rotaci definována jako integrál

$$W = \int_0^\pi M_{motor} d\varphi.$$

kde M_{motor} je moment síly, kterým působí motor. Při roztáčení je na místnost potřeba působit momentem

$$M = I\varepsilon_0 + M_0,$$

jelikož kromě roztáčení disku ještě působíme proti brzdnému třecímu momentu. Platí

$$I = \frac{1}{2}mR^2,$$

kde m , R jsou hmotnost a poloměr místnosti ze zadání. Při zpomalování disku máme

$$M = I\varepsilon_0 - M_0,$$

jelikož zde tření napomáhá zpomalování. Celková práce je potom

$$W = W_1 + W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}mR^2\varepsilon_0 + M_0 \right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left| \frac{1}{2}mR^2\varepsilon_0 - M_0 \right| d\varphi.$$

²Kdybychom chtěli být exaktnější, mohli bychom zde zúžitkovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě diferenciálního počtu, ale již jsme si slíbili, že se budeme pohybovat na elementární úrovni.

Absolutní hodnota zde vyjadřuje skutečnost, že práci motoru považujeme vždy za kladnou – může totiž dojít k situaci, kdy $M_0 > mR^2\varepsilon_0/2$, místnost by tedy samovolně zpomalovala příliš prudce a je proto potřeba její rotaci i během brzdění urychlovat. Po výpočtu³ dostaneme

$$W = \frac{1}{2}\pi mR^2\varepsilon_0$$

pro $M_0 \leq mR^2\varepsilon_0/2$ a

$$W = \pi M_0$$

pro $M_0 \geq mR^2\varepsilon_0/2$.

Jistě jste si všimli, že naše řešení má ve funkci $\varepsilon(t)$ nespojitost $2\varepsilon_0$ v bodě $T/2$. Tuto prudkou změnu zrychlení by návštěvník sedící na židli dozajista pocítil. Proto v bonusové části požadujeme, aby úhlový ryv, tj. časová derivace úhlového zrychlení, nepřesáhl hodnotu j_0 . Závislost $v(t)$ bude nyní reprezentována hladkou funkcí. Při konstrukci grafu $\varepsilon(t)$ budeme postupovat podobně jako v první části při konstrukci grafu $\omega(t)$ (předpokládáme nulové zrychlení na konci pohybu); zde však budeme navíc požadovat rovnost plochy pod a nad časovou osou, čímž docílíme taky nulové rychlosti na konci pohybu. Ryv a zrychlení budou vypadat následovně:

$$j(t) = \begin{cases} j_0 & \text{pro } t \in [0, T/4] \cup [3T/4, T], \\ -j_0 & \text{pro } t \in (T/4, 3T/4) \end{cases}$$

a

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} j_0 t & \text{pro } t \in [0, T/4], \\ j_0 T/2 - j_0 t & \text{pro } t \in (T/4, 3T/4), \\ -j_0 T + j_0 t & \text{pro } t \in [3T/4, T]. \end{cases}$$

Graf $\omega(t)$ je načrtnut na obrázku 2. V obrázku je sugestivně zaznačeno, jak budeme postupovat při výpočtu integrálu pro celkový úhel φ_{ot} . Jedná se o obsah obdélníku

$$\varphi_{ot} = \omega_{\max} \frac{T}{2}, \quad (2)$$

kde

$$\frac{\omega_{\max}}{2} = \frac{1}{2}j_0 \left(\frac{T}{4}\right)^2. \quad (3)$$

Z rovnic (2) a (3) pak snadno vyjádříme

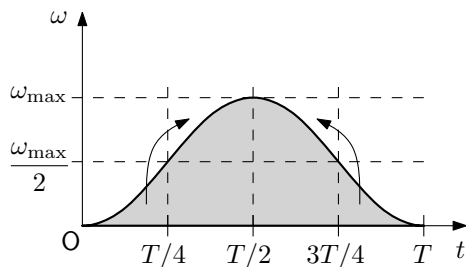
$$T = 4 \sqrt[3]{\frac{\varphi_{ot}}{2j_0}}. \quad (4)$$

Práci budeme psát nyní jako integrál ve tvaru

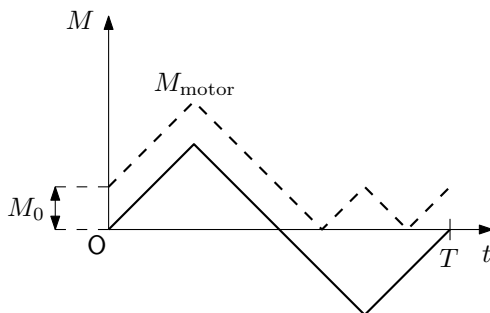
$$W = \int |I\varepsilon(t) + M_0| d\varphi = \int |I\varepsilon(t) + M_0| \omega dt. \quad (5)$$

přičemž stále $I = mR^2/2$. Integrovat budeme tři úseky o délce $T/4$, $T/2$ a $T/4$. Časový vývoj momentu M_{motor} je pro názornost uveden na obrázku 3.

³Pokud ještě neumíte dobře integrovat, uvědomte si, že vlastně počítáme plochu pod grafem funkce $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ násobenou momentem setrvačnosti, přičemž jedna strana obdélníku je zvětšena/zmenšena o M_0 .



Obr. 2: Náčrtek závislosti úhlové rychlosti na čase pro podmínku $|j| < j_0$. V obrázku je vyznačeno, jak získat obsah plochy pod grafem bez integrace.



Obr. 3: Náčrtek závislosti momentu síly na čase. Plná čára značí výsledný moment působící na místnost, přerušovaná čára představuje absolutní hodnotu momentu síly motoru.

Nyní je potřeba vyjádřit rychlosti a zrychlení v jednotlivých úsecích v závislosti na čase. U zrychlení jsme to již provedli, pro rychlosti dostaneme integrací zrychlení

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}j_0t^2 & \text{pro } t \in [0, T/4], \\ -\frac{1}{16}j_0T^2 + \frac{1}{2}j_0tT - \frac{1}{2}j_0t^2 & \text{pro } t \in (T/4, 3T/4), \\ \frac{1}{2}j_0T^2 - j_0tT + \frac{1}{2}j_0t^2 & \text{pro } t \in [3T/4, T]. \end{cases}$$

Jak se bude chovat absolutní hodnota v integrálu? Pro druhý úsek bude motor působit nulovým momentem síly v čase

$$t_1 = T/2 + \frac{2M_0}{j_0mR^2}$$

a v třetím úseku ze symetrie podle obrázku 3 v čase

$$t_2 = T - \frac{2M_0}{j_0mR^2}.$$

Pokud třetí moment M přesáhne hodnotu

$$M_{\text{mez}} = \frac{1}{8}j_0mR^2T,$$

bude motor působit vždy momentem síly pouze ve směru úhlové rychlosti. Ted už nezbývá než provést integraci. Celkem integrujeme pro případ $M_0 \leq M_{\text{mez}}$ přes pět úseků (druhý a třetí se rozštěpily na dva přes absolutní hodnotu). Vzhledem k počtu členů v jednotlivých integrandech a tvaru mezí se jedná o velmi pracný výpočet, uvedeme zde proto pouze výsledek pro $M_0 \geq M_{\text{mez}}$, který po dosazení z (4) vypadá následovně:

$$W = \frac{1}{32} j_0 T^3 M_0 = \pi M_0.$$

Tento výsledek by nás neměl překvapovat, stejně bude vypadat při jakémkoli pohybu z klidu do zastavení, kdy po celou dobu pohybu nepřekročí příslušný mezní moment zadaný brzdný třecí moment M_0 .

Ještě poznámka na závěr: pokud bychom i v bonusu uvažovali omezení na ε_0 (což bychom měli), museli bychom řešit situaci, kdy $j_0 T/4 > \varepsilon_0$. Potom by v grafu $\varepsilon(t)$ došlo k „urážnutí špiček“ a v grafu $v(t)$ by přibýly lineární úseky. Celkový čas T by se zřejmě prodloužil. Podrobný přepočítání práce motoru je jenom další úmorné cvičení na integraci polynomů a nic nového do úlohy nepřináší, proto ho zde neuvádíme.

