

DANIEL DUPKALA, MIROSLAV HANZELKA  
A KOLEKTIV

# Fyzikální korespondenční seminář

XXX. ročník – 2016/17



Copyright © Daniel Dupkala, Miroslav Hanzelka, 2017  
Copyright © MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty  
Univerzity Karlovy, 2017

ISBN 978-80-7378-352-5



## Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>4</b>
<b>Zadání teoretických úloh</b>	<b>7</b>
<b>Řešení teoretických úloh</b>	<b>16</b>
<b>Zadání experimentálních úloh</b>	<b>99</b>
<b>Řešení experimentálních úloh</b>	<b>101</b>
<b>Zpracování dat fyzikálních měření</b>	<b>131</b>
Kapitola 1: Zpracování dat fyzikálních měření . . . . .	131
Kapitola 2: Zpracování dat fyzikálních měření . . . . .	139
Kapitola 3: Zpracování dat fyzikálních měření . . . . .	150
Kapitola 4: Zpracování dat fyzikálních měření . . . . .	163
Kapitola 5: Seriál - Zpracování dat 5. díl . . . . .	174
Kapitola 6: Seriál - Zpracování dat 6. díl . . . . .	188
<b>Řešení úloh ze seriálu</b>	<b>203</b>
<b>Akce FYKOSu</b>	<b>256</b>
Podzimní soustředění v Zásече . . . . .	256
Jarní soustředění v Domašově nad Bystřicí . . . . .	257
FYKOSí Fyziklání . . . . .	259
Fyziklání online . . . . .	261
Fyzikální Náboj . . . . .	262
Den s experimentální fyzikou . . . . .	263
Cyklus přednášek pro středoškoláky . . . . .	264
<b>Pořadí řešitelů</b>	<b>265</b>



## Předmluva

Milá čtenářko, milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala publikace, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v jeho XXX. ročníku, který probíhal ve školním roce 2016/17.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v České republice. Je organizován studenty především Matematicko-fyzikální fakulty UK, ale i jiných fakult a škol v České republice i zahraničí, a podporován zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK. Snaží se oslovit studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm brožur, v nichž nalezneme šest sérií po osmi úlohách, z nichž dvě jsou „jednoduché“ (zaměřené především na první dva ročníky středních škol), jedna více problémová, jedna experimentální a jedna tzv. seriálová. Zbýlé tři úlohy se týkají libovolného fyzikálního tématu a tvoří jádro série. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které znáte z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídka je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení, ať už klasicky poštou, nebo přes internet. Opravující pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpoblábnějšími jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutů české země. Jejich účastníci si užijí bohatý program, založený na dopoledních matematických nebo fyzikálních přednáškách a odpoledních aktivitách v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na atraktivní místa. Tento akademický rok se podzimní soustředění konalo v Zásece a jarní soustředění v Domašově nad Bystřicí.

Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště, kde se dělá opravdová fyzika.

Proběhl již jedenáctý ročník tradičního FYKOSího Fyziklání, soutěže pětičlenných týmů v řešení fyzikálních úloh na čas. Vyhrává tým s největším bodovým ziskem, přičemž rozhoduje jak správnost, tak i rychlost. V letošním roce se soutěže zúčastnilo 118 družstev z ČR i ze Slovenska. To je pro nás skvělým důkazem, že se



fyzika a přírodní vědy obecně mezi středoškolskými studenty stále těší popularitě. Po několika letech se také povedlo zvítězit týmu z České republiky.

FYKOSím Fyzikláním je inspirovaná internetová soutěž Fyziklání online (v zahraniční verzi Online Physics Brawl). V listopadu 2016 proběhl její šestý ročník a opět zaznamenala velký úspěch. Soutěž byla díky její elektronické formě otevřena všem zájemcům, nejenom středoškolákům, pro které je vytvořena především. Tohoto ročníku se zúčastnilo 197 středoškolských a 51 jiných týmů. To svědčí o narůstající popularitě soutěže, a nyní se již řadí mezi tradiční FYKOSí akce.

Kromě toho FYKOS organizuje i další menší akce, o nichž se dozvíte dále v této publikaci nebo na našich webových stránkách.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXX. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítili čtenáře k samostatnému zamýšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je Seriál o termodynamice, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci publikace se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujal natolik, že by ses chtěl stát řešitelem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky, či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



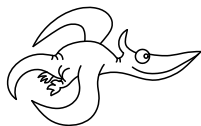
**FYKOS**  
**UK, Matematicko-fyzikální fakulta**  
**Ústav teoretické fyziky**  
**V Holešovičkách 2**  
**180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.cz>  
 e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

A jak vypadal XXX. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 132 studentů ze 101 středních škol z České a Slovenské republiky. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže.

## Pořadí škol

Škola	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
G Jana Keplera, Praha	4	109	<b>435</b>
G Havlíčkův Brod	2	166	<b>332</b>
G J. Ressela, Chrudim	3	80	<b>239</b>
Wichterlovo G, Ostrava	2	107	<b>213</b>
G Opatov, Praha	3	68	<b>205</b>
G, Dašická, Pardubice	3	60	<b>181</b>
Masarykovo G, Plzeň	2	85	<b>169</b>
G J. Škody, Přerov	5	33	<b>164</b>
G Golianova, Nitra	2	80	<b>159</b>
G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	34	<b>134</b>
G, Pelhřimov	1	129	<b>129</b>
G, Žamberk	1	128	<b>128</b>
G, Lovosice	1	126	<b>126</b>
G L. Svobodu, Humenné	1	123	<b>123</b>
G, Třeboň	1	122	<b>122</b>
G, Třinec	1	122	<b>122</b>
G, Havlíčkova, Český Těšín	2	54	<b>107</b>
G, Tanvald	1	107	<b>107</b>
G Námestovo	1	97	<b>97</b>
G P. de Coubertina, Tábor	2	48	<b>96</b>
G dr. A. Hrdličky, Humpolec	1	92	<b>92</b>
G Z. Wintra, Rakovník	2	46	<b>91</b>
G Uherské Hradiště	4	23	<b>90</b>
G B. Němcové, HK	2	43	<b>86</b>
G Kysucké Nové Mesto	1	86	<b>86</b>
G PdC, Piešťany	1	85	<b>85</b>
G, Komenského, Havířov	1	85	<b>85</b>
G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	42	<b>84</b>
G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	83	<b>83</b>
G, Nymburk	1	83	<b>83</b>
G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	41	<b>82</b>
Církevní G, Plzeň	1	81	<b>81</b>
G, Olomouc – Hejčín	3	27	<b>81</b>
G a SOŠZZE Vyškov	1	63	<b>63</b>
G O. Havlové, Ostrava	1	63	<b>63</b>
G F. Palackého, Val. Mez.	2	29	<b>58</b>
G, Benešov	1	58	<b>58</b>
G, Mostecká, Chomutov	1	52	<b>52</b>
G Nové Zámky	1	51	<b>51</b>
G, Brandýs n. L.	2	26	<b>51</b>
G, Dvůr Králové n. L.	1	51	<b>51</b>
G, Litomyšl	2	25	<b>50</b>



## Zadání teoretických úloh

### Úloha I.1 ... s rumem či bez?

3 body

Do kuchyňského kastrolu, který prakticky nevede teplo, vložíme tři látky: vodu, ocel a rum. Voda má hmotnost  $m_v = 0,5$  kg, počáteční teplotu  $t_v = 90$  °F a měrnou tepelnou kapacitu  $c_v = 1$  kcal·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>. Ocelový váleček má hmotnost  $m_o = 200$  g, teplotu  $t_o = 60$  °C a měrnou tepelnou kapacitu  $c_o = 0,260$  kJ·kg<sup>-1</sup>·°F<sup>-1</sup>. Rum má hmotnost  $m_r = 100\,000$  mg, teplotu  $t_r = 270$  K a měrnou tepelnou kapacitu  $c_r = 3,5$  J·g<sup>-1</sup>·°C<sup>-1</sup>. Jakou teplotu (ve stupních Celsia) bude mít soustava po ustálení tepelné rovnováhy? (řešení str. 16)

### Úloha I.2 ... brzdná

3 body

Petr rád jezdí po rovině na kole rychlostí  $v = 10$  m·s<sup>-1</sup> a jeho chytré kolo hlásí, že Petrův výkon je  $P = 100$  W. Po nehodě se zkrivily ráfkové brzdy, které teď na kolo působí třecí silou  $F_t = 20$  N u obvodu. Po jakou dobu  $t'$  musí teď Petr jet na kole rychlostí  $v$ , aby vykonal stejnou práci jako předtím za čas  $t$ ? (řešení str. 17)

### Úloha I.3 ... hopsa hejsa

5 bodů

Mějme ideální hopík dokonalé odrazivosti a zanedbatelných rozměrů. Tento hopík hodíme z nekonečných schodů, kde jeden schod má výšku  $h$  a délku  $l$ . Odrazy probíhají beze tření. Popište závislost nejvyšší dosažené výšky (měřeno od prvního schodu) hopíku po  $n$ -tém odrazu na počátečních parametrech. (řešení str. 17)

### Úloha I.4 ... něco je tu nakřivo

6 bodů

Pozorovatel se nachází na lodi na otevřeném moři ve výšce  $h$  nad hladinou. Je vzdálen  $d$  od vodorovného zábradlí a to v takové poloze, že dívá-li se kolmo na zábradlí, splývá dolní okraj zábradlí s horizontem. Podívá-li se ale na zábradlí ve vzdálenosti  $l$  na stranu od kolmice, vidí, že se obzor nachází o  $s \pm s_s$  pod dolním koncem zábradlí. Určete poloměr Země. (řešení str. 19)

### Úloha I.5 ... na procházce

7 bodů

Katka si vyšla ráno před přednáškou na procházku, aby vyvenčila svého potkana. Vyšla s ním na rovný palouk, a když byl potkan ve vzdálenosti  $x_1 = 50$  m od ní, hodila mu míček rychlostí  $v_0 = 25$  m·s<sup>-1</sup> pod úhlem  $\alpha_0$ . V okamžiku výhozu potkan vyběhl směrem ke Katce rychlostí  $v_1 = 5$  m·s<sup>-1</sup>. Nalezněte obecnou závislost úhlu  $\varphi$  na čase, kde  $\varphi(t)$  označuje úhel mezi vodorovnou rovinou a spojnicí potkana a míčku, a vykreslete tuto závislost do grafu. Na základě grafu určete,

zda je možné, aby míček zakryl potkanovi Slunce, jenž se nachází ve výšce  $\varphi_0 = 50^\circ$  přímo před potkanem. Počítejte s tíhovým zrychlením  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a pro zjednodušení uvažujte, že házíme z nulové výšky. (řešení str. 24)

### Úloha I.P ... nebe nám padá na hlavu

8 bodů

Už jste se někdy zamysleli nad tím, proč mraky nepadnou na zem, když jsou z vody, která má přece výrazně větší hustotu než vzduch? Dešťové kapky dopadnou na zem v rádech minut, tak proč ne i mraky? Zkuste tuto skutečnost fyzikálně objasnit. Veškerá svá tvrzení podložte výpočtem. (řešení str. 27)

### Úloha II.1 ... rande na pláži

3 body

Představte si, že vezmete svou přítelkyni/svého přítele na večerní rande na pláž a sledujete západ Slunce nad vzdálenou hladinou moře. Protože chcete prodloužit romantickou chvíli, vezmete si s sebou vysokozdvizný vozík, který se, jakmile Slunce začne zapadat za obzor, začne rovnoměrným pohybem zvedat vzhůru, abyste stále viděli Slunce dotýkající se horizontu. Jakou rychlostí se musí vozík pohybovat? (řešení str. 30)

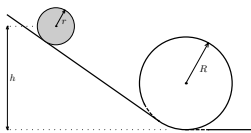
### Úloha II.2 ... hypervysokoteplotní supravodivost

3 body

Velké části látek, obvykle kovům, roste s vyšší teplotou odpor. Jsou ovšem látky, jako například grafit či polovodiče, kterým odpor s rostoucí teplotou klesá. Také jste již pravděpodobně slyšeli o supravodivosti, což je jev, který obvykle nastává za velmi nízkých teplot a jedná se o stav, ve kterém látka nevykazuje žádný elektrický odpor a dokonale vede elektrický proud. V současné době jsou nejvyšší teploty, ze kterých byla supravodivost pozorována, hluboko pod pokojovou teplotou. Co kdybychom ale uvažovali, že se odpor mění dle vzorečku  $R = R_0(1 + \alpha\Delta t)$ , kde  $R_0$  je odpor vodiče pro  $20^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  je teplotní součinitel elektrického odporu a  $\Delta t$  teplotní rozdíl vůči původní teplotě  $20^\circ\text{C}$ ? Tak při hodnotách součinitelů pro grafit  $\alpha_{\text{C}} = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  a křemík  $\alpha_{\text{Si}} = -75 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  dostáváme nulový odpor pro vysoké teploty. Pro jaké? A jak to, že to ve skutečnosti nefunguje a jak uhlík, tak křemík nejsou za vysokých teplot supravodivé? (řešení str. 31)

### Úloha II.3 ... looping

6 bodů



Mějme nakloněnou rovinu pod úhlem  $\alpha$ , na kterou hladce navazuje kruhová smyčka o poloměru  $R$ . Do jaké minimální výšky  $h$  musíme na nakloněnou rovinu položit kouli o poloměru  $r$  (srovnatelném s  $R$ ), aby smyčkou projela tak, že s ní bude po celou dobu v kontaktu?

Předpokládejte, že koule neprokluzuje.

(řešení str. 32)

**Úloha II.4 ... kulička**

6 bodů

Představte si pohyb homogenní kuličky, který nejprve začíná pouze posunem (bez jakéhokoliv pohybu valením) a postupně přejde do naopak naprostého valení (bez prokluzování). Za jaký čas toto nastane? Kulička může mít různý poloměr, hmotnost, počáteční rychlost a třecí koeficient. (řešení str. 34)

**Úloha II.5 ... várnice potřetí**

7 bodů

Uvažujte klasickou várnici s kohoutkem dole a se vzduchotěsným víkem nahoře. Kolik čaje je možné si nalít, než budeme muset otevřít ventil, který vyrovná tlak vzduchu nad čajem s okolním tlakem? (řešení str. 35)

**Úloha II.P ... efektivní (ná)stroj**

9 bodů

Palné zbraně jsou vlastně takovými tepelnými stroji. Spočítejte jaká je účinnost nějaké pušky nebo pistole. (Jde o využití energie střeliva pro pohyb kulky.)

(řešení str. 37)

**Úloha III.1 ... dlouhý film**

3 body

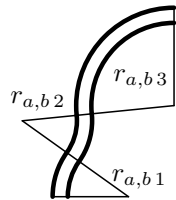
Stahujete si svůj oblíbený film o velikosti 12 GB rychlostí 10 MB/s. Uvažujte, že signál se po kroucené dvojlince pohybuje rychlostí světla a modulace rozprostírá přenosovou rychlost rovnoměrně, tzn. byla-li by 1 b/s, musíme přijmout signál za celou sekundu k obdržení 1 bitu informace. Jak dlouhý úsek kabelu dokáže film zaplnit svými daty, pokud se bude šířit dostatečně dlouhým kabelem?

(řešení str. 42)

**Úloha III.2 ... pekelná**

3 body

Do pekla vede cesta a silnice po opačných březích řeky. Jdeme po směru řeky, který je vyznačen na obrázku. Břehy řeky jsou tvořeny částmi soustředných kružnic. Pěší cesta kopíruje jeden břeh řeky, silnice druhý břeh, šířka toku je neměnná. Po jaké straně řeky je rychlejší jít? Známe středový úhel každého kružnicového oblouku  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  a poloměr každé kružnice  $r_{a1}, r_{b1}, r_{a2}, r_{b2}, \dots$ , kde indexy  $a, b$  značí levý a pravý břeh.



