

Úloha I.5 ... černobylská

4 body; průměr 2,17; řešilo 90 studentů

Pokud by někdo snědl 5 μg izotopu cesia ^{137}Cs , za jak dlouho bude mít v těle pouze 0,04 % původního množství částic tohoto izotopu? Předpokládejme, že cesium ^{137}Cs má poločas rozpadu 30,42 let a jeho biologický poločas (tedy doba, za kterou se z těla vyloučí právě polovina původního množství látky) je přibližně 15 dní. Zjistěte také, kolik částic se do té doby stihne v těle radioaktivně rozpadnout. *Kiki měla hlad na zkoušce z toxikologie.*

Poznáme rovnici rádioaktivního rozpadu a zadání nám napovídá, že bude asi popisovat aj biologické vylučování

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T}\right),$$

kde N_0 je počet částic v čase $t = 0$ a T je polčas – či už rozpadu alebo biologického vylučovania. Potom je rýchlosť vylučovania (a rovnako aktivita rozpadu) popísaná vzťahom

$$\frac{dN}{dt} = -N(t) \frac{\ln 2}{T}. \quad (1)$$

Keďže sa látka aj rádioaktívne rozpadá, aj biologicky vylučuje. Celkovú rýchlosť odstraňovania získame sčítaním týchto rýchlostí.

$$\frac{dN}{dt} = -N(t) \left(\frac{1}{T_R} + \frac{1}{T_B} \right) \ln 2 = -N(t) \frac{\ln 2}{T_E},$$

kde T_B je biologický polčas, T_R je polčas rozpadu a T_E je efektívny polčas rozpadu. Z tohto môžeme určiť, ako bude množstvo látky v tele klesať, keďže vidíme, že rovnica vyzerá rovnako ako (1). Jej riešenie bude

$$N(t) = N_0 \cdot \exp\left(\frac{t \ln 2}{T_E}\right) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_E}}. \quad (2)$$

Potom pre čas τ , keď $N/N_0 = 4 \cdot 10^{-4}$, dostaneme

$$\tau = -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \cdot \frac{T_R T_B}{(T_R + T_B) \ln 2} \doteq 169 \text{ dní}.$$

Pre druhú časť úlohy sa stačí pozrieť na rovnice (1) a (2). Z prvej vieme podiel částic, ktorý sa rozpadne za element času, z druhej zasa, koľko částic v tele v každom čase je. Potom vidíme, že počet částic, ktoré sa rozpadnú za čas dt , je

$$dN_R = N_0 \cdot \frac{\ln 2}{T_R} \cdot \exp\left(-\frac{t(T_R + T_B) \ln 2}{T_R T_B}\right) dt,$$

kde sme zmenili $-$ na $+$, keďže nás zaujíma počet rozpadnutých částic, teda ich úbytok. Toto už len zintegrujeme po čas τ

$$N_R = N_0 \cdot \frac{T_B}{T_R + T_B} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau(T_R + T_B) \ln 2}{T_R T_B}\right) \right].$$

Exponenciála sa samozrejme nezmenila, a teda za ňu dosadíme podľa (2) pomer N/N_0 a vyjadríme N_0 pomerom celkovej hmotnosti a hmotnosti jedného atómu $A_r m_u$, kde $A_r = 137$ je relatívna atómová hmotnosť cézia ^{137}Cs a $m_u \doteq 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg je atómová hmotnostná jednotka.

$$N_R = \frac{m}{A_r m_u} \cdot \frac{T_B}{T_R + T_B} \cdot \left(1 - \frac{N}{N_0} \right).$$

Za tento čas sa teda v tele rozpadne $N_R \doteq 3,0 \cdot 10^{13}$ častíc. Celkovo, teda do úplného odstránenia, keď $N \ll N_0$ (v limite $t \rightarrow \infty$), sa rozpadne len $T_B/(T_R + T_B) \doteq 0,1\%$ látky.

Filip Ayazi
filip@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.