Komentáře k došlým řešením

Jak je ze zadání zřejmé, lord Vetinari chce, aby návštěva po otočení nic netuše vstala a vyšla ven z místnosti špatnými dveřmi. Je proto nutné, aby po otočení místnost již nerotovala. Jelikož to však nebylo v zadání přímo zmíněno, naprostá většina z vás tuto podmínku neuvažovala a řešila tak jinou, jednodušší úlohu. Za vyřešení základní části za zjednodušených předpokladů byly uděleny dva body, za bonus byl další bod navíc, celkem tedy tři body. Obvykle jste se zjednodušenou verzí neměli problémy, nejčastěji docházelo k chybě při výpočtu dráhy za konstantního ryvu, kdy jste u kubického členu chybně uváděli koeficient $1/4$ namísto $1/6$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha VI.4 ... těžkotonážní deska na želvě 5 bodů; průměr 3,27; řešilo 37 studentů

Předtím, než byl dosažen a překročen okraj Zeměplochy a začaly být podnikány vědecké výpravy za potvrzení existence čtyř slonů, želvy a určení jejího pohlaví, si některé primitivní kmeny myslely, že síla, která je drží na Zeměploše, je dána superhustou deskou z koncentrovaného bylonebylia. Byla to opravdu velice primitivní představa, protože jak dnes již víme, například výprava, která potvrdila existenci želvy, neslavně dopadla tak, že se jejich člun utřhl a upadl. Tedy vlastně nedopadl...

Nicméně by nás zajímalo – jakou plošnou hustotu σ by bývala byla musela taková deska mít, aby na povrchu Zeměplochy blízko jejímu středu byl obyčejný předmět, při zanedbání magie, přitahován stejnou silou, jakou je gravitační síla na povrchu Zeměplochy? Uvažujte, že superhustá deska je opravdu velice tenká, a jak tvrdí pověsti, je umístěna $H = 8^4 \text{ m} = 4096 \text{ m}$ pod povrchem Zeměplochy. Deska má být dle bájí homogenní a hmotnosti jiných těles zanedbatelné.

Zanedbejte pohyby želvy a slonů. Za Zeměplochu si dosadte slovo Země, pokud jste nečetli dílo autora, pro kterého si přišel Smrt. Zeměplocha má pro účely této úlohy průměr přibližně přesně $d = 10\,000 \text{ km}$.

Karel má rád gravitační úlohy.

Naším úkolem je zjistit plošnou hustotu desky σ , která je zdrojem gravitačního pole, o které se budeme nyní zajímat. Dle zadání nás zajímá pouze síla gravitačního pole na ose desky, a to ve výšce H . Ve výpočtu budeme postupovat tak, že nejprve vyjádříme celkovou sílu, kterou působí deska na hmotný bod hmotnosti m v udaném místě pomocí σ , d a H , následně tuto sílu dáme do rovnosti se silou, jakou by působila Země na stejný předmět (hmotný bod). Celkovou sílu získáme zintegrováním příspěvků od infinitesimálních elementů desky.

V řešení zanedbáme všechny další vlivy, jako je hmota ostatní látky Zeměplochy, jejich slonů a želvy, rotaci Zeměplochy atd.

Element (a odteď myslíme jenom infinitesimálně malé elementy) síly, kterou působí element desky na náš hmotný bod, můžeme dle Newtonova gravitačního zákona psát jako

$$dF_G = G \frac{\sigma m}{R^2} dx dy,$$

kde G je gravitační konstanta, R je vzdálenost daného čtvercového elementu desky od pozorovatele stojícího ve středu Zeměplochy a x a y jsou kartézské souřadnice v rovině desky. Ovšem R je funkce x a y :

$$R = \sqrt{H^2 + x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad dF_G = G \frac{\sigma m}{H^2 + x^2 + y^2} dx dy,$$

Předtím, než si to pěkně zintegrujeme, si však můžeme uvědomit, že naše úloha má válcovou symetrii. Mohli bychom sice úlohu řešit v kartézských souřadnicích, ale převedením problému do válcových souřadnic si usnadníme hledání integračních mezí i integraci. Z kartézských souřadnic (x, y) v desce můžeme tedy přejít do polárních souřadnic (r, φ) a třetí souřadnice z zůstane kartézská. Vztah mezi souřadnicemi je $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Pro transformaci musíme určit její jakobián⁴ J . Zde je uveden výpočet

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Nyní již můžeme vyjádřit silový element pomocí cylindrických souřadnic

$$dF_G = G \frac{\sigma m}{H^2 + r^2} r dr d\varphi.$$

Není to ale přesně to, co bychom chtěli integrovat. Je nutné totiž ještě uvážit, že se uplatní pouze vertikální složka gravitační síly, protože horizontální složka se, díky válcové symetrii, vyruší. Pokud označíme α úhel, který svírá vektor elementu gravitační síly s osou z , pak můžeme psát

$$\cos \alpha = \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2}}.$$

Budeme integrovat pouze průmět elementu gravitační síly do osy z , pro který platí

$$dF = \cos \alpha dF_G = G \frac{\sigma m}{H^2 + r^2} \cos \alpha r dr d\varphi = G \frac{\sigma m H}{(H^2 + r^2)^{3/2}} r dr d\varphi.$$

⁴Více k jakobiánu naleznete například na http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant.

Zintegrujeme tedy celou desku.

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} G\sigma m \frac{H}{(H^2 + r^2)^{3/2}} r \, dr d\varphi = G\sigma m H \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{r}{(H^2 + r^2)^{3/2}} dr = \\
 &= G\sigma m H [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{-1}{\sqrt{H^2 + r^2}} \right]_{r=0}^{\frac{d}{2}} = 2\pi G\sigma m \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}} \right].
 \end{aligned}$$

Abychom zjistili hodnotu σ , dáme tuto sílu do rovnosti s $F = mg$, dostáváme

$$\begin{aligned}
 2\pi G\sigma m \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}} \right] &= mg \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{g}{2\pi G} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2} - 1} = \\
 &= \frac{g}{2\pi G} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}}},
 \end{aligned}$$

což vzhledem k $d \gg H$ můžeme aproximovat jako

$$\sigma \approx \frac{g}{2\pi G} \doteq 2,3 \cdot 10^{10} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}.$$

Plošná hustota desky tedy vychází $\sigma = 2,3 \cdot 10^{10} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$ při dosazení tíhového zrychlení na Zemi $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Řešení pomocí integrálu bylo v zásadě přesné. Na konci jsme sice použili aproximaci, ale ta byla při přesnosti na dvě platné cifry oprávněná. Stejně tak jsme použili hodnotu tíhového zrychlení, které je složeno z gravitační a odstředivé složky, přitom bychom měli korektně použít hodnotu gravitačního zrychlení, která se ovšem liší až na třetí platné cifře. Samozřejmě, že řešení není přesné, protože neuvažuje přitažlivé gravitační působení dalšího materiálu, želvy a slonů, takže náš odhad hustoty desky je vlastně horní odhad.

Alternativní řešení – Gaussův zákon

Vzhledem k tomu, že jsme blízko desky ($d \gg H$), tak bychom desku mohli považovat za nekonečnou rovinu a použít Gaussův zákon. Ten se obvykle zapisuje jako

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM,$$

kde Σ je uzavřená plocha, přes kterou se integruje, \mathbf{K} je intenzita gravitačního pole na povrchu plochy, $d\mathbf{S}$ element povrchu této plochy orientovaný ven a M je celková hmotnost uzavřená plochou. Za plochu si zvolíme povrch válce, jehož podstavy jsou rovnoběžné s deskou. Hmotnost uzavřená tímto válcem je $M = \sigma S$, kde S je obsah podstavy válce. Jelikož uvažujeme nekonečnou desku, bude vektor gravitační intenzity směřovat kolmo k desce. Potom můžeme uvažovat pouze tok podstavami válce, které mají dohromady obsah $2S$. Dostaneme

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = -K \cdot 2S = -4\pi G\sigma S \quad \Rightarrow \quad K = 2\pi\sigma G.$$

Znaménko mínus za prvním rovnítkem vzniklo ze skalárního součinu dvou antiparalelních vektorů, tj. normály podstavy a intenzity. Jelikož jsme neuvažovali tok pláštěm, má výsledné pole stejnou velikost nezávisle na vzdálenosti od desky, tj. na povrchu je stejné, jako všude jinde. Abychom určili σ , tak si vezmeme hodnotu gravitační intenzity na povrchu Země, která je g , a snadnou úpravou získáme

$$g = 2\pi\sigma G \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{g}{2\pi G}.$$

Obdrželi jsme tedy stejný výsledek, jako když jsme postupovali přesně a následně jsme provedli aproximaci. To jsme mohli očekávat, neboť aproximace $d \gg H$ aplikovaná při přímé integraci odpovídá předpokladu o nekonečných rozměrech desky (schválně zkuste integrovat podle r v mezích $[0, +\infty)$).