(řešení str. 44)

**Úloha III.3 ... kde to píská**

7 bodů

Verčiny uši lze aproximovat dvěma bodovými detektory ve vzdálenosti  $d$ , které detekují zvukové vlny ze všech směrů stejně dobře. Verča umí polohu známého zdroje zvuku poslepu určit velice přesně, proto jednoho dne, když se probudila, vyzvala své přátele k tomu, aby ji vyzkoušeli. Jenže Verča si v jednom uchu zapomněla špunt, který snižuje intenzitu zvuku v jejím levém uchu  $k$ krát. Verči byly zavázány oči a zdroj byl umístěn do vzdálenosti  $y$  před ni a o  $x$  napravo (či  $-x$  nalevo).

Určete, na které místo  $(x', y')$  Verča ukáže, jestliže uši rozeznávají polohu zdroje podle hlasitosti zvuku. (řešení str. 44)

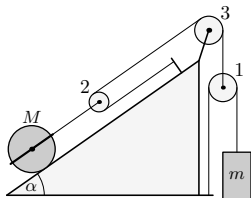
### Úloha III.4 ... radar zadarmo

7 bodů

Na všechny patníky podél silnice umístíme kontrolní červené tabulky (vlnová délka červené barvy je  $\lambda_c = 630$  nm). Jakmile řidič vidí na patníku před ním tabulku modrou (vlnová délka modré barvy je  $\lambda_m = 450$  nm), ví, že jede příliš rychle. Jaká je tato mezní rychlost? Jakou má běžné osobní auto při této rychlosti hybnost a kinetickou energii? (řešení str. 47)

### Úloha III.5 ... kladkovaná

7 bodů



Mějme rozestavení kladek jako na obrázku. Známe hmotnosti  $m_i$ , poloměry  $R_i$  a momenty setrvačnosti  $J_i$  všech kladek, hmotnost  $m$  závaží a hmotnost  $M$ , poloměr  $R$  i moment setrvačnosti  $J$  válce. Zanedbejte tíhu kladky 2, abyste mohli uvažovat, že lana vedoucí ke kladce 2 jsou rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Součinitel smykového i klidového tření mezi válcem a podložkou je  $f$ . Lano na kladkách neprokluzuje. Vypočítejte

s jakým zrychlením (popř. i úhlovým zrychlením) se bude pohybovat závaží  $m$  a válec  $M$ . (řešení str. 48)

### Úloha III.P ... srdeční

8 bodů

Odhadněte, jakou práci vykoná lidské srdce na pumpování krve za jeden den. S čím se dá tato energie srovnat? Jaké procento z doporučeného denního příjmu energie tvoří váš odhad? (řešení str. 52)

### Úloha IV.1 ... svitková relativita

3 body

Pohádkové postavy to nemají lehké, chtějí-li zjistit, kdy se objevují na scéně. Dnešní technika jim to ale usnadňuje. Třeba princezna Pointa z pohádky o délce šest kapitol. Všechny kapitoly jsou stejně dlouhé, a tak každá na Karlově displeji měří 1200 pixelů na výšku (samotný displej ale zobrazí jen výšku 900 px). Při čtení Karel souvisle scrolluje a navíc čte pořád stejně rychle. Po třech minutách od začátku čtení Pointa minula první konec posuvníku ve scrollbaru a po sedmi minutách i druhý. V kolikáté kapitole se objeví Pointa?

Poznámka: Poměr výšky posuvníku vůči výšce displeje je stejný jako poměr výšky displeje vůči výšce celého textu pohádky. (řešení str. 54)

### Úloha IV.2 ... ryvové kyvadlo

3 body

Je známou skutečností, že aby byla jízda vlakem co nejpohodlnější, pak při rozjíždění a brzdění je potřeba, aby se zrychlení měnilo co nejméně. Proto je dobré, když se vlak rozjíždí s malou konstantní změnou zrychlení. Změna zrychlení se nazývá

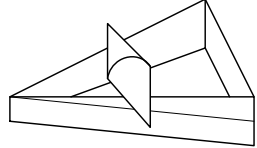
ryv. Určete, jak se v čase mění stabilní poloha kyvadla (úhel odklonění od svislice  $\varphi$ ). Délku kyvadla označme  $l$ , vlak se rozjíždí na rovině, ryv označme  $k$  ( $k = \frac{\Delta a}{\Delta t}$ , kde  $a$  je zrychlení) a vlak jede po Zemi s normálním tíhovým zrychlením  $g$ .

Bonus: Sestavte pohybové rovnice, které numericky vyřešte pro  $\varphi(0) = 0$  a  $\frac{d\varphi}{dt}(0) = 0$  pro různé hodnoty  $k$ . (řešení str. 55)

### Úloha IV.3 ... dvojkůžel

8 bodů

Mějme dřevěnou konstrukci, která má půdorys rovnoramenného trojúhelníku a výška jejích dvou ramen roste směrem k základně s úhlem  $\alpha = 2^\circ$ . Do vrcholu naproti základně  $c = 35$  cm, u něž má trojúhelník úhel  $\beta = 70^\circ$ , umístíme dvojkůžel s vrcholovým úhlem  $\varphi = 40^\circ$  a výškou  $2h = 40$  cm. Kůžel se samovolně začne valit „do kopce“, tedy ve směru růstu hran trojúhelníku.



- Vysvětlíte, proč se dvojkůžel může kutálet do kopce.
- Jak závisí poloha těžiště kůzela na uražené vzdálenosti?
- Jaká je rychlost kůžele těsně před nárazem na základnu?
- Kolik otáček kůžel vykoná během své cesty?

Na počátku je kůžel umístěn horizontálně na konstrukci tak, že jeho těžiště se nachází přesně nad vrcholem trojúhelníku proti základně.

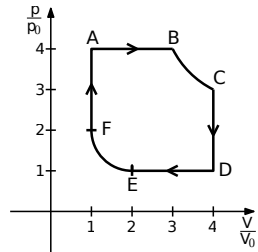
(řešení str. 56)

### Úloha IV.4 ... plynový stroj

8 bodů

Mějme tepelný stroj naplněný ideálním plynem složeným z dvouatomových molekul. Tento tepelný stroj vykonává kruhový děj ABCDEFA, tedy skládá se z šesti dějů

- $A \rightarrow B$  – izobarické zahřátí ze stavu  $4p_0$  a  $V_0$  (teplotu v A označme jako  $4T_0$ ) do stavu s objemem  $3V_0$ ,
- $B \rightarrow C$  – izotermická expanze na objem  $4V_0$ ,
- $C \rightarrow D$  – izochorické ochlazení na tlak  $p_0$ ,
- $D \rightarrow E$  – izobarické ochlazení na objem  $2V_0$ ,
- $E \rightarrow F$  – izotermická komprese na objem  $V_0$ ,
- $F \rightarrow A$  – izochorické zahřátí na tlak  $4p_0$ .



Určete zbývající stavové veličiny ve stavech B, C, D, E a F, maximální a minimální teplotu ideálního plynu v průběhu děje (v násobcích  $T_0$ ), teplo přijaté či odevzdané plynem v jednotlivých dějích a účinnost tepelného stroje. Srovnajte tuto účinnost s účinností Carnotova stroje pracujícího se stejnými maximálními a minimálními teplotami. Pro jednoduchost uvažujte, že se nemění látkové množství plynu ve stroji a nedochází v něm k chemickým přeměnám.

**Bonus** To samé provedte pro jednodušší cyklický „čtvercový“ děj, tedy ABCDA, kde plyn začíná ve stavu  $p_0$ ,  $V_0$  a  $T_0$  a izochoricky se ohřeje na  $4p_0$ , izobaricky se zahřeje a rozepne na  $4V_0$ , izochoricky ochladí na  $p_0$  a izobaricky se ochladí na  $V_0$ . Srovnajte účinnosti těchto dvou tepelných strojů a diskutujte, který je lepší.

(řešení str. 61)

### Úloha IV.5 ... divná atmosféra

9 bodů

Zažili jste už někdy takovou divnou atmosféru? Do určité výšky je v ní rychlost šíření světla konstantní  $v_0$  a od určité hranice se rychlost šíření světla začne lineárně zvětšovat podle vztahu  $v(\Delta h) = v_0 + k\Delta h$ . V jednom místě, právě ve výšce, kde se začala měnit rychlost světla, vyšleme světelné paprsky pod všemi možnými úhly směrem nahoru. Ukažte, že se budou všechny paprsky pohybovat po částech kružnic a určete poloměry těchto kružnic. Také určete vzdálenost od místa vypuštění paprsků, kde se paprsky vrátí do původní výšky.

(řešení str. 64)

### Úloha IV.P ... statistikův denní chléb

9 bodů

Známe to všichni, krajíc chleba namazaný medem nebo marmeládou, zakousneme se a najednou je kapka mazadla na ruce a jsme za prasata. Spočítejte, jak závisí pravděpodobnost, že v krajíci bude díra skrz naskrz, v závislosti na jeho tloušťce. Model kynutí těsta necháme na vás. (Třeba rovnoměrně rozmístěné bubliny s exponenciálně rozděleným poloměrem je dobrý model.)

(řešení str. 66)

### Úloha V.1 ... vesmírný sněhulák

3 body

Jakou silou bude přidržována hlava našeho sněhuláka, který si volně poletuje ve vesmíru? Máme sněhuláka tvořeného pouze homogenními koulemi o hustotě  $\rho$ , jejichž středy leží na jedné přímce a koule se dotýkají, jsou umístěné v pořadí od největší po nejmenší a s tím, že nejmenší koule (hlava) má poloměr  $r$  a každá další má dvojnásobný poloměr, co ta předchozí. Ve vesmíru je pouze náš sněhulák a nijak nerotuje.

**Bonus:** Zobecněte úlohu pro počet koulí  $N \geq 3$ . Bude se síla blížit nějaké konečné hodnotě pro  $n \rightarrow \infty$ , nebo půjde k nekonečnu?

(řešení str. 70)

### Úloha V.2 ... koule ve vazkých tekutinách

3 body

V některých případech řešení úloh s odporem vzduchu či obecně tekutiny používáme pro odporovou sílu Newtonův vzorec  $F = C\rho Sv^2/2$ , kde  $C$  je součinitel odporu tělesa ve směru pohybu tělesa,  $\rho$  je hustota tekutiny,  $S$  je průřez a  $v$  je rychlost pohybu tělesa. Ten obvykle docela dobře platí pro turbulentní prostředí. Zajímáme se o kouli, pro kterou  $C = 0,50$ . V laminárním proudění pak obvykle používáme Stokesův vztah  $F = 6\pi\eta rv$ , kde  $\eta$  je dynamická viskozita tekutiny a  $r$  je poloměr koule. Pokud máme nějakou konkrétní kouli, je možné, aby se pro nějakou rychlost tyto odpory rovnaly? Jak bude tato rychlost záviset na poloměru koule?

(řešení str. 71)



**Úloha V.3 ... něk šíl přes cen srá**

6 bodů

Představte si situaci, kdy máme 3 stejné nerotující disky, které se pohybují přesně v jedné přímce v pořadí 1, 2, 3. Všechny tři se pohybují bez tření a dalších odporových sil po vodorovné podložce, přičemž disky 1 a 2 jedou doprava a proti nim jede disk 3 doleva. Platí, že rychlost 1 je větší než 2. Jak závisí výsledné rychlosti disků po proběhnutí všech srážek na pořadí srážek? A jaké tyto rychlosti budou? Srážky probíhají pružně. (Jako vždy nezapomeňte, že odpověď je potřeba řádně zdůvodnit.)

Bonus: Disky mají různou hmotnost.

(řešení str. 72)

**Úloha V.4 ... na provázku**

8 bodů

Dvě závaží zanedbatelných rozměrů o hmotnosti  $m = 100$  g spojíme pružným nehmotným provázkem o klidové délce  $l_0 = 1$  m s tuhostí  $k = 50$  kg·s<sup>-2</sup>. Jedno závaží držíme na místě a druhé kolem něj necháme rotovat s frekvencí  $f = 2$  Hz. První závaží se přitom může volně otáčet kolem své osy. V jednu chvíli držené závaží uvolníme. Na jakou minimální vzdálenost se k sobě závaží přiblíží? Neuvažujte vliv gravitačního pole a předpokládejte platnost Hookeova zákona.

(řešení str. 74)

**Úloha V.5 ... pouťový balónek**

8 bodů

Máme balónek s hmotností (po nafouknutí)  $m$  a objemem  $V$  naplněný heliem, na kterém je přivázaná (prakticky nekonečná) stužka s délkovou hustotou  $\tau = 10$  gm<sup>-1</sup>. Předpokládejte izotermickou atmosféru, pro níž je závislost atmosférického tlaku  $p$  na výšce  $z$  daná vztahem  $p = p_0 e^{-z/z_0}$  ( $z_0$  je parametr atmosféry). Balónek položíme k zemi a poté ho uvolníme. Do jaké maximální výšky balónek vyletí?

(řešení str. 77)

**Úloha V.P ... sklíčka**

8 bodů

Popište zobrazovací soustavy mikroskop (složený ze 2 spojek) a Keplerův dalekohled. Vysvětlíte rozdíl ve funkci a konstrukci mikroskopu a dalekohledu a načrtněte průchod paprsků. Jak se dá smysluplně definovat zvětšení pro dané optické prvky? Odvoďte pro zvětšení konkrétní vzorce.

(řešení str. 80)

**Úloha VI.1 ... dost těžké kulometry**

3 body

Na auto připevníme dopředu dva kulometry, které vystřelují kulky o hmotnosti  $m = 25$  g rychlostí  $v_1 = 500$  m·s<sup>-1</sup>, každý s frekvencí 10 výstřelů za sekundu. Auto se rozjede po rovině rychlostí  $v_2 = 80$  km·h<sup>-1</sup> a poté začne stílet. Volik nábojů vystřelíme, než auto zastaví? Během palby nepřidáváme plyn, odpor vzduchu a kol zanedbáváme. Tepelné ztráty uvnitř zbraní jsou taktéž zanedbatelné.

(řešení str. 83)

### Úloha VI.2 ... upadlo

3 body

Z jaké výšky nad povrchem neutronové hvězdy bychom museli „upustit“ předmět, aby dopadl na její povrch v rychlosti  $0,1 c$  ( $0,1$  rychlosti světla). Naše neutronová hvězda má hmotnost  $1,5$ násobku hmotnosti Slunce a průměr  $d = 10$  km. Zanedbejte atmosféru neutronové hvězdy a její rotaci. Zanedbejte relativistické korekce. Srovnajte ale, jakého výsledku byste dosáhli, pokud by pád probíhal v homogenním gravitačním poli (které má intenzitu stejnou jako na povrchu planety) s tím, kdy pád probíhá v radiálním gravitačním poli.