Komentáře k došlým řešením

Někteří si neuvědomili, že vzdálenost bodu, kde nás gravitační zrychlení zajímá od samotné desky není vzdáleností od většiny hmoty desky. Respektive je to velice špatný odhad nějaké střední vzdálenosti. Samozřejmě, pokud neumíte integrovat, můžete se pokusit udělat alespoň nějaký takový odhad střední vzdálenosti a do vztahů dosazovat právě střední vzdálenost. Tím, že tam zbrkle dosadíte vzdálenost H ukážete, že Newtonovu gravitačnímu zákonu příliš nerozumíte.

Alternativní řešení pro ty, co integrovat umí, ale neumí vícerozměrné integrály, je uvědomění si, že můžeme integrovat jednotlivá tenká mezikruží, jejichž obvod je $2\pi r$, tedy počítáme rovnou integrál

$$F = \int_0^{\frac{d}{2}} G\sigma m \frac{2\pi r}{(H^2 + r^2)^{3/2}} dr$$

a výsledek bude stejný jako v autorském řešení.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha VI.5 ... hospodská rvačka

5 bodů; průměr 2,08; řešilo 24 studentů

Při svém pobytu v Ankh-Morporku Dvoukvítek navštívil také hospodu. Nebyla by to dobrá hospoda, kdyby se tam nestrhla všeobecná rvačka, při které létají židle, flašky a další věci z jedné strany hospody na druhou. Dvoukvítek musí samozřejmě všechno pořádně zdokumentovat svým fotoaparátem. Teď zrovna fotí kuličku o poloměru R , která letí rychlostí v blízkou rychlosti světla c . I v takových hospodách platí teorie relativity, ze které vyplývá, že Dvoukvítek by ve své klidové soustavě změnil kontrakci kuličky ve směru pohybu o faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Jaký poloměr kuličky ve směru pohybu zaznamená na fotografii se zanedbatelně krátkou expozicí? Fotoaparát zaujímá vůči kuličce obecnou polohu.

Nejen Jakub M. ví, že vše je potřeba řádně zdokumentovat!

Nejprve popišme, co se všechno děje v našem problému. Jak bylo naznačeno v zadání, v případě relativisticky se pohybující kuličky se uplatňuje tzv. kontrakce délky (přesněji Lorentzova transformace). Kromě toho ale ještě musíme počítat s mechanismem záznamu obrazu. Fotoaparát dokáže zachytit v určitý moment fotony z různých směrů. Jenomže rychlost kuličky není zanedbatelná v porovnání s rychlostí světla, proto fotony, které dorazí do fotoaparátu ve stejný okamžik, obecně nejsou emitovány kuličkou v tutéž dobu.

Zaveďme souřadný systém spojený s kuličkou (t', x', y', z') a spojený s hospodou (t, x, y, z) . Necht' jsou systémy zavedeny tak, že kulička letí ve směru osy x v kladném smyslu a v každém čase se fotoaparát nachází v bodě $x = y = z = 0$. Přejchod mezi těmito systémy se realizuje (speciální Lorentzovou) transformací:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),\end{aligned}\tag{6}$$

kde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Nyní uvažujme imaginární fotoaparát, který je v klidu vůči kuličce a v čase $t' = 0$ prochází skutečným fotoaparátem. V tento okamžik klapne závěrka obou fotoaparátů. Uvědomme si, že v tento okamžik zaznamená virtuální fotoaparát na film ty stejné fotony, které zaznamená fotoaparát skutečný. Zrekonstruujeme tedy světočáry fotonů zachycených virtuálním fotoaparátem (což je snadné), přetransformujeme je do hospodské soustavy a zjistíme, co vlastně skutečný fotoaparát zaznamenal.

Protože máme k dispozici jen jeden fotoaparát, dokážeme zachytit pouze projekci objektů (směry polohových vektorů), proto nás bude zajímat jen obrys této projekce. Virtuální fotoaparát, pro který je kulička v klidu, bude přijímat fotony z oblasti kruhové projekce koule, významný pro nás bude jen kružnicový obrys. Pokusme se zachytit polohu těchto fotonů v závislosti na čase $\mathbf{r}'(t)$.

Řekněme, že se fotony pohybují rychlostí světla ve vakuu, čili mají světelnou světočáru a musí platit

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = c^2 t'^2.\tag{7}$$

Necht' $\hat{\mathbf{a}}'$ je jednotkový vektor ve směru osy symetrie (spojnice středu koule s fotoaparátem). Rovněž ale musí trajektorie fotonů svírat s osou symetrie povrchový půlúhel. (Trajektorie hraničních fotonů budou tvořit plášť kužele.⁵) Potom musí platit

$$\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}' = |\mathbf{r}'| \cos \alpha',$$

kde α' je poloviční vrcholový úhel. Z (7) můžeme tento výraz přepsat jako

$$\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}' = -ct' \cos \alpha',\tag{8}$$

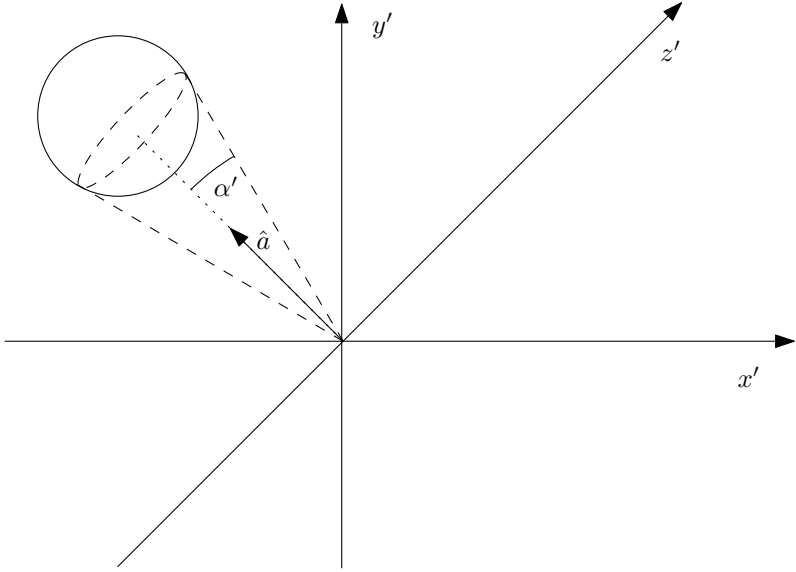
kde volíme záporné znaménko, protože v čase $t' = 0$ již musí být fotony v imaginárním fotoaparátu.

Nyní transformujeme rovnice (8) a (7) pomocí transformací (6) a získáme popis světočar fotonů, které v hospodské soustavě zachytil skutečný fotoaparát. Rovnice (7) se musí transformovat pouze odstraněním čárek, protože rychlost světla je ve všech systémech stejná.⁶ Rovnici (8) si přepíšeme do složkového tvaru

$$x' a'_x + y' a'_y + z' a'_z = -ct' \cos \alpha'$$

⁵Povšimněte si, že kužel je limitním případem komolého jehlanu.

⁶Kdo nevěří, ať dosadí. Nicméně vzhledem k tomu, že právě tato vlastnost je jedním z předpokladů, ze kterých se Lorentzova transformace odvozuje, je tento výpočet bezpředmětný.