Bonus: Uvažujte korekci na speciální teorii relativity v případě pádu v homogenním poli. (řešení str. 85)

### Úloha VI.3 ... relativistický Zenonův paradox

6 bodů

Superman a Flash se rozhodli, že si dají závod. Závod se koná v hlubokém vesmíru, protože na Zemi není dostatečně dlouhá rovná pláž. Flash, protože je pomalejší, startuje s délkovým náskokem  $l$  před Supermanem. Flash v jednu chvíli vyběhne s konstantní rychlostí  $v_F$  srovnatelnou s rychlostí světla. Ve chvíli, kdy si Superman všimne, že Flash vyběhl, vyběhne také, a to konstantní rychlostí  $v_S > v_F$ . Za jak dlouho Superman Flashe dožene (z pohledu Supermana)? A za jak dlouho Flashe dožene Superman (z pohledu Flashe)? A byl vůbec závod spravedlivě odstartován, resp. dokázali byste vymyslet spravedlivější způsob (příčemž náskok  $l$  má být ponechán)? (řešení str. 87)

### Úloha VI.4 ... zastřel si svého potkana

7 bodů

Mírek by rád zastřelil potkana, kterého vídá na kolejkách. Připravil si tedy jednoduchou vzduchovou pušku, kterou si můžeme modelovat jako trubku s konstantním průřezem  $S = 15 \text{ mm}^2$  a délkou  $l = 30$  cm, která je na jedné straně uzavřená a na druhé otevřená. Do ní se chystá Mírek umístit náboj hmotnosti  $m = 2$  g, který trubku akorát utěsní, a to ve vzdálenosti  $d = 3$  cm od uzavřeného konce. Náboj zde zatím nechá upevněný v klidu a natlakuje uzavřenou část trubky na určitý tlak  $p_0$ . Posléze náboj uvolní. Chce, aby na konci ústí byla rychlost náboje minimálně  $v = 90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Poradte mu, na jaký tlak by musel vzduchovou pušku natlakovat, aby náboj vyšel s takovou rychlostí, pokud by plyn byl ideální, a diskutujte realističnost uspořádání. Předpokládejte, že náboj je uvolňován kvazistatickým adiabatickým dějem, kde  $\kappa = 7/5$ , protože se jedná o dvouatomový plyn. Uvažujte, že z vnějšku působí na náboj atmosférický tlak  $p_a = 10^5$  Pa. Zanedbejte energetické ztráty vyvolané třením, odporem vzduchu a stlačováním plynu před nábojem. (řešení str. 88)

### Úloha VI.5 ... přetáhni ho přes prsty

8 bodů

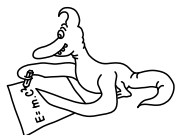
Máme homogenní tyč konstantního průřezu délky  $l$  připevněnou na jednom konci k otočnému kloubu. Na počátku směřuje tyč přímo vzhůru a jsme v homogenním tíhovém poli velikosti  $g$ . Tyč se vlivem mírného závánu větru začne otáčet a „padat“

dolů, ale stále je držena otočným kloubem. S jakým zrychlením se bude pohybovat konec tyče v průběhu času? *(řešení str. 90)*

### **Úloha VI.P ... vypařující se asteroid**

9 bodů

Umístíme hodně velký kus ledu, dejme tomu o průměru 1 km, do blízkosti hvězdy podobné Slunci na kruhovou dráhu. Blízkost je tak velká, že rovnovážná teplota černého tělesa by v této vzdálenosti byla zhruba 30 °C. Co se bude dít s takovým asteroidem a jeho dráhou? Asteroid nemá vázanou rotaci. *(řešení str. 93)*



## Řešení teoretických úloh

### Úloha I.1 ... s rumem či bez?

Do kuchyňského kastrolu, který prakticky nevede teplo, vložíme tři látky: vodu, ocel a rum. Voda má hmotnost  $m_v = 0,5$  kg, počáteční teplotu  $t_v = 90$  °F a měrnou tepelnou kapacitu  $c_v = 1$  kcal·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>. Ocelový váleček má hmotnost  $m_o = 200$  g, teplotu  $t_o = 60$  °C a měrnou tepelnou kapacitu  $c_o = 0,260$  kJ·kg<sup>-1</sup>·°F<sup>-1</sup>. Rum má hmotnost  $m_r = 100\,000$  mg, teplotu  $t_r = 270$  K a měrnou tepelnou kapacitu  $c_r = 3,5$  J·g<sup>-1</sup>·°C<sup>-1</sup>. Jakou teplotu (ve stupních Celsia) bude mít soustava po ustálení tepelné rovnováhy?

Toto je klasická úloha na kalorimetrickou rovnici. Označme teplotu soustavy po ustálení  $t$ . Změna celkového tepla musí být nulová, tedy, pokud nedojde ke změně skupenství, musí platit

$$c_v m_v (t - t_v) + c_o m_o (t - t_o) + c_r m_r (t - t_r) = 0.$$

Vyjádríme si  $t$ :

$$t = \frac{c_v m_v t_v + c_o m_o t_o + c_r m_r t_r}{c_v m_v + c_o m_o + c_r m_r}.$$

Pro výpočet  $t$  převedeme uvedené veličiny na navzájem si odpovídající jednotky, tedy třeba hmotnost na kg, teplotu na °C a měrnou tepelnou kapacitu na J·kg<sup>-1</sup>·°C<sup>-1</sup>. Platí  $t_F = 1,8t_C + 32$ , kde  $t_F$  je teplota ve stupních Fahrenheita a  $t_C$  teplota ve stupních Celsia, tedy rozdíl jednoho stupně Celsia je roven rozdílu 1,8 stupňů Fahrenheita. Převod hmotnosti je jednoduchý (čtenář provede sám) a dále platí  $t_v \doteq 32,22$  °C,  $t_r \doteq -3,15$  °C<sup>1</sup>. Převod jednotek měrné tepelné kapacity provedeme krok po kroku. Začneme vodou. Platí 1 kcal = 4 184 J, tedy  $c_v = 4\,184$  J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup> = 4 184 J·kg<sup>-1</sup>·°C<sup>-1</sup>. U ocele podle výše uvedeného vztahu pro °C a °F platí

$$0,260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{°F}^{-1} \doteq 0,468 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1} = 468 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}.$$

Teď stačí dosadit do výše uvedeného vztahu a dostaneme výsledek

$$t = \frac{4\,184 \cdot 0,5 \cdot 32,22 + 468 \cdot 0,2 \cdot 60 - 3\,500 \cdot 0,1 \cdot 3,15}{4\,184 \cdot 0,5 + 468 \cdot 0,2 + 3\,500 \cdot 0,1} \text{°C} = \frac{71\,917,74}{2\,535,6} \text{°C} \doteq 28 \text{°C}.$$

Celková teplota soustavy je nad bodem mrazu vody, tedy obsah nádoby zůstane v kapalném skupenství a původní kalorimetrická rovnice byla správně.

<sup>1</sup>V takovém stavu je rum ještě bezpečně v tekutém stavu, jak se můžeme dočíst z tabulky bodů tání etanolových směsí: [http://www.engineeringtoolbox.com/ethanol-water-d\\_989.html](http://www.engineeringtoolbox.com/ethanol-water-d_989.html).

## Úloha I.2 ... brzdná

Petr rád jezdí po rovině na kole rychlostí  $v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a jeho chytré kolo hlásí, že Petrův výkon je  $P = 100 \text{ W}$ . Po nehodě se zakřivily ráčkové brzdy, které teď na kolo působí třecí silou  $F_t = 20 \text{ N}$  u obvodu. Po jakou dobu  $t'$  musí teď Petr jet na kole rychlostí  $v$ , aby vykonal stejnou práci jako předtím za čas  $t$ ?

Před nehodou vykonával Petr práci  $W$ , kterou můžeme pomocou výkonu  $P$  vykonávaného za nějaký čas  $t$  spočítat ako

$$W = tP.$$

Tento výkon  $P$  zodpovedal pohybu rýchlostou  $v$ . Na to, aby si Petr udržal rovnakú rýchlost aj po nehode, musel šliapať viac, a teda aj vynaložiť viac energie na to, aby sa stále pohyboval rovnakou rýchlostou  $v$ . Rovnakú prácu  $W$  by teda vykonal za kratší čas  $t'$  pri väčšom výkone  $P'$ . Rovnosť energií môžeme zapísať ako

$$\begin{aligned} W &= W', \\ tP &= t'P'. \end{aligned}$$

Výkon  $P'$ , s ktorým Petr šliape po nehode, môžeme spočítat ako súčet pôvodného výkonu  $P$  s výkonom  $P_t$ , s ktorým kompenzuje stratu energie trením na pokazených brzdách

$$P' = P + P_t.$$

Keďže trecia sila pôsobí blízko obvodu kola, ktorého obvodová rýchlost je  $v$ , výkon  $P_t$  spočítame ako súčin tejto rýchlosti a trecej sily  $F_t$ , proti ktorej pôsobíme

$$P_t = F_t v.$$

Celkovo teda dostávame rovnicu

$$tP = t'(P + F_t v),$$

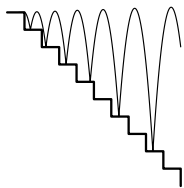
ktorej úpravou prídeme k výsledku

$$\begin{aligned} \frac{P}{P + F_t v} t &= t', \\ \frac{1}{1 + \frac{F_t v}{P}} t &= t'. \end{aligned}$$

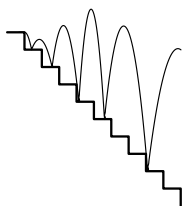
Po dosadení hodnôt do výsledku dostaneme  $t' = t/3$ . Petr teda s pokazenými brzdami vykoná rovnakú prácu za tretinový čas ako bez pokazených brzd.

## Úloha I.3 ... hopsa hejsa

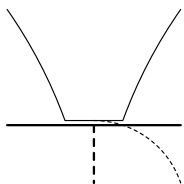
Mějme ideální hopík dokonalé odrazivosti a zanedbatelných rozměrů. Tento hopík hodíme z nekonečných schodů, kde jeden schod má výšku  $h$  a délku  $l$ . Odrazy probíhají beze tření. Popište závislost nejvyšší dosažené výšky (měřeno od prvního schodu) hopíku po  $n$ -tém odrazu na počátečních parametrech.



Obr. 1:  
Trajektorie  
našeho  
idealizovaného  
hopíku  
dosáhne při dopadu na schod (je jedno který) a kvůli dokonalé odrazivosti se se stejnou rychlostí vydá směrem nahoru. Nejvyššího bodu dosáhne v okamžiku kdy bude nulová složka rychlost ve svislém směru. Kvůli rovnici (1) pak musí být i hloubka nulová, a hopík tedy bude v úrovni prvního schodu. Protože toto bude platit i po  $n$ -tém odrazu, bude maximální výška po každém odrazu na úrovni prvního schodu.



Obr. 2:  
Trajektorie  
neidealizovaného  
hopíku



Obr. 3: Možnost,  
jak by přece jen  
mohla ovlivnit  
hrana schodu  
maximální  
výšku.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že hopík se na začátku pohybuje vodorovně na úrovni nejvyššího schodu. Hopík postupně, jak na něj působí gravitace, bude rovnoměrně zrychlovat směrem dolů, a jeho kinetická energie bude růst na úkor energie potenciální. Kvůli zákonu zachování energie musí platit

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1)$$

kde  $h$  je hloubka od horního schodu, ve které se hopík nachází, a  $v$  je rychlost směrem dolů (složku rychlosti ve vodorovném směru ignorujeme, neboť její příspěvek by se musel vyskytovat na obou stranách rovnice a odečetl by se). Nejvyšší rychlosti dosáhne při dopadu na schod (je jedno který) a kvůli dokonalé odrazivosti se se stejnou rychlostí vydá směrem nahoru. Nejvyššího bodu dosáhne v okamžiku kdy bude nulová složka rychlost ve svislém směru. Kvůli rovnici (1) pak musí být i hloubka nulová, a hopík tedy bude v úrovni prvního schodu. Protože toto bude platit i po  $n$ -tém odrazu, bude maximální výška po každém odrazu na úrovni prvního schodu.

Pokud bychom neučinili předpoklad o vodorovném vrhu, přibyl by v rovnici (1) na levé straně člen  $\frac{1}{2}mv_0^2$ , kde  $v_0$  je počáteční rychlost ve vertikálním směru. Maximální výšku získáme položením pravé strany rovnice rovnou 0 a vyřešením pro  $h$ . Maximální výška bude konstantní a rovna maximální výšce po prvním odrazu <sup>2</sup> Pokud by počátek pohybu nebyl v úrovni prvního schodu, stačilo by posunout referenční bod, od kterého počítáme hloubku, ve které se míček nachází.

Mohlo by se tedy zdát, že stačí říci, že kvůli zachování mechanické energie zůstane maximální výška konstantní, na úrovni prvního schodu, ale situace je trochu složitější. Pokud má hopík nenulovou rychlost směrem dopředu (což mít musí, protože jinak by nikam nedoskáká), existují způsoby, jak se může složka rychlosti směrem dolů přeměnit ve složku směrem dopředu a naopak. Pak by se samozřejmě maximální výška během každého odrazu nezachovávala, ale netriviálním způsobem by závisela na čase.

Nejjednodušší způsob, jak by toto mohlo nastat, je, že hopík treffi hranu schodu. Protože ale zanedbáváme rozměry tělesa, tak tato možnost nenastane. Druhá možnost je, že hopík při dopadu vlivem tření získá rotaci. Pak nejenže by se rychlost změnila kvůli tomu, že část energie by se ukryla v rotaci hopíku, navíc by se při dalších odrazech vlivem rotace nemusel rovnat úhel dopadu úhlu odrazu. Jak by trajektorie mohla vypadat je naznačeno na obrázku 2. To ale v našem případě

<sup>2</sup>Zajímavé je, že nezáleží, jestli je směr pohybu na začátku šikmo dolů, nebo šikmo nahoru, maximální výška bude vždy větší než u vodorovného pohybu.

nenastane, protože odrazy probíhají bez tření. Proto se kvůli zákonu zachování hybnosti v horizontálním směru musí úhel dopadu rovnat úhlu odrazu. Tady tedy můžeme dojít k závěru, že se maximální výška během jednotlivých odrazů nebude měnit a míček bude mít trajektorii podobnou té na obrázku 1.

Ale nakonec je třeba zmínit, že jsme našli jednu hypotetickou možnost (kterou jsme po řešitelích samozřejmě nepožadovali), během které by se maximální výška nezachovávala. Předpokládáme-li, že hopík se při dopadu zdeformuje, tato deformace mu zabere nějaký krátký čas, po který bude bez tření klouzat po podložce.

Průběh tohoto je nakreslen na obrázku 3, pomocí plné čáry. Pokud ovšem během tohoto klouzání doklouže na hranu schodu, na obrázku 3 v místě označeném tlustší přerušovanou čarou, bude pokračovat vodorovně, po čárkované trajektorii, protože se již nemá od čeho odrazit. Energie, která byla uložena v deformaci hopíku, se skryje do oscilující deformace hopíku.

## Úloha I.4 ... něco je tu nakřivo

*Pozorovatel se nachází na lodi na otevřeném moři ve výšce  $h$  nad hladinou. Je vzdálen  $d$  od vodorovného zábradlí a to v takové poloze, že dívá-li se kolmo na zábradlí, splývá dolní okraj zábradlí s horizontem. Podívá-li se ale na zábradlí ve vzdálenosti  $l$  na stranu od kolmice, vidí, že se obzor nachází o  $s \pm s_s$  pod dolním koncem zábradlí. Určete poloměr Země.*

V celé úloze budeme považovat Zemi za dokonalou kouli. Pro vyřešení úlohy je esenciální správné pochopení prostorové konfigurace a souvislostí jednotlivých parametrů systému. Začneme lokálním okolím pozorovatele jako na obrázku<sup>3</sup> 4.

Označme polohu pozorovatele P, patu kolmice od P k zábradlí A, bod na zábradlí ve vzdálenosti  $l$  označme B a konečně označme C' bod o  $s$  pod bodem B, tj. průsečík svislé roviny zábradlí, spojnic pozorovatele a bodů na obzoru a svislé roviny obsahující P a B. Rovněž zavedme označení úhlů  $\angle BPC'$  jako  $\varphi$  a  $\angle APB$  jako  $\beta$ . Ze situace je zřejmé, že

$$\varphi = \arctg \frac{s}{\sqrt{l^2 + d^2}} \approx \frac{s}{\sqrt{l^2 + d^2}}, \quad (2)$$

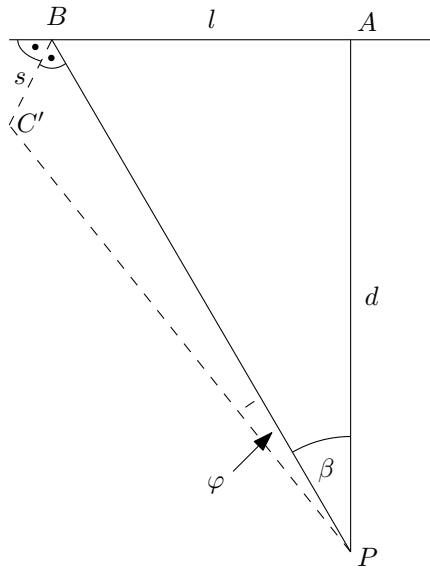
$$\cos \beta = \frac{d}{\sqrt{l^2 + d^2}}.$$

Ospravedlněním aproximace se budeme zabývat níže

Dále se zamyslíme, co je vlastně horizont který vidíme. Bod v linii pohledu na obzoru označme A'<sup>4</sup>, střed Země označme S,  $\psi$  označme úhel  $|\angle A'SP|$  poloměr

<sup>3</sup>V řešeném případě jsme uvažovali, že „o  $s$  níže“ je  $s$  měřené kolmo na přímkou pohledu. Tato formulace se dá též pochopit, že je  $s$  měřeno svisle, tj na spojnici se středem Země. Oba přístupy dávají nakonec po zanedbáních stejný výsledek.

<sup>4</sup>Bez újmy na obecnosti toto může být třeba bod na obzoru splývající se zábradlím.



Obr. 4: Situace v okolí pozorovatele. Čárkované elementy se nachází mimo rovinu pozorovatel – zábradlí (konkrétně pod ní).

Země  $R$ ,  $r$  poloměr kružnice-horizontu a  $H$  označme velikost výšky vrchlíku Země odděleným rovinou horizontu. Z geometrie systému a z Pythagorovy věty plyne

$$\begin{aligned} |A'P|^2 + R^2 &= (R + h)^2, \\ |A'P|^2 &= 2Rh + h^2, \\ |A'P| &\approx \sqrt{2Rh}, \end{aligned}$$

kde jsme zanedbali člen  $h^2$  vůči členu  $2Rh$ , protože je  $2R/h$ krát menší, což je řádově milionkrát. Tento archetyp budeme používat během celé této úlohy, jelikož  $h$  je vůči  $R$  velice malé. Pro tuto velikost je i hodnota  $\psi$ :

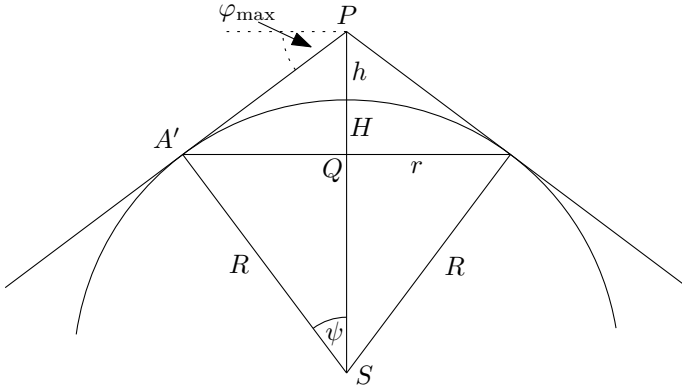
$$\psi = \arctg\left(\frac{|A'P|}{R}\right) = \sqrt{\frac{2h}{R}} \ll 1.$$

Jak je známo, pro  $\psi \ll 1$  platí

$$\text{tg } \psi \approx \sin \psi \approx \psi,$$

kde  $\psi$  je velikost onoho úhlu v radiánech. Toto také umožňuje aproximace  $\varphi$  jakožto malého úhlu v (2), jelikož hodnota  $\varphi$  nikdy nepřesáhne  $\psi$  (viz obr. 5).





Obr. 5: Řez Zemí znázorňující geometrický význam horizontu.

Pro poloměr kružnice-obzoru je tedy<sup>5</sup>

$$r \approx |A'P| \approx \sqrt{2Rh}. \quad (3)$$

Další rozměr, který se nám bude hodit, je  $H$ . Napišeme-li Pythagorovu větu pro trojúhelník  $A'QS$ ,

$$\begin{aligned} r^2 + (R - H)^2 &= R^2, \\ H^2 - 2RH + r^2 &= 0, \end{aligned}$$

dosazením (3) dostáváme

$$\begin{aligned} H^2 - 2RH + 2hR &= 0, \\ H &= \frac{1}{2}(2R \pm \sqrt{4R^2 - 8hR}), \\ H &= R \pm \sqrt{R^2 - 2hR}, \\ H &= R \left( 1 \pm \left( 1 - \frac{h}{R} \right) \right), \end{aligned}$$

kde<sup>6</sup> jsme použili binomickou aproximaci  $(1 + \frac{h}{R})^n \approx 1 + n\frac{h}{R}$ , jelikož  $h \ll R$ . Dostáváme tedy dvě řešení, jedno  $H = h$  a k němu komplementární  $H = 2R - h$ , budeme tedy uvažovat

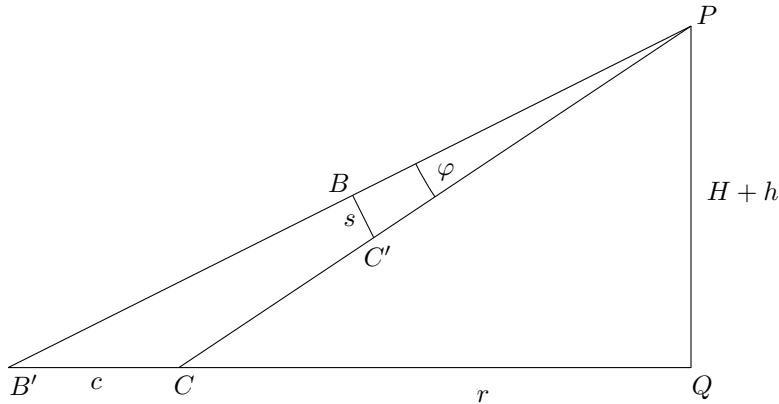
$$H \approx h. \quad (4)$$

Jak tohle souvisí s naším pozorováním? Na obrázku 6 je rovina  $PBC'$ , tj. rovina pozorovatele a měřené vzdálenosti obzoru od zábradlí v projekci do svislé roviny

<sup>5</sup>Obdobně platí pro délku příslušného oblouku – tedy vzdálenost obzoru po povrchu Země (nebo po moři).

<sup>6</sup>Všimněme si, že kvadratická rovnice pro  $H$  by neměla reálné řešení pro  $h > R/2$ . Toto je důsledkem dříve provedené aproximace, která předpokládala  $h \ll R$ , tento charakter rovnice je tedy přijatelný.

zábradlí. Chceme-li dát do vztahu  $\varphi$  s ostatními veličinami, můžeme jej například vyjádřit jako rozdíl úhlů  $\angle QCP$  a  $\angle QB'P$  (střídávý úhel), to jest



Obr. 6: Rovina obsahující  $s$ , tzn. rovina obsahující pozorovatele a svislici na zábradlí v bodě A.

$$\varphi = |\angle QCP| - |\angle QB'P| = \operatorname{arctg} \left( \frac{H+h}{r} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{H+h}{r+c} \right). \quad (5)$$

Podle (4) jsou čitatele argumentů zhruba  $2h$ , podle (3) jsou jmenovatele argumentů alespoň  $\sqrt{2hR}$ . Argumenty arkustangent jsou tedy velmi malé a je tedy možné použít aproximaci

$$\operatorname{arctg}(x) \approx x, \quad x \ll 1,$$

z (5) tedy dostaneme

$$\varphi \approx \frac{H+h}{r} - \frac{H+h}{r+c} = (H+h) \frac{c}{r(r+c)}. \quad (6)$$

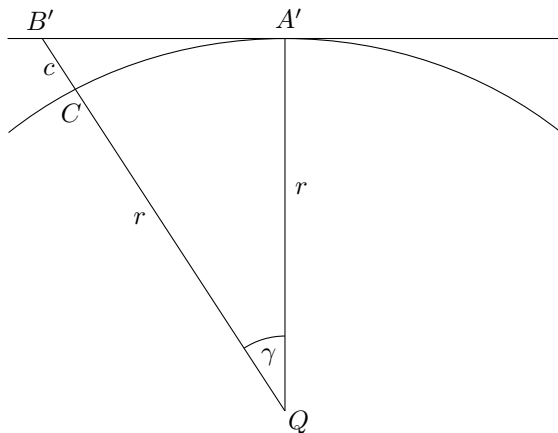
Tento vztah zatím v tomto tvaru ponecháme a zabýváme se velikostí  $c$ . Tak lze učinit podíváme-li se na řez rovinou horizontu jako na obr. 7. Vzhledem k pravoúhlosti trojúhelníku  $B'A'Q$  platí

$$\begin{aligned} (c+r) \cos \gamma &= r, \\ c &= r \left( \frac{1}{\cos \gamma} - 1 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Hodnota  $\gamma$  koresponduje s hodnotou  $\beta$ , jak se ukáže z obrázku 8 a následujících vztahů.

Napišme si kosinové věty pro trojúhelník  $A'PB'$ , resp.  $A'QB'$  pro úhly  $\beta$ , resp.  $\gamma$

$$\begin{aligned} |A'B'|^2 &= |A'P|^2 + |B'P|^2 - 2|A'P||B'P| \cos \beta, \\ |A'B'|^2 &= |A'Q|^2 + |B'Q|^2 - 2|A'Q||B'Q| \cos \gamma. \end{aligned}$$



Obr. 7: Rovina obsahující kružnici-obzor.

Vezmeme-li Pythagorovy věty pro trojúhelníky  $A'PQ$  a  $B'PQ$ , získáváme z rovnosti pravých stran kosinových rovnic

$$2(H+h)^2 + 2r(H+h) + 2(r+c)(H+h) - 2\sqrt{((H+h)^2 + r^2)((H+h)^2 + (r+c)^2)} \cos \beta = -2r(r+c) \cos \gamma,$$

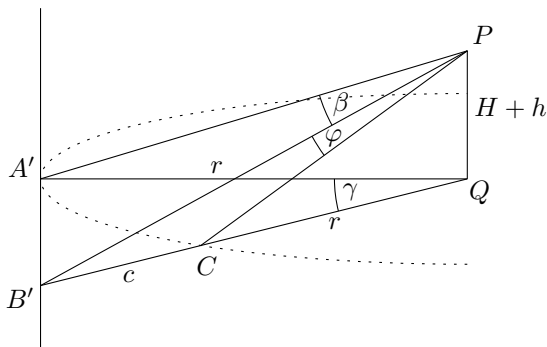
Do vztahu dosadíme (4), (3) a zanedbáme všechny členy typu  $h/R$  vůči členům typu 1 či  $1/\cos \xi^7$  dostáváme zhruba

$$\cos(\gamma) \approx \cos(\beta). \quad (8)$$

Nyní už stačí dát dohromady rovnosti (2), (3), (4), (6), (7) a (8) a dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi &\approx (H+h) \frac{c}{r(r+c)}, \\ r(r+c)\varphi &\approx 2hc, \\ r\varphi \frac{1}{\cos \beta} &\approx 2h \left( \frac{1}{\cos \beta} - 1 \right), \\ r &\approx 2h \cos \beta \left( \frac{1}{\cos \beta} - 1 \right) \frac{1}{\varphi}, \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Předpokládáme, že  $l$  není řádově větší než  $d$ . Poté lze výraz s  $\cos \xi$  považovat za řádově 1 a  $r+c$  řádově  $r$ . Navíc i v tom případě by aproximace byla na místě, jen by bylo třeba nahlédnout že výraz typu  $h/(r+c)$  je ještě menší než  $\sqrt{h/R}$ .


 Obr. 8: Abstrakce znázorňující souvislost  $\beta$  a  $\gamma$ .

$$\frac{2hd}{s} \left( \frac{\sqrt{l^2 + d^2}}{d} - 1 \right) \approx r \approx \sqrt{2hR},$$

$$R \approx \frac{2hd^2}{s^2} \left( \frac{l^2}{d^2} - \frac{2\sqrt{l^2 + d^2}}{d} + 2 \right),$$

což je odhad pro  $R$  v dost dobrém přiblížení. Podle Gaussova vzorce pro šíření chyb bude chyba určení poloměru Země  $s_R$

$$s_R \approx \frac{4s_s h d^2}{s^3} \left( \frac{l^2}{d^2} - \frac{2\sqrt{l^2 + d^2}}{d} + 2 \right).$$

Uskutečnit tento nápad v praxi je technicky náročné, jelikož je potřeba široký úhel pohledu na moře, alespoň částečně stabilní pozorovatelskou základnu (malé lodě se budou hodně, rychle a často houpat) a také je tím citlivější na přesnost měření, čím níže jste nad hladinou. Pokud bychom provedli měření na velké výletní lodi,<sup>8</sup> mohli bychom provést měření s parametry například  $h = 40$  m,  $d = 2$  m,  $l = 1,5$  m a  $(s \pm s_s) = (2,0 \pm 0,5)$  mm,<sup>9</sup> naše výsledky udávají poloměr země jako  $R = (5\,000 \pm 2\,500)$  km.

## Úloha 1.5 ... na procházce

Katka si vyšla ráno před přednáškou na procházku, aby vyvenčila svého potkana. Vyšla s ním na rovný palouk, a když byl potkan ve vzdálenosti  $x_1 = 50$  m od ní, hodila mu míček rychlostí  $v_0 = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pod úhlem  $\alpha_0$ . V okamžiku výhozu potkan vyběhl směrem ke Katce rychlostí  $v_1 = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Nalezněte obecnou závislost úhlu  $\varphi$  na čase, kde  $\varphi(t)$  označuje úhel mezi vodorovnou rovinou a spojnicí

<sup>8</sup>např. [https://en.wikipedia.org/wiki/MSC\\_Armonia](https://en.wikipedia.org/wiki/MSC_Armonia)

<sup>9</sup>Vzhledem k technické náročnosti by bylo velice komplikované dosáhnout vyšší přesnosti.

potkana a míčku, a vykreslete tuto závislost do grafu. Na základě grafu určete, zda je možné, aby míček zakryl potkanovi Slunce, jenž se nachází ve výšce  $\varphi_0 = 50^\circ$  přímo před potkanem. Počítejte s tíhovým zrychlením  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a pro zjednodušení uvažujte, že házíme z nulové výšky.

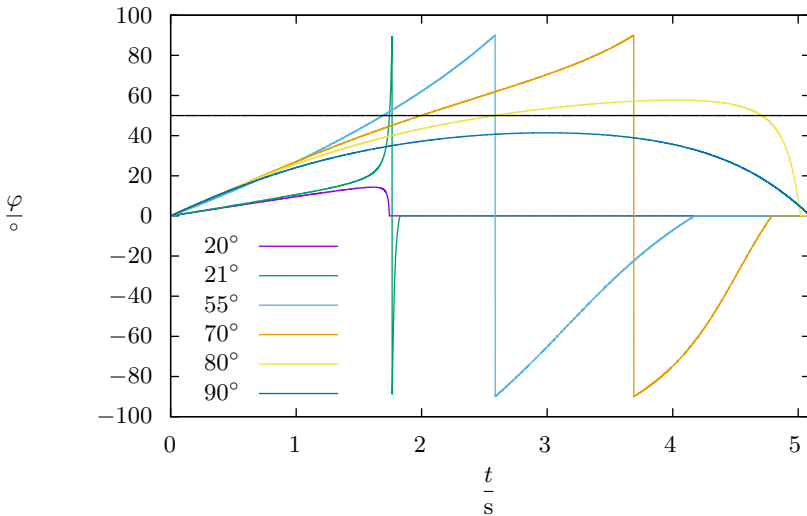
Popisujme situaci ze soustavy spojené s potkanem, zde se jedná o vyšetření šikmého vrhu. Označme  $x, y$  souřadnice míčku vzhledem k potkanovi. Poté dostáváme

$$x(t) = x_1 - (v_1 + v_0 \cos \alpha_0)t,$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Nyní jednoduše vyjádříme úhel  $\varphi$  z pravoúhlého trojúhelníku potkan – míček – průmět míčku na zem jako

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} = \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{1}{2}gt^2}{x_1 - (v_1 + v_0 \cos \alpha_0)t}.$$



Obr. 9: Vývoj úhlu  $\varphi$  v závislosti na čase pro několik hodnot parametru  $\alpha_0$ .

Z obr. 9 vidíme, že pro úhly zhruba od  $21^\circ$  do  $80^\circ$  je možné, aby míček zakryl potkanovi Slunce. „Je možné“ říkáme proto, že ještě bude záviset na velikosti míčku a jeho vzdálenosti od potkana, jestli dojde k úplnému nebo pouze částečnému „zatmění Slunce“.

Pokusme se však vyjádřit tyto hranice přesněji. Než začneme cokoli počítat, poznamenejme, že nás zajímají úhly pouze z intervalu  $\alpha_0 \in (0^\circ, 180^\circ)$ .