Obr. 4: Pozorování koule imaginárním fotoaparátem.

a nyní již aplikujme transformace (6). Dostáváme

$$\gamma(x - vt)a'_x + ya'_y + za'_z = -c\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \cos \alpha',$$

což po úpravě dá vzniknout výrazu tvaru

$$\gamma\left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha'\right) x + ya'_y + za'_z = \gamma\left(va'_x - c \cos \alpha'\right) t$$

a nakonec ještě pronásobme kladným koeficientem k , jehož velikost určíme posléze

$$k\gamma\left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha'\right) x + ka'_y y + ka'_z z = k\gamma\left(\frac{v}{c}a'_x - \cos \alpha'\right) ct.$$

Zavedme polohový vektor \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \left(k\gamma\left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha'\right), ka'_y, ka'_z\right).$$

Zvolme k takové, aby platilo

$$|\mathbf{a}| = 1, \tag{9}$$

a odted značme $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}$. Z rovnice (9) vyplývá, že

$$k\gamma\left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha'\right) \leq 1.$$

Nyní je čas na matematické lemmátka: Necht platí

$$-1 \leq A(B - CD) \leq 1,$$

kde

$$\begin{aligned} A &> 0, \\ -1 &\leq B \leq 1, \\ 0 &\leq C \leq 1, \\ 0 &\leq D \leq 1. \end{aligned}$$

Potom platí

$$-1 \leq A(CB - D) \leq 1. \quad (10)$$

Důkaz: Přepišme první nerovnici na dvě nerovnice tvaru

$$CD - B \leq \frac{1}{A}, \quad (11)$$

$$B - CD \leq \frac{1}{A}, \quad (12)$$

přičemž mějme na paměti, že A je kladné. Rovněž si přepišme dokazovanou nerovnici na dvě

$$CB - D \leq \frac{1}{A}, \quad (13)$$

$$D - CB \leq \frac{1}{A}. \quad (14)$$

Uvědomme si, že nerovnice (11) a (12) jsou dolní odhady $1/A$, proto po dosazení za $1/A$ do (13) a (14) dokazujeme silnější tvrzení a je tedy toto dosazení korektní. Z (13) dostaneme

$$(C + 1)(B - D) \leq 0,$$

$$(C - 1)(B + D) \leq 0,$$

což vzhledem k oborům B, C, D vede na nerovnice

$$B \leq D,$$

$$B \geq -D,$$

což opět vzhledem k B, D pokrývá všechny možnosti.

Dosazení do nerovnice (14) dává stejné výsledky. Dosazení (11) do (14) dává stejný výsledek jako dosazení (12) do (13) a analogicky pro druhou dvojici dvojic nerovnic.

Podívejme se, že při dosazení $A = k\gamma$, $B = a'_x$, $C = v/c$, $D = \cos \alpha'$ a rovnice (10) vyhovují předpokladům lemmatu. Důsledek lemmatu nám zaručuje, že existuje takové α , že platí

$$\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{a}} = -ct \cos \alpha,$$

kde $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Transformované rovnice (7) a (8) tedy rovněž popisují trajektorie fotonů na povrchu kužele, tentokrát o vrcholovém půlúhlu α . Fotoaparát tedy zachytí projekci kuličky ve tvaru kruhu. Ale vzhledem k tomu, že v příčném směru vzhledem k rychlosti nedochází ke kontrakci, je pozorovaný poloměr ve směru pohybu také r .

Nutno ještě podotknouti, že toto vyjádření není úplně přesné. Vzhledem k tomu, že bodový pozorovatel nemá žádnou přímou možnost, jak určit vzdálenost předmětu, jedině, co dokážeme

říci, je: „Kulička má stejnou úhlovou plochu, kterou by měla kulička v klidu v předpokládané vzdálenosti kuličky“.

Toto ovšem není jediný poznatek, ke kterému jsme dospěli. Dalším důsledkem našich výsledků je tzv. Penroseova–Terrellova rotace. Vzhledem k nerovnosti $\hat{a}' \neq \hat{a}$ jsou vzájemné polohy kuličky v době emise fotonů vůči skutečnému a virtuálnímu fotoaparátu různé, nicméně body emise fotonů na kuličce jsou stejné. To znamená, že kuličku v poloze pozorované reálným fotoaparátem vidíme z té strany, ze které ji pozoruje imaginární fotoaparát (který ji pozoruje v jiné vzájemné poloze). Řečeno krátce, vidíme kuličku z jiné strany – pootočenou.

Lubomír Grund
grund@fykos.cz

Úloha VI.E ... alchymistická

8 bodů; průměr 5,81; řešilo 36 studentů

Na Zeměploše je regulérním povoláním alchymie. Proto jsme se rozhodli, že byste si to měli také zkusit. Představte si, že skládáte zkoušku, abyste mohli vstoupit do Cechu alchymistů.

Společně s brožurkou zadání série vám přišly tři zabalené vzorky kovů. Jedná se o tenké plátkové kovy – dávejte si pozor, abyste je neponičili a ideálně na ně přímo nesahejte. Vaším úkolem je zjistit, jaké (drahé?) kovy jsme vám zaslali. Kovy po vás nechceme zpátky – můžete tedy používat libovolné, i destruktivní postupy, ale uznáme pouze ty dostatečně vědecké. Vaším řešením tedy bude popis postupu a co nejpřesnější určení každého vzorku s tím, že je nutné, abyste uvedli u každého z nich jeho označení, které je na jeho přebalu. Nezapomínejte, že je cenné i určit, o které kovy se nejedná.

Poznámka Pokud by se někdo chtěl stát novým řešitelem a řešit tuto úlohu, nechtě co nejdříve napiše na email alchymie@fykos.cz s tím, že zásilku může očekávat zhruba za týden až 10 dnů.

Karel chtěl rozeslat nakoupené zlato, platínu a palladium.

Posílali jsme různé druhy vzorků, každý dostal nějaké tři ze seznamu hliník, měď, palladium, stříbro, platina, zlato a mosaz (slitina mědi a zinku). V následujícím budeme popisovat, jak jednotlivé vzorky reagovaly nebo nereagovaly na naše pokusy.

Žihání

Při žihání se látky zahřejí na vysokou teplotu. Tím u nich může dojít ke změně chemického složení (např. oxidaci), k odstranění nežádoucí příměsi, ke spálení apod. Taky jsou v plameni excitovány elektrony v atomech kovu, které při přechodech zpátky na nižší energetické hladiny vyzařují světlo charakteristických vlnových délek. Důsledkem je v některých případech změna barvy plamene. Používali jsme plamen z propan-butanového kempového vaříče, který může na vzduchu dosahovat teplot až zhruba 2000 °C⁷. Tabulka 1 uvádí pozorované reakce.

Výsledek dopadl podle očekávání – hliník a měď (i v mosazi) vypadaly tak, jak měly; zbytek, kromě roztavení, víceméně nereagoval. Pro zajímavost – hliník se používá v prskavkách, kdy během hoření mimo jiné vznikají oxid hlinitý a oxid železitý, které se starají o typický vzhled prskavky.

⁷http://www.engineeringtoolbox.com/flame-temperatures-gases-d_422.html

Tabulka 1: Žihání kovů – pozorované reakce.

kov	pozorováno
hliník	velmi jasný plamen
měď	zezelenání plamene
palladium	nevzplane
stříbro	roztavilo se
platina	nevzplane
zlato	roztavilo se
mosaz	občasné zezelenání plamene

Leptání

Další cestou, jak rozlišit kovy a slitiny, je studium jejich chování v kyselém a zásaditém prostředí. Kovy si nejdříve rozdělíme podle barev.

Jediný oranžový kov, co máme, je měď. Tu lze dál prokázat kápnutím zředěné kyseliny dusičné (v poměru 1 : 1), povrch by se měl zbarvit modře (jde o typickou barvu měďnatých iontů).

Další skupinou jsou žluté vzorky, to může být zlato nebo slitiny mědi, tedy mosaz (měď se zinkem) nebo bronz (měď s cínem). Vyzkoušíme reakci s HNO_3 . Zlato by s ní nemělo reagovat; dále ho můžeme dokázat nanesením pár kapek lučavky královské⁸ na povrch – zlato by se mělo rozpustit a roztok zbarvit žlutě. Pro rozlišení mosazi a bronzu je vhodné udělat test na zinek a cín. Pokud je přítomen zinek, po krátkém působení kapky koncentrované HCl a dvou kapek 10% roztoku sulfidu sodného by se mělo objevit bílé zbarvení ZnS . Pokud je přítomen cín, stejným postupem bychom měli dostat žlutohnědé zbarvení SnS .

Většina ostatních kovů je šedá. Rychle vyloučíme alkalické kovy a kovy alkalických zemin, které by buď nevydržely tak dlouho jen tak na vzduchu, nebo by reagovaly s vodou, nebo by byly alespoň jasně poznat v plameni. Také jsme vám neposílali žádné radioaktivní prvky. Při hrátkách s magnetem lze přijít na to, že vzorky jsou nemagnetické, a tedy vyloučit železo, nikl, chrom.

Neušlechtilé kovy by měly z vody vytěšňovat vodík – z našich vzorků by tedy hliník měl po ponoření do vody uvolňovat bublinky plynu, avšak pouze za zvýšené teploty a za předpokladu, že zvětšíme reakční povrch kovu (např. nadrcením). Za pokojové teploty nebude reakce probíhat, přičemž k nereaktivitě významně přispívá samovolná pasivace kovu na vzduchu, tj. pokrytí vrstvičkou oxidu hlinitého. Můžeme vyzkoušet, zda neušlechtilé kovy reagují s různými kyselinami nebo zásadami, podle výsledků si vytipovat, o jakou látku by se mohlo jednat, a následně si svůj tip ověřit.

NaOH většinu ušlechtilých kovů nerozpouští. Z našich kovů je jediný neušlechtilý hliník, který se jako jediný v NaOH rozpustí. Máme-li hliník v roztoku, lze jej dokázat takto: přidáme 1% roztok alizarinu⁹ a přidáváme amoniak, dokud vzorek nezfialoví. Poté přidáváme kyselinou octovou, dokud vzorek nezmění barvu – je-li přítomen hliník, měla by být červená, jinak žlutá. Důvodem je, že volný alizarin je v kyselém prostředí žlutý, ale v přítomnosti hliníku s ním tvoří červený komplex.

⁸Směs koncentrované HNO_3 a HCl v objemovém poměru 1 : 3.

⁹1,2-dihydroxyantrachinon, hojně rozšířené červené organické barvivo.

S koncentrovanou kyselinou dusičnou z našich prvků reaguje pouze stříbro. To lze dál dokázat tak, že na povrch nanese dvě kapky zředěné HNO_3 (v poměru 1 : 1), necháme krátce působit a přiložíme filtrační papír, na který kápneme několik kapek 10% dichromanu draselného. Mělo by se objevit červenohnědé zbarvení, způsobené sraženinou dichromanu stříbrného.

Palladium i platina jsou v Beketovově řadě kovů až na konci. Nelze je rozpustit v HNO_3 ani v H_2SO_4 , rozpouštějí se ale v lučavce královské. Palladium reaguje s koncentrovanou HCl za vzniku komplexu žlutozelené barvy.

Během našich experimentů jsme neměli dostatek chemikálií na to, abychom ověřili všechny výše uvedené postupy, uvádíme tedy jen reakce s NaOH a HNO_3 . Pro další posuzování jsme používali jiné metody.

Nejprve jsme všechny kovy vložili do NaOH . Pouze hliník se rozpustil, ostatní kovy nereagovaly.

Dále jsme použili HNO_3 . Mosaz se nejprve zbarvila na hnědo a poté se rozpustila, což ukazuje přítomnost mědi. Jediné kovy se zlatou barvou s mědí jsou mosaz a bronz. Zinek by měl být v leptán v HNO_3 a také byl, mosaz tedy reagovala, jak měla. Z dalších stříbrných vzorků s HNO_3 reagovalo pouze stříbro.

Vidíme, že většina kovů reagovala dle očekávání. Nereaktivnost hliníku s kyselinou vysvětlujeme vrstvou oxidu na povrchu.

Měření teploty tání

Bod tání je pro každý kov charakteristický a povede-li se nám jej určit, získáme cennou informaci.

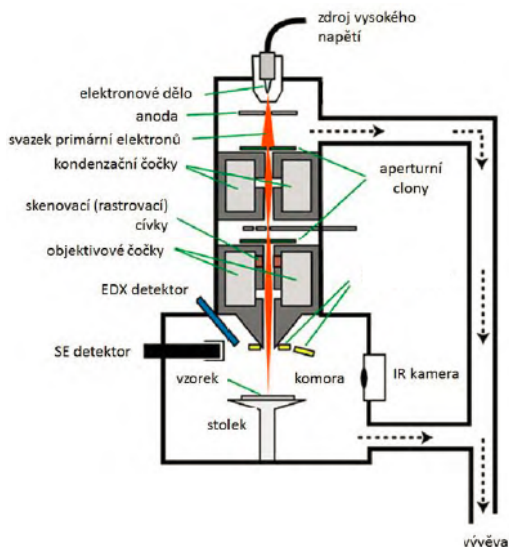
Vytvoříme si píčku z kanthalového drátu, který žhíváme. Porovnááme jeho barvu s barvou vlákna žárovky, do kterého pouštíme známý proud a je na známém napětí (považujeme-li je za černá tělesa, mají při stejné teplotě stejnou barvu). Můžeme tedy spočítat odpor. Změříme odpor R_0 za pokojové teploty T_0 . Do klícky vložíme kov a žháváme, dokud nezačne tát. V tom okamžiku si zaznameneáme odpor R . V požadovaném rozmezí teplot roste odpor wolframu lineárně s teplotou, proto známe-li teplotní odporový koeficient α wolframu, můžeme určit teplotu tání T_t z rovnice $R = R_0[1 + \alpha(T_t - T_0)]$. Pokud známe teplotní závislost odporu drátu píčky, můžeme přímo měřit napětí a proud procházející píčkou a z nich počítat odpor a teplotu.

K tomuto měření nemůžeme víc říct, protože jsme jej z časových důvodů neprovedli.

SEM, EDX

Nejsofistikovanějším způsobem bylo použití SEMu (scanning electron microscope) od firmy TESCAN, typu Mira I LMH, a detektoru EDX (energy-dispersive X-ray spectroscopy) typu Bruker AXS. Nejprve si osvětlíme, co tyto zkratky znamenají.

SEM je skenovací elektronový mikroskop. Jeho schéma je na obr. 5. Celé zařízení je umístěno v hlubokém vakuu, které zajišťuje, aby se kromě měřených elektronů nedostaly do detektorů i nějaké nečistoty z atmosféry. Na rozdíl od optického mikroskopu, který používá k prohlížení vzorku viditelné světlo, tento používá elektronový svazek. Elektrony jsou emitovány horkou katodou, na kterou je přivedeno vysoké napětí (to urychluje elektrony pryč od katody a brání jejich zpětnému absorbování). Tyto elektrony, kterým říkáme primární, jsou dále pomocí elektromagnetických čoček fokusovány na vzorek. Pomocí rastrovacích cívek je možno svazkem pohybovat po vzorku, tedy skenovat ho (odtud název). Kolem vzorku jsou umístěny různé detektory a kamery, abychom mohli získané informace zaznamenat.



Obr. 5: Schéma skenovacího elektronového mikroskopu. Zdroj: Studijní text k praktikům MFF k úloze (A24) Využití rentgenové ED analýzy v materiálovém výzkumu, <http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/424>.

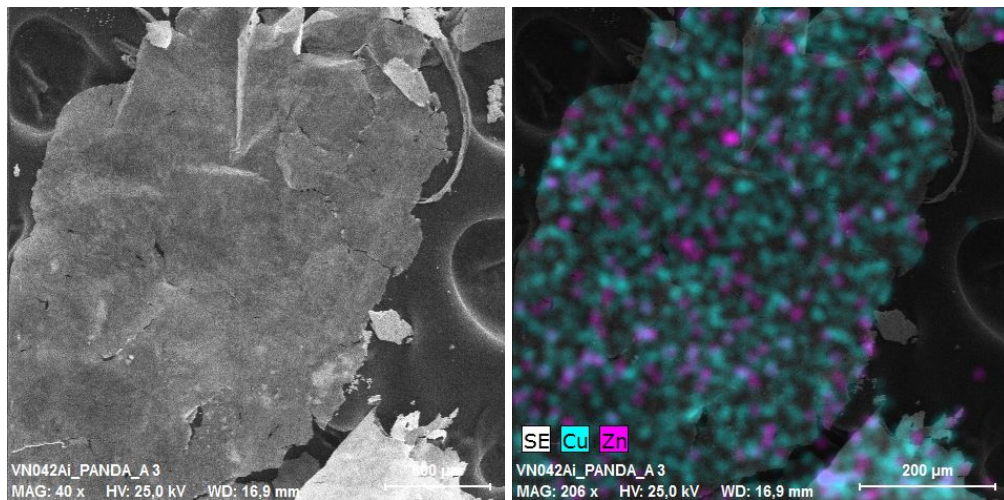
Při dopadu primárních elektronů na vzorek dochází ke složité interakci, při níž se emituje řada různých záření a částic, přičemž každé z nich má jinou fyzikální podstatu a původ. Elektrony, které se od vzorku pružně odrazí, nazýváme zpětně odražené. Nepatrná část se odráží nepružně – elektron pronikne k vnitřním slupkám atomů a vyrazí z nich sekundární elektron. Na uvolněné místo seskočí elektron z vyšších slupek za současně emise dalšího, tzv. Augerova elektronu.