První nutná podmínka, která nás může napadnout, je, aby existoval čas  $t_0$ , kdy platí  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ . Protože funkce  $\operatorname{tg} \varphi$  je na intervalu  $(0^\circ, 180^\circ)$  prostá, můžeme ekvivalentně řešit rovnici

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y(t)}{x(t)}, \quad (9)$$

jejíž úpravou dostáváme kvadratickou rovnici

$$\frac{g}{2}t^2 - t[(v_1 + v_0 \cos \alpha_0) \operatorname{tg} \varphi_0 + v_0 \cos \alpha_0] + x_1 \operatorname{tg} \varphi_0 = 0. \quad (10)$$

Řešení takovéto rovnice existuje, pokud je její diskriminant větší nebo roven nule. Označme koeficient u lineárního členu jako  $b$ . Nerovnost

$$D = b^2 - 2gx_1 \operatorname{tg} \varphi_0 \geq 0$$

vyřešíme numericky, řešení pronikneme s intervalem  $(0^\circ, 180^\circ)$  a dostáváme novější, užší interval  $(0^\circ, 83^\circ)$ . V tomto intervalu existuje řešení rovnice (10), nicméně čas  $t_0$ , pro který je rovnice splněna nemusí být fyzikální, resp. může být záporný nebo vyšší než čas dopadu<sup>10</sup>. Proto je hledaný interval pro  $\alpha_0$  podintervalem  $(0^\circ, 83^\circ)$ .

Další jednoduchá podmínka, která nás napadne, tentokrát postačující, je, pokud potkan míček podběhne, než míček dopadne, pak je jisté, že bude existovat fyzikálně správný čas  $t_0$ . Jinak řečeno, tehdy bude moci míček zakrýt potkanovi slunce.

Míček dopadne v čase, kdy platí  $y(t) = 0$ . Řešením této rovnice dostáváme

$$t_{\text{imp}} = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Dále potkan mine míček v čase, kdy platí  $x(t) = 0$ . Čas, ve kterém tak nastane, vyjádříme jako

$$t_{\text{meet}} = \frac{x_1}{v_1 + v_0 \cos \alpha_0}.$$

Dostáváme tedy nerovnici

$$\frac{x_1}{v_1 + v_0 \cos \alpha_0} \leq \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g},$$

kteřou opět numericky vyřešíme. V intervalu  $(20^\circ, 78^\circ)$  tedy potkan míček podběhne.

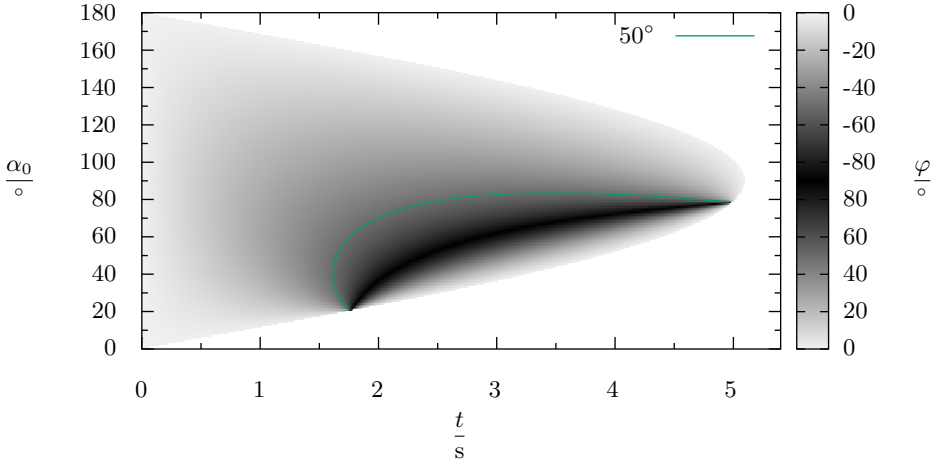
Nejjednodušší způsob, jak se vypořádat s intervaly  $(0^\circ, 20^\circ)$  a  $(78^\circ, 83^\circ)$  je projít je numericky. Nakonec se tedy vrátíme k první metodě obrázkové, kdy zjourníme skoky v úhlu  $\alpha_0$ , vyneseme si závislost  $\varphi(t)$  do grafu a zjistíme, jestli v nějakém čase platí  $\varphi = \varphi_0$ . Celkově získáváme interval<sup>11</sup>  $\alpha_0 \in (20^\circ, 83^\circ)$ , kdy míček může potkanovi zakrýt Slunce.

<sup>10</sup> V našem případě  $\alpha_0 \in (0^\circ, 83^\circ) \subset (0^\circ, 90^\circ)$  však reálné může nastat pouze druhý případ.

<sup>11</sup> Ve skutečnosti je dolní mez přesněji  $20,17^\circ$ , proto na obr. 9 vidíme správně, že pro rovných  $20,00^\circ$  míček nevystoupá dostatečně vysoko.

Obě numerická řešení jsme zvolili, protože analytický postup vede na rovnice 4. řádu. Mohli jsme se numericky vypořádat přímo s rovnicí (9), ale jistý význam přikládáme i rozboru postačujících a nutných podmínek.

Přímé numerické řešení rovnice (9) v zásadě odpovídá vytvoření grafu 10, ze kterého můžeme rovnou číst výsledný interval úhlů  $\alpha_0$ . Pro zvolené  $\alpha_0$  představuje odpovídající vodorovná čára závislost  $\varphi(t)$  až do času dopadu míčku na zem. Naším úkolem je tedy najít obor hodnot  $\alpha_0$  isočáry pro  $\varphi = 50^\circ$ .



Obr. 10: Závislost výšky Slunce na čase a úhlu  $\alpha_0$ .

## Úloha I.P . . . nebe nám padá na hlavu

*Už jste se někdy zamysleli nad tím, proč mraky nespadnou na zem, když jsou z vody, která má přece výrazně větší hustotu než vzduch? Dešťové kapky dopadnou na zem v řádech minut, tak proč ne i mraky? Zkuste tuto skutečnost fyzikálně objasnit. Veškerá svá tvrzení podložte výpočtem.*

Chrabří Galové se nebáli nikoho o ničem, snad jen toho, že by jim nebe mohlo spadnout na hlavu. Ukážeme si, že ač třeba nejsme tak stateční jako galští válečníci, rozhodně se nemusíme bát toho, že by nás nebe neboli obloha zamačklo do země. Pojem obloha není úplně jednoznačný, budeme ho proto používat z pohledu meteorologie jako označení pro troposféru, tedy dolní vrstvu atmosféry, ve které se „odehrává počasí“. Zde musíme přiznat, že atmosféra nás do země sice zamačkává poměrně velkým tlakem (jehož velikosti se ze zřejmých důvodů říká 1 atmosféra), ale na tento tlak je lidské tělo zvyklé a nepocituje ho jako zátěž. Co by tedy na nás

z oblohy mohlo spadnout? První věc, která nás na nebi kromě Slunce upoutá, jsou mraky. A těmi se budeme nadále zabývat.

Jak zadání připomíná, mraky jsou tvořeny primárně vodou. Když se podíváme do tabulek, tak zjistíme, že hustota vody je za běžných atmosférických podmínek zhruba tisíckrát vyšší než hustota vzduchu. Když si nalijeme do rukou vodu a hodíme ji do vzduchu, tak spadne k zemi velmi rychle. Stejně tak však ze zkušenosti víme, že padání mraků nepozorujeme. Podívejme se proto, co přesně mraky jsou a jak vznikají.

Když za chladného počasí vydechnete, vytlačíte tak ze svých plic horký, vlhký vzduch do prostředí s nižší teplotou, která je pro vydechnutý vzduch pod tzv. rosným bodem. Za takových podmínek nastane kondenzace<sup>12</sup> vodních par a vy před svými ústy pozorujete nabělalý obláček. A přesně tak vznikají i velká oblaka na obloze – vlhký vzduch se z rozehráté země dostává do vyšších vrstev atmosféry s nižší teplotou a kondenzovanou páru vnímáme jako bílé mraky. Oblaka se mohou nalézat v různé výšce, dokonce i mlha není ve své podstatě nic jiného než oblak, který je velmi nízko. Dolní hranici velikost kulovitých kapiček, z nichž se mrak skládá, lze na základě Mieova rozptylu<sup>13</sup> odhadnout na zhruba na  $1\ \mu\text{m}$ , běžné rozměry<sup>14</sup> se pohybují mezi 10 až  $20\ \mu\text{m}$ .

Jak Galileo experimentálně ověřil, zrychlení objektů při pádu nezávisí na jejich hmotnosti, kapička vody by tedy měla z výšky řekněme 10 km dopadnout na zem při konstantním zrychlení  $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  za necelou minutu. Opět ale ze zkušenosti víme, že malé částičky z relativně hustého materiálu, například prach, padají k zemi poměrně pomalu (spíš se tak vznášejí). Příčinou pomalého pádu je odpor prostředí.<sup>15</sup> Ačkoli je vzduch velmi řídký, dokáže v závislosti na rozměrech objektu a jeho rychlosti působit nezanedbatelnými odporovými silami. V zásadě nám stačí vědět pouze to, že odpor vzduchu je závislý na horizontálním průřezu objektu a na jeho hmotnosti nikoli. Potom už si stačí jenom uvědomit, že když zmenšujeme poloměr homogenní kuličky, tak její hmotnost klesá rychleji než obsah jejího povrchu. Z toho již plyne, že čím bude kulička menší, tím větší bude mít odpor vzduchu vliv v porovnání s tíhovou silou a kulička proto bude zrychlovat pomaleji.

Chceme-li být přesnější, pak musíme vědět, že na kuličku při začátku jejího pohybu začne působit Stokesova odporová síla daná vztahem (skalárně)

$$F_o = 6\pi r\eta v,$$

kde  $r$  je poloměr kuličky,  $\eta$  dynamická viskozita vzduchu a  $v$  rychlost kuličky. Pro jednoduchost budeme počítat se zaokrouhlenou hodnotou dynamické visko-

<sup>12</sup>Z molekulárního hlediska znamená kondenzace vznik vodíkových můsteků mezi molekulami vody, přičemž energie tepelného pohybu molekul je natolik nízká, aby nedocházelo k okamžitému zpřetrhávání těchto vazeb.

<sup>13</sup>Rozptyl elektromagnetického vlnění na dokonalejších sférách. Pro objekty větší než vlnová délka slábně závislost na konkrétní vlnové délce, a protože mraky jsou bílé, musí být částice v nich větší než 350 až 750 nm (rozsah vlnových délek viditelného světla).

<sup>14</sup>Velmi přesné měření rozměrů částic v oblacích (konkrétně v cirrech, vysoká oblačnost) za pomoci lidarů je popsáno například zde: <http://www.atmos-chem-phys.net/7/3507/2007/acp-7-3507-2007.pdf>.

<sup>15</sup>Tento poznatek nám mimo jiné říká, že kdybychom byli v prostředí bez atmosféry, tj. kdybychom vytvořili mrak například na Měsíci, tak by spadl dost rychle.



zity suchého vzduchu<sup>16</sup>  $\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , hustotu vody  $\rho$  zaokrouhlíme na  $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Bude-li mít kulička rozměr  $r = 10^{-5} \text{ m}$ , dojde k vyrovnání odporové síly  $F_o$  a tíhové síly  $F_g = mg$  při rychlosti<sup>17</sup>

$$v = \frac{mg}{6\pi r\eta} = \frac{2r^2 g \rho}{9\eta} \doteq 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Touto rychlostí by kapka dopadla na zem z výšky 10 km za čas

$$t = \frac{10 \text{ km}}{10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 10^6 \text{ s} \doteq 10 \text{ dní}.$$

Pokud by se jednalo o ještě menší kapky s rozměrem  $r = 1 \mu\text{m}$ , padaly by na zem stokrát déle, tedy zhruba 3 roky.

Jak jste si ale jistě během svých let na tomto světě všimli, mraky stále na zem nespadly. Může za to opět vzduch – tentokrát ne čistě jeho přítomnost, ale jeho pohyb. Celá atmosféra je neustále v pohybu, a to jak v horizontálním, tak vertikálním. Především konvekce vzduchu (stoupání teplejších oblastí) zajišťuje, že mraky vznikající výparem vody z povrchu země vystoupají do velkých výšek, kde postupně chladnou (adiabatické rozpínání) a jsou vytlačovány novými mraky s vyšší teplotou. Celá atmosféra je rozdělena do tzv. buněk, ve kterých vzduch, a tedy i mraky, cirkulují. Podrobnější informace naleznete například pod heslem „globální cirkulace atmosféry“. Pro nás je důležité, že rychlost tohoto pohybu se pohybuje v řádu jednotek až desítek<sup>18</sup>  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ , což je s rychlostí volného pádu vodních částíček zcela nesrovnatelné.

Přece jen však nastává chvíle, kdy mrak v určitém smyslu spadne. Když se oblak stále více ochlazuje, tak se mikroskopické kapičky častěji srážejí (je jich více v dané prostorové oblasti) a spojují ve větší útvary, vzestupné proudy vzduchu je proto nedokáží tlačit vzhůru tak snadno jako jemnější částičky a mrak klesá. Větší kapičky ve velkém množství hůře propouštějí světlo a mraky se jeví jako šedé. Dosáhne-li poloměr kapek kritické velikosti, začnou se vzrůstající rychlostí nabírat stále více vlhkosti z okolí, dále rostou a nakonec rychlostí kolem  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dopadnou na zem,<sup>19</sup> prší. V mracích se však nevyskytují pouze částičky vody, ale také částičky ledu, neboť teplota v horní atmosféře je hluboko pod bodem mrazu. V takovém případě pak padají kroupy, které jsou buďto malé a ještě před dopadem roztají,<sup>20</sup> nebo v mracích se silnými turbulencemi vydrží tak dlouho, dokud nenabudou

<sup>16</sup>Obecně bychom se museli potýkat se závislostí na tlaku, teplotě a vlhkosti.

<sup>17</sup>Vypočtená velikost rychlosti nám také zaručuje, že jsme správně zvolili Stokesův vzorec, neboť s rostoucí rychlostí by se začala měnit závislost odporové síly na rychlosti samotné. Neuvažujeme zde, že se kapka pohybuje ze začátku zrychleně, neboť je to na časových škálách, se kterými pracujeme, zanedbatelné.

<sup>18</sup>[https://www4.uwsp.edu/geo/faculty/lemke/geog101/lectures/05\\_pressure\\_wind.html](https://www4.uwsp.edu/geo/faculty/lemke/geog101/lectures/05_pressure_wind.html)

<sup>19</sup><http://hypertextbook.com/facts/2007/EvanKaplan.shtml>

<sup>20</sup>Občas i kapky vody nedopadnou na zem – vidíme tedy nad sebou dešť, ale nedopadá. Tento jev se nazývá *virga*. Dochází k němu vlastně neustále v těsné blízkosti mraků, neboť kapky, které jsou příliš malé, se odpaří velmi rychle a vracejí se okamžitě zpátky do mraku. Proto často mraky vypadají před deštěm a během něj tak „rozčuchané“.

velkých rozměrů a padají pak na zem ve formě ledových koulí, někdy s opravdu velkým průměrem.<sup>21</sup>

K závěru ještě připomeňme, že dokud se nezačnou v mraku formovat kapičky a jedná se tedy o směs vody a vzduchu v plynném stavu (vlhký vzduch), má tato směs menší hustotu než suchý vzduch. Vzduch se totiž skládá převážně z molekul dusíku a kyslíku, které mají větší hmotnost než molekula vody. To jen dále podporuje stoupání vlhkého vzduchu do horních vrstev atmosféry. Dojde-li však ke kondenzaci, vznikne aerosol a na něj již nelze aplikovat tvrzení platící pro plynné látky.

Suma sumárum tedy můžeme říct, že mraky na zem nepadnou díky zemské atmosféře a vůbec kvůli její přítomnosti vlastně existují. Nelze však vyloučit, že na nás z mraků občas spadne nějaký ten hydrometeor.