Při interakci vzniká také rentgenové záření, které se skládá ze dvou složek. První, tzv. brzdné záření, má charakter spojitého spektra a vzniká v důsledku toho, že dopadající elektrony jsou brzděny elektromagnetickým polem ve vzorku. Vzorek tedy musí být alespoň trochu vodivý a plní funkci anody. Druhá část, tzv. charakteristické záření, vzniká, pokud je při obsazování uvolněných vnitřních slupek atomů elektrony z vyšších slupek vyzářen foton. V rentgenovém spektru se tyto přeskoky projeví jako ostré píky. Poloha těchto píků je pro každý prvek typická a lze podle ní určit, o jaký materiál, případně materiály, se jedná. Navíc je možné podle intenzity píku určit, jaké množství daného prvku vzorek obsahuje; nám ale bude stačit kvalitativní analýza, tj. bude nás zajímat pouze poloha píků. Dalším přídatkem rentgenového záření je fluorescence, která nastává při absorpci primárního rentgenového záření. To způsobí přeskok nějakého elektronu do vyšší energetické hladiny, který je při zpětném přeskoku provázen opět rentgenovým zářením.

K detekci rentgenového záření budeme používat EDX, energiově disperzní X-ray detektor. Když na takový detektor, který je obvykle z dopovaného křemíku, tedy z polovodiče, dopadne foton, absorbuje se a vytvoří se pár elektron-díra. Na krystal je aplikováno vysoké napětí, které usměrní pohyb elektronů a děr k opačným elektrodám a vznikne napěťový pulz, který je zazna-

menán. Výhodou EDX detektorů je schopnost načítat kontinuálně celé spektrum energií a velká citlivost. Detektor použitý v této úloze disponuje softwarem Esprit pro analýzu dat, který má již zabudovanou databázi charakteristických spekter různých prvků, s kterou naměřená spektra porovnává. Rovnou nám tedy řekne, o který prvek se jedná, a my jsme téměř bez práce.

Měření na mosazi potvrdilo přítomnost mědi a zinku ve vzorku. Obrázky z mikroskopu jsou na obr. 6.



Obr. 6: Obrázky mosazi ze SEMu. Vlevo černobílý obrázek vzorku, vpravo barevně odlišené dva nejvíce zastoupené prvky: Cu, Zn.

Závěr

Tato úloha nebyla jednoduchá. Provedení ztěžovala malá hmotnost a tloušťka vzorků. Výsledky chemických reakcí nemusely odpovídat očekávání kvůli převaze povrchových vlastností, vytvořené vrstvě oxidu či naneseným nečistotám. Některé si také žádaly delší čas. Přesto však s pomocí vizuálního pozorování a několika dalších experimentů šlo kovy určit, nebo alespoň říci, které by to mohly být.

Komentáře k došlým řešením

Většina z vás se poprala s úlohou víceméně úspěšně. Objevila se řada způsobů řešení, od vnějšího pozorování, přes nejrůznější chemické metody až po využití spektrografu. Určení nebylo jednoduché – úlohu ztěžovala forma kovů; u takto tenkých vzorků mohly při působení chemikálií převládnout povrchové vlastnosti, mohly se objevit nečistoty. Očekávané reakce také mohly proběhnout za delší dobu, mohlo tedy být třeba trpělivosti. Úlohu jsme hodnotili mírně, hlavními kritérii byla úplnost, přehlednost, správnost zpracování.

Mezi časté chyby patřilo měření odporu prostým připojením multimetru a následným počítáním rezistivity podle vzorečku pro drát. Ten pro takovéto tenké vzorky nefunguje; pro plošné

vzorok se hodí použít třeba tzv. čtyřbodová metoda. Někteří řešitelé se také podivovali nad tím, že vzorek plave na vodě – to je proto, že je tak tenký a lehký, že ho na hladině udrží povrchové napětí. Je také možné, že se pod ním vytvořily/zůstaly bublinky, které tlačily vzorek vzhůru.

Domínika Kalasová

dominika@fykos.cz

Lukáš Tímko

lukast@fykos.cz

Lukáš Ledvina

lukasl@fykos.cz

Jiří Nárožný

nahry@fykos.cz

Jakub Kocák

jakub@fykos.cz

Úloha VI.S ... rozmixovávací

6 bodů; průměr 5,57; řešilo 7 studentů

Opište si funkci `iterace_stanMap` ze seriálu a pomocí následujících příkazů si vyberte deset velmi blízkých počátečních podmínek pro nějaké K .

```
K=...;
```

```
X01=...;
```

```
Y01=...;
```

```
Iter1 = iterace_stanMap(X01, Y01, 1000, K);
```

```
...
```

```
X10=...;
```

```
Y10=...;
```

```
Iter10 = iterace_stanMap(X10, Y10, 1000, K);
```

V `Iter1` až `Iter10` je tedy schováno tisíc iterací daných počátečních podmínek pomocí Standardní mapy. K tomu, abyste viděli, jak vypadá všech deset bodů po n -té iteraci, musíte napsat

```
n=...;
```

```
plot(Iter1(n,1), Iter1(n,2), "o", ..., Iter10(n,1), Iter10(n,2), "o")
```

```
xlabel("x");
```

```
ylabel("y");
```

```
axis([0, 2*pi, -pi, pi], "square");
```

```
refresh;
```

"o" do příkazu `plot` píšeme, aby se body pro přehlednost vykreslily jako kroužky. Zbytek příkazů je pak zahrnut kvůli tomu, aby graf zahrnoval celý čtverec a měl ty správné popisky.

a) Nastavte nějaké silné kopání, K alespoň tak $-0,6$, a umístěte svých deset počátečních podmínek velmi blízko sebe někam doprostřed chaotické oblasti (tj. třeba „na špičku propisky“).

Jak se s iteracemi těchto deset počátečních podmínek oddaluje či přibližuje? Zdokumentujte na grafech. Jak vypadá deset původně velmi blízkých počátečních podmínek po 1000 iteracích? Co z toho můžeme vyvodit o „míchavosti“ počátečních podmínek v dané oblasti?

b) Vezměte opět nějaké poměrně silné kopání a umístěte svých deset počátečních podmínek poblíž svislé rovnováhy rotoru, tj. $x = 0$, $y = 0$. Jak se těchto deset počátečních podmínek oddaluje/přibližuje v čase? Co o jejich vzdálenosti lze říci po velkém počtu kopnutí?

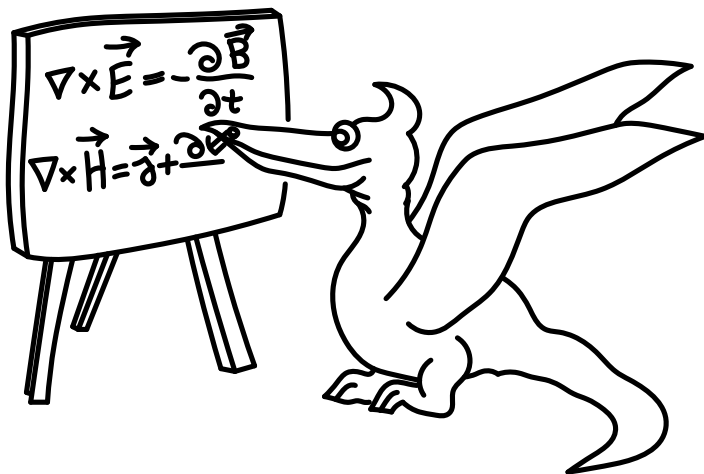
Bonus Zkuste naprogramovat a vykreslit i chování nějaké jiné nakopávané mapy. (Pro inspiraci se můžete podívat do vzorového řešení minulé série.)