## Úloha II.1 . . . rande na pláži

*Představte si, že vezmete svou přítelkyni/svého přítele na večerní rande na pláž a sledujete západ Slunce nad vzdálenou hladinou moře. Protože chcete prodloužit romantickou chvíli, vezmete si s sebou vysokozdvížený vozík, který se, jakmile Slunce začne zapadat za obzor, začne rovnoměrným pohybem zvedat vzhůru, abyste stále viděli Slunce dotýkající se horizontu. Jakou rychlostí se musí vozík pohybovat?*

Aproximujeme si Zemi kružnicí a Slunce vnějším bodem  $S$  této kružnice, pozorovatel budiž bod  $P$ , který na začátku leží na kružnici a který se pohybuje po radiále. Z bodu  $S$  vedou dvě tečny ke kružnici, budeme uvažovat jen jednu z nich (druhá symbolizuje východ Slunce). Pozorovatel vidí zapadající Slunce, právě když tečna prochází bodem  $P$ . Tedy na začátku se musí tečna dotýkat kružnice v bodě  $P$ . Slunce se pohybuje úhlovou rychlostí  $\omega = 2\pi \sin \alpha / T$ , bod dotyku se bude po obvodu Země pohybovat stejnou rychlostí. Přitom  $T$  zde značí délku dne a  $\alpha$  je úhel, pod kterým Slunce zapadá (jeho velikost závisí na naší zeměpisné poloze). Označme si střed Země jako  $Z$  a bod dotyku „posledního paprsku“ jako  $T$ . Potom je trojúhelník  $ZTP$  pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $T$ . Úhel u vrcholu  $Z$  se s časem mění v závislosti na poloze bodu  $T$ , tedy v čase  $t$  je jeho velikost rovna  $\varphi = \omega t = 2\pi t \sin \alpha / T$ . V závislosti na něm se mění i přepona trojúhelníku, jejíž délku chceme vědět. Poloměr Země označme  $r$ , tedy délka přepony trojúhelníku  $ZTP$  bude

$$\frac{r}{\cos \varphi} = \frac{r}{\cos \frac{2\pi t \sin \alpha}{T}}.$$

Když odečteme poloměr Země, získáme aktuální pozici pozorovatele nad zemským povrchem

$$h(t) = r \left( \frac{1}{\cos \frac{2\pi t \sin \alpha}{T}} - 1 \right).$$

<sup>21</sup>Kroupy obvykle vznikají v bouřkových mracích, kde vzestupné proudy mohou mít rychlost až přes  $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , <https://en.wikipedia.org/wiki/Hail>. Za mírnějších podmínek vznikají sněhové vločky.

Průměrnou rychlost od začátku pohybu vozíku v čase  $t$  zjistíme vydělením výšky časem. Tedy

$$v_p(t) = \frac{r}{t} \left( \frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right).$$

Pokud chceme časovou závislost vyjádřit přesně, nezbývá než derivovat. Tedy okamžitá rychlost zvedáku po dosažení v čase  $t$  je

$$v(t) = \frac{d}{dt} r \left( \frac{1}{\cos \frac{2\pi t \sin \alpha}{T}} - 1 \right) = r \left( \frac{\sin \left( \frac{2\pi t \sin \alpha}{T} \right)}{\cos^2 \left( \frac{2\pi t \sin \alpha}{T} \right)} \frac{2\pi \sin \alpha}{T} \right).$$

Nyní dosadíme např. hodnotu  $\alpha \approx 50^\circ$  odpovídající italské pláži, délka dne je  $T = 86\,400$  s. Maximální výšku vozíku odhadneme na  $h = 2$  m; z rovnice pro  $h(t)$  potom dokážeme získat maximální čas pozorování západu  $t_{\max} \doteq 14$  s. V tomto čase se bude vozík pohybovat rychlostí  $v(t) \doteq 0,28$  m·s<sup>-1</sup>.

Vzhledem k tomu, že  $2\pi t_{\max} \ll T$ , můžeme zavést následující aproximace,

$$\begin{aligned} \sin \left( \frac{2\pi t \sin \alpha}{T} \right) &\approx \frac{2\pi t \sin \alpha}{T}, \\ \cos \left( \frac{2\pi t \sin \alpha}{T} \right) &\approx 1. \end{aligned}$$

Poté dostáváme závislost rychlosti vozíku na čase ve tvaru

$$v(t) = rt \left( \frac{2\pi \sin \alpha}{T} \right)^2,$$

který je mnohem jednodušší a stále velmi přesný. Zjistili jsme, že vozík se bude pohybovat přibližně rovnoměrně zrychleně se zrychlením  $a = r \left( \frac{2\pi \sin \alpha}{T} \right)^2 \doteq 0,02$  m·s<sup>-2</sup>.

## Úloha II.2 ... hypervysokoteplotní supravodivost

Velké části látek, obvykle kovům, roste s vyšší teplotou odpor. Jsou ovšem látky, jako například grafit či polovodiče, kterým odpor s rostoucí teplotou klesá. Také jste již pravděpodobně slyšeli o supravodivosti, což je jev, který obvykle nastává za velmi nízkých teplot a jedná se o stav, ve kterém látka nevykazuje žádný elektrický odpor a dokonale vede elektrický proud. V současné době jsou nejvyšší teploty, ze kterých byla supravodivost pozorována, hluboko pod pokojovou teplotou. Co kdybychom ale uvažovali, že se odpor mění dle vzorečku  $R = R_0 (1 + \alpha \Delta t)$ , kde  $R_0$  je odpor vodiče pro 20 °C,  $\alpha$  je teplotní součinitel elektrického odporu a  $\Delta t$  teplotní rozdíl vůči původní teplotě 20 °C? Tak při hodnotách součinitelů pro grafit  $\alpha_C = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  a křemík  $\alpha_{Si} = -75 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  dostáváme nulový odpor pro vysoké teploty. Pro jaké? A jak to, že to ve skutečnosti nefunguje a jak uhlík, tak křemík nejsou za vysokých teplot supravodivé?

Výpočet je velice jednoduchý. Stačí si uvědomit, že potřebujeme, aby závorka byla nulová, tedy

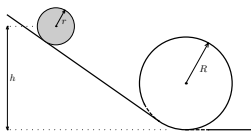
$$0 = 1 + \alpha \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = -\frac{1}{\alpha}.$$

Po dosažení vyjde  $\Delta t_C \doteq 2000\text{ }^\circ\text{C}$  a  $\Delta t_{Si} \doteq 13\text{ }^\circ\text{C}$ . Tedy u křemíku by měla nastávat supravodivost již při  $33\text{ }^\circ\text{C}$  a pro vyšší teploty by podle tohoto vzorečku měl být odpor dokonce záporný. Nicméně tak to nefunguje.

Obecným důvodem, proč toto nefunguje, je, že teplotní součinitel elektrického odporu závisí na teplotě. Tato závislost je silná zejména právě u polovodičů, jejichž příkladem je právě křemík. U polovodičů můžeme teplotní závislost odporu na teplotě popsat zhruba jako nepřímou úměrnost. Proč zhruba? Protože výrazně silnější vliv na celkový odpor polovodiče má při pokojové teplotě to, že se zvyšuje s rostoucí teplotou počet párů elektron-díra, ale pořád je zde přítomen i mechanismus, kterým se zvyšuje odpor i u vodičů (srážky vodivostních elektronů s atomy krystalové mřížky). Ten je ale výrazně slabší. Ale i kdyby najednou vymizel „odpor polovodiče“, stále našemu vzorku zůstane „odpor vodiče“ a proto nebude odpor nulový.

Pokud by někoho zajímala v současnosti nejvyšší teplota, při které lze dosáhnout reálné supravodivosti, tak zatím jde o teplotu  $-135\text{ }^\circ\text{C}$  dle FzÚ AV ČR<sup>22</sup>.

### Úloha II.3 ... looping



Mějme nakloněnou rovinu pod úhlem  $\alpha$ , na kterou hladce navazuje kruhová smyčka o poloměru  $R$ . Do jaké minimální výšky  $h$  musíme na nakloněnou rovinu položit kouli o poloměru  $r$  (srovnatelném s  $R$ ), aby smyčkou projela tak, že s ní bude po celou dobu v kontaktu?

Předpokládejte, že koule neprokluzuje.

Tato úloha je podobná úloze, kdy uvažujeme jen hmotný bod, budeme tedy požadovat, aby výsledek měl tvar po dosažení  $r = 0$  shodný s řešením pro hmotný bod. Když hmotný bod nahradíme tuhou koulí, objeví se dvě odlišnosti: odstředivá síla působící na kuličku ve smyčce je nižší, protože těžiště koule se pohybuje po kružnici o poloměru  $r' = R - r$ , a do kinetické energie tělesa o hmotnosti  $m$  je potřeba připočítat rotační energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Ke zjištění minimální výšky vypuštění je třeba splnit podmínku vyrovnání tíhové a odstředivé síly v nejvyšším bodě smyčky

$$m \frac{v^2}{(R - r)} = mg,$$

po jejím splnění koule bezproblémově projede i zbytek smyčky, protože v nejvyšším bodě je kolmý průmět tíhové síly největší a rychlost koule nejmenší. Dalším potřebným vztahem je ZZME (zákon zachování mechanické energie), kde rozdíl potenciální energie kuličky mezi počáteční polohou a nejvyšší polohou ve smyčce odpovídá celkové kinetické energii kuličky v kritickém bodě.

<sup>22</sup><http://www.fzu.cz/popularizace/supravodivost-a-levitace>

Zamysleme se, zda do úlohy nevnese zesložiténi skutečnost, že se kulička pohybuje po zakřiveném podkladu. Nejdříve se v podmínce udržení se v nejvyšší bodě smyčky uvažuje rychlost  $v$  pohybu těžiště koule okolo středu smyčky a poté v členu rotační kinetické energie představuje  $\omega$  rychlost otáčení koule okolo její osy otáčení. Při pohybu po rovině platí jednoduše  $\omega = v/r$ . Jak ukážeme, že toto platí i při pohybu ve smyčce? Úhel otočení koule kolem své rotační osy  $\varphi$  lze pomocí úhlu natočení kolem středu smyčky  $\vartheta$  vyjádřit jako

$$\varphi = \frac{R}{r}\vartheta - \vartheta = \frac{R-r}{r}\vartheta.$$

Pokud by se koule otáčela po rovině, tak by nebylo potřeba  $\vartheta$  odečíst. Je to korekce, kterou si lze představit nakloněním roviny o daný úhel  $\vartheta$ . Takto můžeme uvažovat i při studování smyčky, protože jako nakloněnou rovinu lze reprezentovat tečnu ke smyčce v libovolném daném bodě. Úhlová rychlost rotace kuličky je definována jako časová derivace úhlu natočení  $\varphi$ , tedy

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{R-r}{r}\omega_s.$$

kde jsme použili označení

$$\frac{d\vartheta}{dt} \equiv \omega_s$$

pro úhlovou rychlost pohybu kuličky okolo osy smyčky. Těžiště se pohybuje rychlostí  $v$  a je vzdáleno  $R-r$  od osy, proto

$$\omega_s = \frac{v}{R-r}.$$

Dosazením do vyjádření  $\omega$  dostaneme

$$\omega = \frac{R-r}{r} \frac{v}{R-r} = \frac{v}{r}$$

tedy stejný vztah jako pro pohyb po rovině. Zákon zachování energie a rovnost sil proto vskutku můžeme použít v podobě uvedené výše.

Nyní již k samotnému řešení. Z rovnosti sil v horní úvratí vyjádříme kvadrát rychlosti

$$v^2 = g(R-r)$$

a do ZZME dosadíme moment setrvačnosti koule  $J = 2mr^2/5$  a  $\omega = v/r$ , čímž dostaneme

$$mg(h - 2R + r) = \frac{7}{10}mv^2,$$

kde na levé straně je pokles potenciální energie mezi počátkem a horní úvratí. Dosazením za rychlost získáme finální rovnici

$$h - 2R + r = \frac{7}{10}(R-r).$$

Hledaná výška  $h$  je tedy

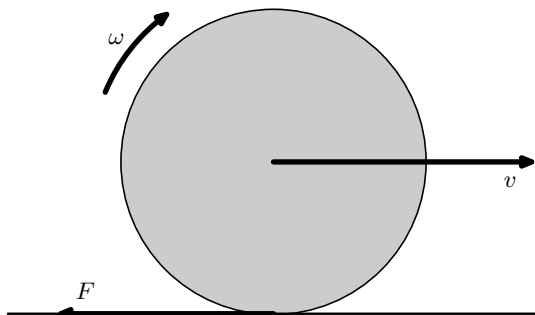
$$h = \frac{1}{10} (27R - 17r) .$$

Nyní si ještě můžeme rozmyslet, že čím menší koule bude, tím výše ji musíme na počátku umístit, neboť i ve smyčce se její těžiště dostane výše. Pokud kouli nahradíme hmotným bodem, tak v energetické bilanci zmizí rotační část a dostaneme  $h = (5/2)R$ , což bude odpovídat případu s koulí pro  $r = (2/17)R$ .

## Úloha II.4 ... kulička

Představte si pohyb homogenní kuličky, který nejprve začíná pouze posunem (bez jakéhokoliv pohybu valením) a postupně přejde do naopak naprostého valení (bez prokluzování). Za jaký čas toto nastane? Kulička může mít různý poloměr, hmotnost, počáteční rychlost a třecí koeficient.

Kulička o poloměru  $R$  a hmotnosti  $m$  se na začátku pohybuje s nenulovou



Obr. 11: Znárodnění směrů rychlostí a sil.

počáteční rychlostí  $v_0$  a s úhlovou rychlostí  $\omega_0 = 0$ . Protože neplatí  $v_0 = R\omega_0$ , kulička prokluzuje. Velikost třecí síly, působící proti směru rychlosti kuličky, je  $F = mgf$ , kde  $f$  je součinitel smykového tření mezi kuličkou a podložkou. Dokud bude kulička prokluzovat, bude na ni působit konstantní třecí síla  $F$ . Pohybové rovnice kuličky tedy jsou

$$\begin{aligned} ma &= -F , \\ J\varepsilon &= FR , \\ F &= mgf , \end{aligned}$$

kde  $a$  je zrychlení kuličky,  $\varepsilon$  úhlové zrychlení kuličky a  $J$  moment setrvačnosti kuličky. Pro homogenní kouli platí

$$J = \frac{2}{5}mR^2 .$$

Z těchto rovnic si vyjádříme zrychlení jako

$$a = -gf,$$

$$\varepsilon = \frac{5gf}{2R}.$$

Po zintegrování zrychlení podle času (resp. z rovnic rovnoměrně zrychleného pohybu) dostáváme rychlosti ve tvaru

$$v = v_0 - gft,$$

$$\omega = \frac{5gf}{2R}t.$$

Kulička přestane prokluzovat v okamžiku, kdy platí  $v = R\omega$ . Po dosazení za rychlosti  $v$ ,  $\omega$  a můžeme vyjádřit čas, kdy k tomu dojde. Dostáváme

$$t = \frac{2v_0}{7gf}.$$

Vidíme, že doba prokluzování nezávisí ani na hmotnosti, ani na poloměru kuličky, ale pouze na počáteční rychlosti a tření. V okamžiku, kdy kulička přestane prokluzovat, se její rychlost ustálí na hodnotě  $v = 5/7 v_0$ , pokud zanedbáme valivý odpor a odpor vzduchu.

## Úloha II.5 . . . várnice potřetí

*Uvažujte klasickou várnici s kohoutkem dole a se vzduchotěsným víkem nahoře. Kolik čaje je možné si nalít, než budeme muset otevřít ventil, který vyrovná tlak vzduchu nad čajem s okolním tlakem?*

Várnici na čaj můžeme aproximovat válcem, který má kohout na odpouštění čaje ve výšce  $h_0$  nad svou dolní podstavou. Průřez kohoutu budeme považovat pro naše potřeby za zanedbatelně malý vůči výšce várnice a nebudeme uvažovat povrchové napětí v kohoutu. Pokud by vás zajímalo, jakou výšku vody by udrželo povrchové napětí, pak se můžete podívat na úlohu XXVIII.IV.E. Nicméně pokud nás zajímá, kolik čaje vyteče, a tedy pouze rozdíl stavu, kdy vyrovnáme tlaky a kdy pak odпустíme co nejvíce kapaliny, tak výška vody, kterou bude „držet“ povrchové napětí, je konstantní, a tedy rozdíl bude stejný. Dále neuvažujeme ani délku kohoutu a dynamický pokles tlaku při průtoku potrubím, protože nás zajímá pouze statický stav.