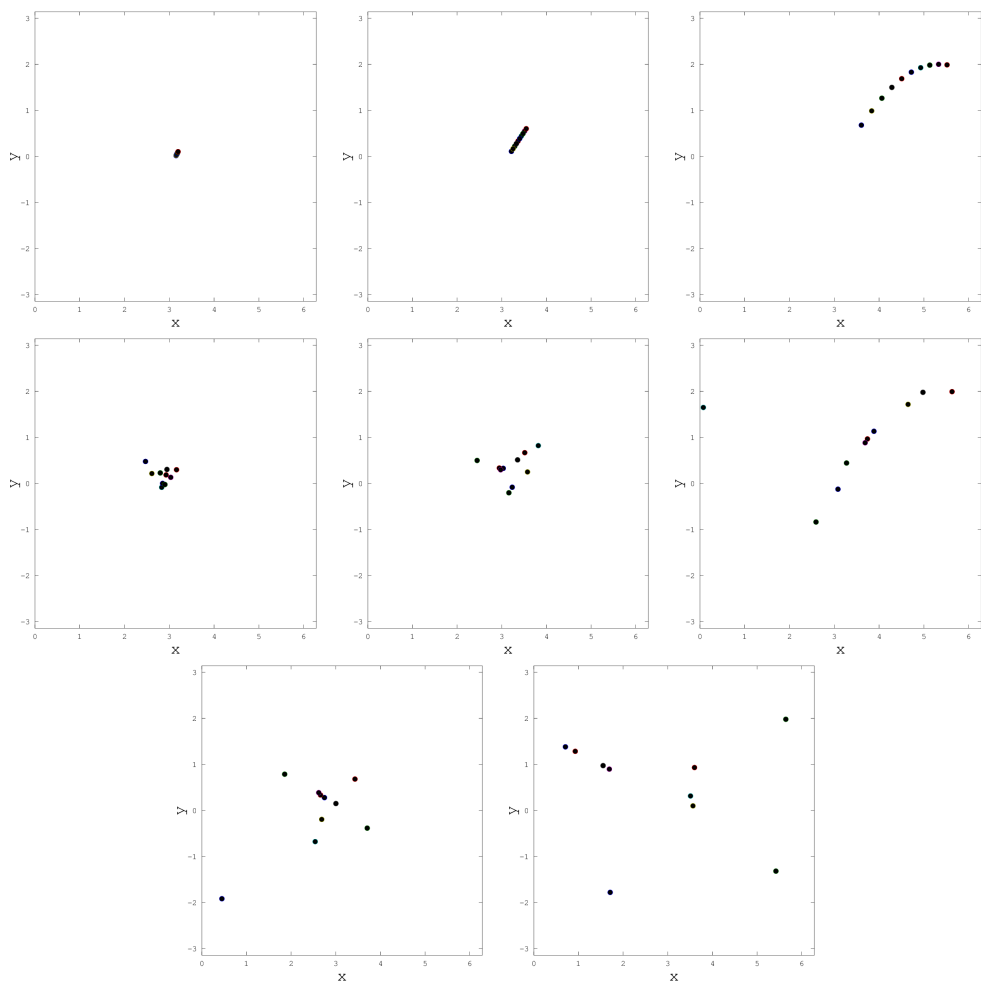
a) 1. Pro první část jsme zvolili počáteční podmínky všechny $x_0 = \pi$, $y_0 = 0,01; 0,015; \dots; 0,055$ a $K = -0,9$. Vybrané body se při daném K vždy roztáhnou po celém čtverci, a pak se po cca 9 iteracích standardní mapy shlukují zase okolo nestabilní rovnováhy. Při každém „shluknutí“ se ale body trochu pomíchají a po nějakých 30 iteracích už faktic-

ky nelze rozpoznat, že tyto body měly blízké počáteční podmínky (natožpak po 1000). Odpovídající grafy jsou na obrázku 7.

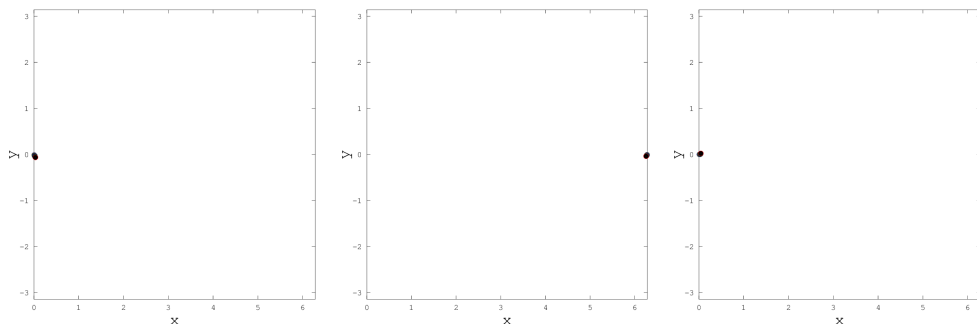
2. Pro druhou část jsme zvolili počáteční podmínky všechny $x_0 = 0$, a opět $y_0 = 0,01; 0,015; \dots; 0,055$ a $K = -0,9$. Nevýhoda dané volby souřadnice x a její periodičnosti je, že body přeskakují z levého kraje na pravý, i když zůstávají fakticky na místě. Když se přes toto dokážeme přenést, ukazuje obrázek 8, že body zůstávají blízko sebe po desítky, stovky i tisíce iterací.
- b) Zde záleželo na vaší fantazii a troše obratnosti v Octave. My jsme třeba nasimulovali kopací mapu $x_{n+1} = x_n + y_n$ a $y_{n+1} = y_n + K(\sin(x) + 0,1 \cos(5x))$. Je to taková zvlněná standardní mapa, kterou jsme s parametrem $K = -0,9$ pro zajímavost aplikovali na body obrázku Henriho Poincarého, výsledek si můžete prohlédnout v obrázku 9 (srovnat jej můžete například s obrázky z posledního dílu seriálu).

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz

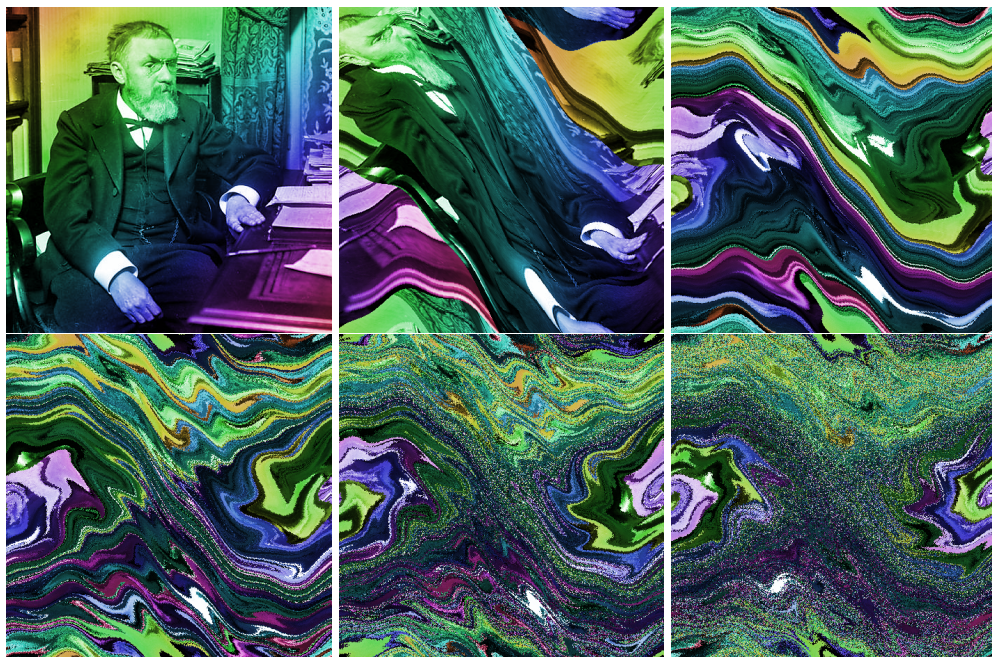




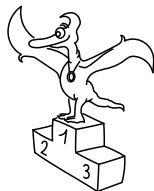
Obr. 7: Na grafech jsou postupně zleva doprava a shora dolů vyobrazeny body okolo nestabilní rovnováhy po 2, 4, 6, 10, 18, 20, 24 a 30 iteracích. Od 30 iterací dále vypadají všechny obrázky vlastně pořád stejně, ve statistické fyzice by se řeklo, že soubor dosáhl statistické rovnováhy.



Obr. 8: Na grafech jsou postupně zleva doprava vyobrazeny body okolo stabilní rovnováhy po 10, 100 a 1000 iteracích. Detailnější dokumentace není potřeba, obrázky až na občasné přeskočení bodu z okraje na okraj zůstávají fakticky stejné.



Obr. 9: Henri Poincaré podroben pozměněné standardní mapě po 0, 3, 6, 12, 18 a 30 iteracích. Opět je po 30 iteracích obrázek „ustálený“ a jeho charakter už se moc nemění. Na obrázku zase můžete vidět, že v chaotických oblastech se původní prostor počátečních podmínek úplně rozmíchá, zatímco v regulárních lze dosledovat i po mnoha iteracích původní části obrázku.



Pořadí řešitelů po VI. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	5	5	8	6	41	100	238
1. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	4	2	3	2	2	-	7	-	20	70	129
2. Jan Preiss	G, Lovosice	4	4	2	5	5	2	8	-	30	65	126
3. Ondřej Knopp	G, Třeboň	2	2	3	5	-	-	7	6	25	79	122
4. Filip Čermák	G Golianova, Nitra	2	2	4	5	3	1	7	6	30	78	118
5.-6. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	4	4	2	5	1	3	5	-	24	64	107
5.-6. David Němec	G, Tanvald	4	2	-	3	-	2	3	-	14	60	107
7. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	4	2	-	4	1	-	-	-	11	62	91
8. Šimon Karch	G, Komenského, Havířov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76	85
9. Ladislav Nagy	G a SOŠZE Vyškov	4	2	-	-	2	-	3	-	11	41	63
10. Dominik Starý	G, Benešov	-	4	2	2	1	2	-	-	11	65	58
11. Jakub Suchánek	G Opatov, Praha	-	-	2	-	-	-	-	-	-	66	56
12. Ondřej Chloupek	G, Mostecká, Chomutov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	52
13. Filip Náčovský	G, Dvůr Králové n. L.	4	2	-	-	-	3	-	-	9	46	51
14. Jan Došek	G, Brandýs n. L.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	47
15. Jaroslav Paidar	SPŠ, Masarykova, Liberec	2	2	-	-	-	-	5	-	9	53	42

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	5	5	8	6	41	100	238
1. Jáchym Bárták	G Havlíčkův Brod	4	4	3	5	2	5	8	4	35	76	172
2. David Vokrouhlický	G Jana Keplera, Praha	4	2	3	5	4	2	8	4	32	71	168
3. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	4	4	3	5	2	4	2	5	29	74	160
4. Daniel Pajer	G Jana Keplera, Praha	2	4	3	5	4	2	-	-	20	66	130
5. Přemysl Štastný	G, Žamberk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	128
6. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	4	4	-	2	3	2	4	-	19	68	123
7. Štěpán Stenclák	G, Třinec	4	4	4	3	2	2	8	7	34	74	122
8. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	4	2	2	5	-	-	7	-	20	73	120
9. Adam Poloček	G, Havlíčkova, Český Těšín	2	4	3	-	1	1	5	-	16	52	96
10. Aleš Krčil	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	4	4	2	1	1	2	6	-	20	45	92
11. Peter Kubaščík	G Kysucké Nové Město	4	2	2	3	2	-	-	-	13	64	86
12. Jakub Kožušník	Wichterlovo G, Ostrava	4	4	1	2	1	3	-	-	15	50	82
13.-14. Kateřina Stodolová	G, Dašická, Pardubice	4	4	1	1	-	-	7	-	17	76	81
13.-14. Veronika Úloučová	Církevní G, Plzeň	2	2	1	1	1	2	8	-	17	50	81
15. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	2	2	-	1	1	2	-	10	42	76
16. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	2	-	-	3	-	-	1	-	6	56	74
17. Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	4	4	2	1	-	-	-	-	11	58	64

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	5	5	5	8	6	37	100	214
1. <i>Tomáš Hrbek</i>	G J. Ressela, Chrudim	1	1	2	2	2	4	7	7	26	71	152
2. <i>Andrej Uhliarik</i>	G Námestovo	2	2	2	3	-	-	-	-	9	58	97
3. <i>Pavel Souček</i>	G, Nymburk	1	2	2	5	-	3	-	-	13	58	83
4. <i>Tomáš Fárník</i>	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	73
5. <i>Klára Stefanová</i>	G B. Němcové, HK	2	2	2	5	-	2	8	-	21	66	67
6. <i>Jiří Tuháček</i>	Masarykovo G, Plzeň	1	2	4	-	-	2	6	-	15	64	62
7. <i>Jakub Pilarš</i>	G J. Ressela, Chrudim	2	1	1	2	-	-	8	-	14	52	61
8. <i>Kristína Mrázová</i>	G, Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	49	49
9. <i>Šimon Knoška</i>	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	2	1	3	5	-	-	-	-	11	67	48
10. <i>Jakub Marták</i>	G Golianova, Nitra	2	0	-	1	-	2	2	-	7	30	41
11. <i>Peter Lučanský</i>	G Bardejov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	49	36
12. <i>Sára Rosecká</i>	G, Botičská, Praha	1	-	-	3	1	2	6	-	13	35	31
13.-15. <i>Jakub Jambrich</i>	G J. A. Raymana, Prešov	2	2	1	1	1	1	-	-	8	45	30
13.-15. <i>Jozef Mišt</i>	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	-	-	-	-	-	-	-	2	70	30
13.-15. <i>Marian Poljak</i>	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	30
16. <i>Kateřina Hladká</i>	G, Karviná	-	-	-	-	-	-	-	-	-	47	27
17. <i>Tomáš Drozdík</i>	G Andreja Vrábla, Levice	1	-	-	-	-	-	-	-	1	50	26
18. <i>Kryštof Kolář</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	-	3	5	-	-	-	-	8	78	25
19. <i>Anna Linhartová</i>	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55	24
20. <i>Martin Vitoušek</i>	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	23
21. <i>Tianyuan Lu</i>	IMSA, Aurora, USA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	65	20

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	5	5	5	8	6	37	100	214
1. <i>Jakub Sláma</i>	G Opatov, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	132
2. <i>Domínika Jochcová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	-	-	-	-	-	7	-	-	7	75	131
3. <i>Petr Doležal</i>	G Z. Wintra, Rakovník	1	2	2	5	5	-	8	-	23	77	87
4. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	85
5. <i>Kateřina Smítalová</i>	G, Dašická, Pardubice	2	2	3	4	-	-	4	-	15	67	84
6. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	83
7. <i>Luboš Krnáč</i>	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	54
8. <i>Kryštof Šulc</i>	VOŠ, SOŠ a G, Evropská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	41
9. <i>Mojmír Poprocký</i>	G Matyáše Lercha, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	77	37
10. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	31
11. <i>Marek Biely</i>	G, Považská Bystrica	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	30
12. <i>Samuel Kočiščák</i>	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81	29
13. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	22
14. <i>Andreea-Alexandra Varasteanu</i>	CNI Tudor Vianu, Romania	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25	20
15. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, HK	-	-	-	-	-	-	-	-	-	54	19
16. <i>Michal Moravec</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	49	17
17. <i>Michal Kalousek</i>	G, Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	16
18. <i>Jakub Dvořák</i>	G, Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	56	15
19. <i>Jakub Hornáček</i>	G V. Mihalika, Sered	-	-	-	-	-	-	-	-	-	82	14
20.-21. <i>Petr Smíštel</i>	G, Bučovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	13
20.-21. <i>Miloslav Staněk</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81	13



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta


Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.