Užitečnou výšku válce nad kohoutem nazveme  $H$  a výšku vody nad kohoutem  $h$  pro původní stav před začátkem vypouštění. Vzduch tedy bude zabírat výšku  $H - h$ . Podstavy válce mají plochu  $S = \pi r^2$ , kde  $r$  je poloměr válce. Výšku, o kterou hladina čaje poklesne, nazveme  $\Delta h$ .

Plyn ve várnici budeme považovat za ideální plyn, protože nás nebudou zajímat vysoké tlaky (maximálně  $p_a$ ).

Nyní již k samotnému průběhu děje. Nejdřív si připustíme vzduch při zavřeném kohoutu. Tlak ve vzduchu nad hladinou a těsně na hladině označíme  $p_{1A}$  a je roven

atmosférickému tlaku  $p_a = 10^5$  Pa. Tlak ve výšce kohoutu pak bude  $p_{1B} = p_a + \rho h g$ , kde  $\rho \approx 10^3$  kg·m<sup>-3</sup> je hustota čaje a tíhové zrychlení  $g = 9,81$  kg·m<sup>-2</sup>.

Konečný stav pak bude takový, při němž se tlak u kohoutu vyrovná s atmosférickým tlakem, tedy  $p_{2B} = p_a$  a v tom případě bude tlak na čajové hladině  $p_{2A} = p_a - \rho(h - \Delta h)g$ . Tento tlak bude i v plynu nad hladinou. V plynu v průběhu vypouštění dojde k nějakému polytropickému ději, pro který platí

$$p_{1A} V_1^\alpha = p_{2A} V_2^\alpha \quad \Rightarrow \quad p_{1A} ((H - h) S)^\alpha = p_{2A} ((H - h + \Delta h) S)^\alpha, \\ p_a (H - h)^\alpha = (p_a - \rho(h - \Delta h)g) (H - h + \Delta h)^\alpha,$$

kde  $\alpha \in \langle 1, \kappa \rangle$  je koeficient polytropického děje, kde dolní mez odpovídá izotermickému ději ( $\alpha = 1$ ) a horní mez adiabatickému ( $\alpha = \kappa$ , kde  $\kappa = 1,4$  pro dvouatomový plyn). Reálně by tedy maximální objem, který dokážeme odlít z várnice, závisel na rychlosti nalévání. Pokud by se nám dařilo lít čaj velice rychle, pak bychom se blížili adiabatickému ději a pokud pomalu, pak izotermickému ději. Vzhledem k tomu, že se snažíme odlít co nejvíce, pak bude rozumné uvažovat zhruba izotermický děj  $\alpha \approx 1$ . Navíc bude hledaná proměnná  $\Delta h$  z rovnice snadno vyjádřitelná formou kvadratické rovnice

$$p_a (H - h) = (p_a - \rho(h - \Delta h)g) (H - h + \Delta h), \\ (\Delta h)^2 + \left( \frac{p_a}{\rho g} - 2h + H \right) \Delta h - h(H - h) = 0, \\ \Delta h = h - \frac{\frac{p_a}{\rho g} + H}{2} + \sqrt{\left( \frac{\frac{p_a}{\rho g} + H}{2} \right)^2 - \frac{p_a}{\rho g} h}.$$

Vybrali jsme kladné řešení, protože jenom to odpovídá zadání naší úlohy. Cílem je zjistit, kolik čaje vyteče. Pro to nám stačí vynásobit změnu výšky kapaliny v nádobě jejím průřezem. Tedy

$$\Delta V = S \Delta h.$$

Jaký bude výsledek pro nějaké konkrétní parametry? Várnice může mít například poloměr  $r = 20$  cm a efektivní výšku  $H = 60$  cm. Můžeme se zajímat třeba o situaci, kdy jsou již 2/3 efektivní výšky vypuštěné, tedy  $h = 20$  cm. V tomto konkrétním případě bychom tedy odpustili  $\Delta h \doteq 7,7$  mm, což odpovídá objemu  $\Delta V \doteq 1,0$  dl. Takže bychom si napustili jeden hrnek, tak bychom museli připustit vzduch ještě alespoň jednou či dvakrát. Maxima toho, kolik můžeme najednou vypustit, dosáhneme pro  $h = H/2$ , což lze zjistit z hledání extrému  $\Delta h(h)$ . V tomto případě by hledaný objem byl  $\Delta h_{\max} \doteq 1,1$  dl. Nejméně pak vyteče pro zcela plnou či zcela prázdnou nádobu.

Ještě bychom měli diskutovat, jak moc se náš výsledek, který jsme získali v rámci jistých zanedbání, bude lišit od reality. Jednak jsme už zmínili, že nejspíš nepůjde o izotermické vypouštění či že by tento způsob vypouštění byl velice pomalý, a ve skutečnosti bychom tedy vypustili o něco méně čaje. Na druhou stranu ventilek,



který udržuje tlak v nádobě, nemusí být zdaleka dokonalý. Tím, že bude ventilůk v průběhu lití čaje připouštět vzduch do nádoby, umožní vypuštění většího množství nápoje. Odpověď pro Lukáše, který s úlohou přišel, je: „Je potřeba si sehnat větší várnici.“, pokud by měl tak velkou, jako jsme odhadli.

## Úloha II.P ... efektivní (ná)stroj

*Palné zbraně jsou vlastně takovými tepelnými stroji. Spočítejte jaká je účinnost nějaké pušky nebo pistole. (Jde o využití energie střeliva pro pohyb kulky.)*

Nejprve si rozeberme, jak vlastně palné zbraně fungují. Ústředními prvky jsou jednak projektil, tj. těleso, které je „vystřeleno“ a získá tak kinetickou energii, a jednak střelivina, typicky střelný prach. Spouštěcím mechanismem dojde k chemickému, případně fázovým změnám střeliviny, následkem čehož vznikne tlakový gradient, který projektil urychlí.<sup>23</sup> Toto se zpravidla děje v hlavni (typicky válcové polouzavřené trubici), aby bylo co nejvíce energie předáno projektilu a nikoli bez užítku do okolí. Střelivina se nachází za projektilem, a to jak volně (např. raně novověká děla), tak v pouzdře (náboj). Nyní se podíváme na podobnosti a rozdíly palné zbraně a standardního tepelného stroje. Takový stroj pracuje tak, že mu je ohříváčem dodáno teplo, stroj se (za pomoci chladiče) vrátí do stavu před započítím procesu a mezitím vykoná práci (typicky urychluje nějaké těleso). Účinnost tepelného stroje se pak počítá jako podíl vykonané práce vůči teplu dodanému ohříváčem.

Naše situace je v lecčem jiná. V první řadě je dobré smířit se s faktem, že výstřel z palné zbraně nemá charakter cyklického děje. Snaha o převedení systému do stejného stavu jako před střelbou vede k nutnosti dodávat do zbraně náboje a potom by součástí našeho cyklu byla i výroba střeliviny a získávání materiálů, což radikálně odklání naši úlohu od problematiky střelby. Nekruhový charakter našeho děje nám však nebrání pro tento proces definovat účinnost. Nejprve uvažme, jestli účinnost ze zadání dává smysl. Kdybychom za stroj považovali zbraň i se střelivem, potom vstupní energie zvenčí je energie úderníku či zápalníku či obdobného spouštěcího mechanismu. Nicméně množství této energie není typicky zajímavý parametr.<sup>24</sup> Další možností je považovat za vstupní parametr pouze teplo reakce propelentu. Toto zavedení je ale poměrně nepřirozené, protože kdybychom uvažovali dva druhy střeliviny o stejných hustotách, objemech spalin a spalných entalpiích, ale různých výhřevnostech, tak se tyto dvě látky pro naše potřeby budou chovat úplně stejně, ale podle naší definice bychom dostávali různé účinnosti. Proto zavedení ze zadání vypadá jako poměrně dobrá volba. Ústová kinetická energie projektilu je poměrně jasný kandidát na požadované měřítko výstupní škály. Úlohu tedy máme dobře zadanou, můžeme se pustit do řešení.

Nejprve analyzujeme velice zjednodušený případ. Uvažujeme hlavěň o délce  $l$  a průřezu  $S$ , dále projektil o hmotnosti  $m$ . Střelivina vyprodukuje plyn o vnitřní

<sup>23</sup>Definice palné zbraně v českém právu: Palná zbraň = střelná zbraň, u které je funkce odvozena od okamžitého uvolnění chemické energie.

<sup>24</sup>Dokud ke spuštění nedojde omylem, ale když se postřelíte do zadnice, energetická efektivnost střelby není Váš největší problém...

energií  $E_0$  okamžitě po zažehnutí v objemu za projektilem, který má velikost  $V_0 = Sl_0$ . Parametru  $l_0$  řekněme třeba efektivní délka střeliviny (jednalo by se o výšku válce), přičemž  $l \gg l_0$ . Také bude dobré vzít v potaz atmosferický tlak  $p_a$ . Systém považujeme za dokonale izolovaný (tj. skrz projektil ani stěnu hlavně neprochází ani částice, ani teplo), projektil hlavě dokonale ucpává, ale zároveň je tření zanedbatelné. Spaliny střeliva budeme považovat za chemicky stejnorodý ideální plyn a následnou expanzi plynu budeme považovat za rovnovážný adiabatický děj. Pro ten platí

$$pV^\varkappa = \text{konst.}, \quad (11)$$

kde  $p$  a  $V$  jsou tlak a objem spalin v daný okamžik a  $\varkappa$  je Poissonova konstanta, jejíž hodnota závisí na symetrii molekul spalin. Ideální plyn také pochopitelně musí splňovat stavovou rovnici ideálního plynu, tedy

$$pV = nRT, \quad (12)$$

kde  $n$  je látkové množství spalin,  $R$  je molární plynová konstanta a  $T$  je termodynamická teplota spalin. Pro vnitřní energii  $U$  ideálního plynu platí

$$U = \frac{1}{\varkappa - 1} nRT = \frac{1}{\varkappa - 1} pV. \quad (13)$$

Vzhledem ke konzervativní povaze naší soustavy bude naším cílem vypočítat energii projektilu v ústí hlavně z energetické bilance. Ta má tvar

$$U_0 = U_1 + E_k + W_a,$$

kde  $U_0$  je vnitřní energie spalin okamžitě po vznícení; pravá strana rovnice udává energetickou bilanci ve chvíli, kdy projektil opouští hlavě. Konkrétně  $U_1$  je vnitřní energie spalin v tuto chvíli,  $E_k$  je kinetická energie projektilu a člen  $W_a$  je práce vykonaná na okolním vzduchu. Při pohybu projektil stlačuje atmosféru a stlačí ji o objem  $S(l - l_0)$  a atmosféra si po celou dobu zachovává svůj tlak  $p_a$ , platí tedy

$$W_a = S(l - l_0)p_a.$$

Nechť  $p_0$  je tlak spalin bezprostředně po vznícení. Potom podle (11), (12) a (13) platí

$$U_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} p_1 V_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} p_0 V_0^\varkappa V_1^{1-\varkappa} = \frac{1}{\varkappa - 1} p_0 V_0 \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^{\varkappa-1} = U_0 \left( \frac{l_0}{l} \right)^{\varkappa-1},$$

kde  $V_1$  je objem spalin v momentě opouštění hlavně projektilem a  $p_1$  je tlak spalin v tentýž okamžik. Potom pro kinetickou energii projektilu dostáváme

$$E_k = U_0 \left( 1 - \left( \frac{l_0}{l} \right)^{\varkappa-1} \right) + Sl_0 p_a - Sl p_a$$

a konečně pro účinnost  $\eta$  získáváme<sup>25</sup>

$$\eta = \frac{E_k}{U_0} = 1 - \left( \frac{l_0}{l} \right)^{\varkappa-1} + \frac{S}{U_0} p_a l_0 - \frac{S}{U_0} p_a l. \quad (14)$$

<sup>25</sup>Obecnější přístup by vyžadoval psát místo  $U_0$  jisté  $E_0$ , které by vyjadřovalo součet všech vstupních energií.

Rozeberme si podstatné vlastnosti našeho výsledku. Budeme přitom mít na paměti, že hodnoty  $\varkappa$  jsou vždy větší než 1. Vidíme, že pro  $l \rightarrow l_0$  platí  $\eta \rightarrow 0$ , což je v souladu s naším očekáváním – pokud je délka hlavně, podél které projektil zrychluje, nulová, projektil nezrychlí. Dále nechť máme dané všechny parametry kromě  $l$ . Potom existuje taková hodnota  $l$ , pro kterou je  $\eta$  maximální, neboli pro které vyletí projektil z hlavně s největší rychlostí. Podíváme-li se na problém z hlediska kinematiky projektilu, měla by to být právě taková hodnota  $l$  (dále ji řekneme  $l_2$ ), aby tlak spalin  $p_2$  ve chvíli, kdy projektil dorazí k ústí, byl roven atmosférickému tlaku, tedy  $p_2 = p_a$  (nyní je vhodná chvíle připomenout, že neuvažujeme tření). Ověříme si to následujícím výpočtem.

Hodnota  $\eta$  je pro  $l = l_0$  nulová, naopak pro velká  $l$  klesá pode všechny meze. Také očekáváme, že na netriviálním intervalu  $l$  bude  $\eta$  nabývat kladných hodnot mezi 0 a 1, funkce  $\eta(l)$  tedy musí mít maximum, jelikož je spojitá pro  $l \in \mathbb{R}^+$ . Položme tedy derivaci rovnou 0:

$$\left. \frac{d\eta}{dl} \right|_{l=l_2} = (\varkappa - 1)l_0^{\varkappa-1}l_2^{-\varkappa} - \frac{S}{U_0}p_a = 0,$$

odkud získáme

$$l_2 = l_0 \left( \frac{V_0}{(\varkappa - 1)U_0} p_a \right)^{-\frac{1}{\varkappa}}$$

a dosazením do (11) a rozložením  $U_0 = \frac{1}{\varkappa-1}p_0V_0$  po úpravách získáváme

$$p_2 = p_0 \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^{\varkappa} = p_0 \left( \frac{l_0}{l_2} \right)^{\varkappa} = p_a,$$

takže naše výsledky odpovídají očekávání. Dosadíme-li odpovídající hodnotu  $l_2$  za  $l$  do (14) získáme maximální možnou účinnost palné zbraně při daném atmosférickém tlaku  $p_a$  a poměru  $\frac{V_0}{E_0}$ <sup>26</sup>:

$$\eta_{\max} = 1 - \left( \left( \frac{V_0}{(\varkappa - 1)E_0} p_a \right)^{\frac{1}{\varkappa}} \right)^{\varkappa-1} + \frac{S}{E_0} p_a l_0 \left( 1 - \left( \frac{V_0}{(\varkappa - 1)E_0} p_a \right)^{-\frac{1}{\varkappa}} \right)$$

toto se dá přepsat jako

$$\eta_{\max} = 1 + A - C(\varkappa)A^{(1-\frac{1}{\varkappa})}$$

kde

$$C(\varkappa) = \frac{2 - \varkappa}{\varkappa - 1} \left( \frac{1}{\varkappa - 1} \right)^{-\frac{1}{\varkappa}}$$

a

$$A = \frac{V_0}{E_0} p_a.$$

Je tedy vidět, že  $\eta_{\max}$  závisí (krom  $p_a$ ) pouze na „hustotě energie“ propelentu  $\frac{E_0}{V_0}$ .

<sup>26</sup>až na extrémní možnost zpětného přenosu tepla, která v reálných situacích nenastane

Nyní se zabýváme odchylkami našeho modelu od reálné situace. Asi největší odchylka souvisí s tepelnou izolovaností systému. Mezi spaliny a stěnou dochází k výměně tepla, zpravidla je teplo spalin odváděno stěnou, což vede ke snížení účinnosti. Velikost této ztráty závisí na velkém množství parametrů, od materiálových vlastností hlavně, přes okolní teplotu, délku hlavně, etc. Další nepřesností je předpoklad o okamžitém a úplném spálení prachu. Reálná reakce propelentu probíhá postupně, rychlost hoření závisí mimo jiné na tlaku a na teplotě (což zpětně ovlivňuje velikost tepelných ztrát) a v praxi se často stává, že část střeliviny zůstane nepřeměněná, což dále snižuje efektivitu střelby. Dále na projektil ve hlavní působí tření, jehož velikost závisí zejména na technickém provedení projektilu a vnitřní stěny hlavně. Dále má na veškeré parametry vliv fakt, že projektil se v hlavní typicky roztáčí (kvůli stabilitě projektilu). V neposlední řadě jsme považovali spaliny za ideální plyn a veškeré termodynamické procesy za rovnovážné. Nepřesnost způsobená aproximací ideálního plynu záleží zejména na chemickém složení spalin a látkové hustotě spalin v průběhu střelby. Nerovnovážná termodynamika je náročná disciplína, nicméně nerovnovážnost procesů vede vždy ke snížení účinnosti děje. I v aproximaci rovnovážného ideálního plynu se situace stává složitou, pokud jsou spaliny směsí látek s různou symetrií molekul, tedy o složkách s různým  $\kappa$ .

Testovat naše modely v praxi by bylo technicky velice náročné. Proto budeme srovnávat naše modelové výsledky s výsledky programu IntBal 1.0. Ten lze stáhnout například z <http://ballistics.eu/interior.html>, k dispozici je česká verze stránek s popisem. Program má fungovat na systémech Windows 2000, XP, Vista a 7, nicméně na Windows 10 nám program fungoval.<sup>27</sup> Po spuštění programu nejprve klikněte na kartu „Extras“ a zaklikněte checkbox „Show energy losses“, což nám v konzolovém výpisu zobrazí i účinnosti. Program vyžaduje a umožňuje nastavení několika desítek parametrů, včetně velikosti a tvaru zrníček střeliviny. Naštěstí program obsahuje předvyplněné hodnoty pro tři zbraně. Kliknutím na „load“ se zobrazí obsah složky IntBal1.0 včetně tří txt souborů s přednastavenými parametry. 7.62mm x 39 je označení munice pro samopal AK-47, 30mm PLdVK je československá protiletadlová zbraň a 152mm je artilerie. Podívejme se nejprve na kalašnikov. V konzolovém výstupu se Vám zobrazí různé energetické ztráty „Energy loss“ i s procentuálními vyjádřeními. Řádek „Energy Loss due to Projectile Translation“ má význam zbývající kinetické energii projektilu při opuštění hlavně, takže typické ákáčko pálí s účinností zhruba 16,6 % . Řádek „Remaining Energy of Propellant+Igniter Gas“ odpovídá nevyužitou energii z našeho modelu. Podíváme-li se na další ztráty, nejvýraznější je „Remaining Energy of unburned Propellant“, tedy energie nespáleného prachu. Téměř třetina střeliviny se tedy při střelbě nevznítala. Nezanedbatelný vliv má také „Energy Loss due to Heat Transfer“, což jsou ztráty kvůli tepelné výměně. Z didaktického důvodu je dobré si rozmyslet ještě příspěvky „Energy Loss due to Air Resistance“, tj. odpor vzduchu, který by byl v rovnovážné aproximaci nulový a „Energy Loss due to Recoil“ čili energetická ztráta zpětným rázem. Ten lze odhadnout modelem inverzní nepružné

<sup>27</sup>Uživatelé Linuxu jsou snad zvyklí si problémy řešit sami a uživatelé Macu mají dost peněz na placený program.

srážky. Necht má projektil hmotnost  $m$  a rychlost  $v$  a hmotnost částí ovlivněných zpětným rázem je  $M$ . Ze zákona zachování hybnosti musí platit

$$mv = Mw,$$

kde  $w$  je střední rychlost částí ovlivněných zpětným rázem okamžitě po výstřelu. Ztráta energie zpětným rázem je tedy

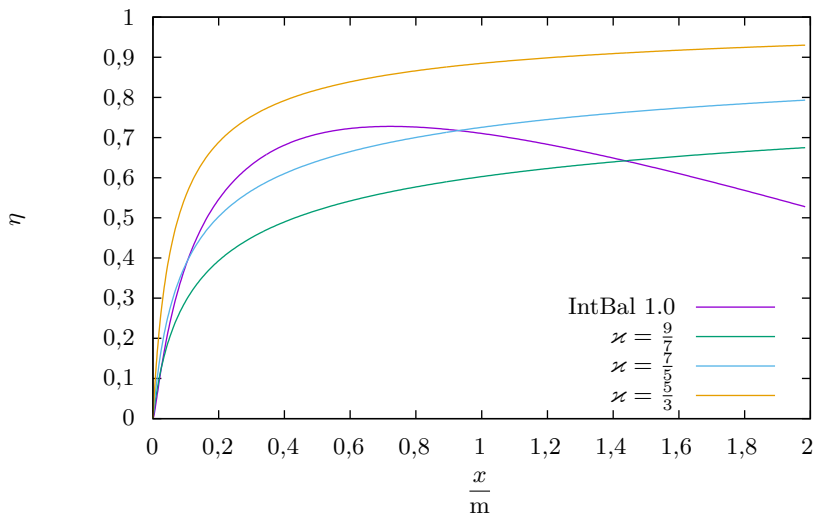
$$E_z = \frac{1}{2}Mw^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v^2 = \frac{m}{M}E_{\text{kp}}$$

kde  $E_z$  je energetická ztráta zpětným rázem a  $E_{\text{kp}}$  je kinetická energie projektilu. Množství ztrát je tedy úměrné poměru hmotností a vzhledem k tomu, že hmotnost projektilu je v řádu jednotek gramů a hmotnost částí ovlivněných zpětným rázem je v praxi jednotky až desítky kilogramů. Proto lze očekávat, že množství energie ztracené tímto způsobem nepřesáhne 0,1 %. Podívejme se, jak by se měnily velikosti energií v jednotlivých kategoriích, když budeme měnit délku hlavně, která se skrývá pod popisem „Travel of Projectile at Muzzle“ v kartě „Weapon and Cartridge“. Navíc budeme-li předpokládat, že rychlost projektilu v dané vzdálenosti v hlavni nezávisí na zbývající délce hlavně; potom se nám bude hodit graf závislosti rychlosti projektilu na vzdálenosti uražené v hlavni.<sup>28</sup> Po kliknutí na „Axis Y“ zaškrtněte „Proj. Velocity vp“ a po kliknutí na „Axis X“ zaškrtněte „Projectile Travel“. Nastavíme tedy délku hlavně na nějakou velkou hodnotu, třeba 2 m, a klikneme na „Start“. Krom závislosti rychlosti projektilu na dráze získáváme i další zajímavou informaci, totiž fakt, že část střeliviny nebude přeměněna ani při dlouhé hlavni. Také stojí za zmínku, že na nezanedbatelnou hodnotu vzrostla část „Energy Loss due to Friction“, totiž energetická ztráta třením. Tření tedy na velkých vzdálenostech bude hlavní brzdou silou, oproti v našem modelu předpokládanému podtlaku uvnitř hlavně. Nicméně stejně jako tlak atmosféry i tento příspěvek lineárně roste s uraženou vzdáleností. Ze závislosti můžeme také odhadnout optimální délku hlavně z hlediska účinnosti. Po bližším zkoumání zjistíme, že tato délka hlavně je zhruba 78 cm. Pomocí „Save“ můžeme výstup programu uložit a srovnat výsledky našeho modelu podle (14). Na obrázku 12 vidíme srovnání účinnosti samopalu AK podle programu IntBal 1.0 a našeho modelu pro různé hodnoty  $\varkappa$ .

Výsledky našeho modelu vypadají kvalitativně jinak než výsledky programu proto, že zatímco podle programu má pro delší hlavně tření nezanedbatelný vliv, v našem modelu ho neuvažujeme – roli třecí síly u nás zastupuje atmosferická tlaková síla  $Sp_a$ , která je výrazně menší než síla třecí podle programu. Důsledkem toho je v našem modelu rovnovážná poloha posunuta mimo námi zkoumanou oblast délek hlavní a příslušné křivky v grafu proto neklesají.

Shrnutím by se dalo říct, že účinnost palných zbraní závisí na velkém množství parametrů, od provedení propelentu, přes atmosferické vlastnosti, po technického provedení hlavně a projektilu. Jednoduché termodynamické modely mohou mít jen určitou omezenou platnost (rychle hořící prach, krátká hlaveň, malé tření, ...) a obecně se od něj výsledky mohou značně odchylovat.

<sup>28</sup>Což podle předchozího předpokladu odpovídá ústové rychlosti při příslušné délce hlavně.



Obr. 12: Srovnání účinnosti samopalu AK podle programu IntBal 1.0 a našeho modelu pro různé hodnoty  $\kappa$ .

### Úloha III.1 ... dlouhý film

Stahujete si svůj oblíbený film o velikosti 12 GB rychlostí 10 MB/s. Uvažujte, že signál se po kroucené dvojlince pohybuje rychlostí světla a modulace rozprostírá přenosovou rychlost rovnoměrně, tzn. byla-li by 1 b/s, musíme přijmout signál za celou sekundu k obdržení 1 bitu informace. Jak dlouhý úsek kabelu dokáže film zaplnit svými daty, pokud se bude šířit dostatečně dlouhým kabelem?

Keďže modulácia rozprestiera signál rovnomerne, dĺžka signálu (nazvime tak dĺžku úseku kábla, v ktorom sa informácia šíri) bude lineárna voči objemu prenášaných dát  $d$  – ak majú dáta  $A$  v kábli dĺžku  $l_A$  a  $n$ krát objemnejšie dáta  $B$  má v kábli dĺžku  $l_B$ , tak medzi nimi platí vzťah

$$l_B = n l_A,$$

inak povedané, dvakrát objemnejší film bude mať dvojnásobne dlhší signál. Vieme určiť, ako dlho potrvá film stiahnuť, keďže rýchlosť stahovania  $v$  je definovaná ako množstvo dát  $d$ , ktoré obdržíme za čas  $t$ :

$$v = \frac{d}{t},$$

tak za znalosti  $d$  a  $v$  určíme čas potrebný na stiahnutie:

$$t = \frac{d}{v}.$$

Ak sa signál šíri v kábli rýchlosťou svetla  $c$ , tak za čas  $t$ , ktorý trvá, než sa do kábla dostane celý signál, sa začiatok signálu dostane do vzdialenosti

$$l = ct.$$

Keďže informácia sa nikde v kábli nemôže hromadiť, tak je vysielaná rovnakou rýchlosťou  $v$ , akou je prijímaná. Než bude celá v kábli, potrvá to  $t = d/v$ , a než sa do kábla dostane celá informácia  $d$ , začiatok informácie sa dostane do vzdialenosti

$$l = ct = c \frac{d}{v}.$$

Teraz sa každý bit informácie pohybuje rovnakou rýchlosťou a kým sa prvé začnú na druhom konci kábla prijímať, bude mať tento signál celý čas práve túto dĺžku  $l$ . Po dosadení hodnôt zo zadania dostávame výsledok ( $1 \text{ GB} = 1000 \text{ MB}$ ):

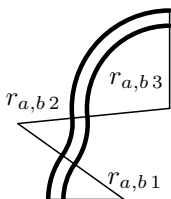
$$l = c \frac{d}{v} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \frac{12 \text{ GB}}{10 \text{ MB} \cdot \text{s}^{-1}} = 3,6 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Dĺžka  $3,6 \cdot 10^{11} \text{ m}$  znamená, že kábel by dosiahol zo Zeme na Slnko a späť, teda predpoklad, že celá informácia sa naraz zmestí do kábla nie je reálny. Tomu nasvedčujú aj bežné hodnoty času odozvy vzdialeného servera, ktoré sú v rámci kontinentu typicky približne rádu  $10^{-2} \text{ s}$  až  $10^{-1} \text{ s}$ , teda pri sťahovaní, ktoré bežne trvá minúty, sa určite nenachádza celá informácia naraz v kábli.

Pri dosadení sme použili vzťah  $1 \text{ GB} = 1000 \text{ MB}$ , keďže v zadaní sú použité jednotky  $GB$  (slovom *gigabyte*) a  $MB$  (slovom *megabyte*), teda využívajúce klasické SI predpony rádu, ktoré udávajú vzťah  $1 \text{ GB} = 1000 \text{ MB}$ , rovnako, ako pre jednotky sily platí  $1 \text{ GN} = 1000 \text{ MN}$  a pre jednotky energie platí  $1 \text{ GeV} = 1000 \text{ MeV}$ . V praxi sú bežne používané aj jednotky  $GiB$  (slovom "gibibyte") a  $MiB$  (slovom "mibibyte"), medzi ktorými platí vzťah  $1 \text{ GiB} = 2^{10} \text{ MiB} = 1024 \text{ MiB}$ , keďže v zadaní sú použité jednotky  $GB$  a  $MB$ , správny prepočet je  $1 \text{ GB} = 1000 \text{ MB}$ . Pri hodnotení sme však uznávali aj použitie prepočtu s  $2^{10}$ .

Nejasnosť mohla spôsobiť informácia, že dáta sťahujeme cez *dvojlinku*. Krútená dvojlinka je iba označenie použitého kábla. Aj keď prakticky prijímame dáta viacerými linkami, toto je už zohľadnené v rýchlosti sťahovania, ktorá nakoniec určuje, ako dlho k nám budú dáta cestovať. Možno si predstaviť, že každou z dvoch liniek prúdia dáta rýchlosťou  $5 \text{ MB/s}$  a preto je výsledná rýchlosť  $10 \text{ MB/s}$ , v zadaní sa však nepíše o rýchlosti po jednej linke, ale o výslednej rýchlosti tak, ako je najrozumnejšie ju definovať, ako reálne množstvo dát, ktoré je presunuté na disk v našom počítači za jednotku času. Preto nie je potrebné (ani správne) deliť čas potrebný na stiahnutie dvomi (ani inou konštantou).

### Úloha III.2 ... pekelná



Do pekla vede cesta a silnice po opačných březích řeky. Jdeme po směru řeky, který je vyznačen na obrázku. Břehy řeky jsou tvořeny částmi soustředných kružnic. Pěší cesta kopíruje jeden břeh řeky, silnice druhý břeh, šířka toku je neměnná. Po jaké straně řeky je rychlejší jít? Známe středový úhel každého kružnicového oblouku  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  a poloměr každé kružnice  $r_{a1}, r_{b1}, r_{a2}, r_{b2}, \dots$ , kde indexy  $a, b$  značí levý a pravý břeh.

Víme, že cesta i silnice leží na soustředných kružnicích. Řekněme, že silnice povede po levém břehu řeky. Platí  $\Delta o_i = \Delta r \varphi_i$ , kde  $i$  je číslo příslušného oblouku,  $\Delta r$  je šířka řeky (a tedy i rozdíl poloměrů oblouků v absolutní hodnotě),  $\varphi_i$  je středový úhel oblouku v radiánech (když se řeka točí doprava, má úhel zápornou hodnotu) a  $\Delta o_i$  je, o kolik je cesta delší než silnice. Tedy cesta bude delší než silnice o hodnotu:

$$\sum_{i=1}^n \Delta o_i = \sum_{i=1}^n \Delta r \varphi_i = \Delta r \sum_{i=1}^n \varphi_i,$$

kde  $n$  je (neznámý, ale to nevadí) počet oblouků.  $\varphi_i$  jsou jednak středové úhly jednotlivých oblouků, jednak úhel mezi tečnou ke kružnici na začátku a na konci oblouku, přičemž tečna ke konci  $i$ -tého oblouku je shodná s tečnou k začátku  $(i + 1)$ -ho oblouku (orientace úhlu zůstane stejná). Proto je celkový rozdíl délky cesty a silnice roven  $\Delta r \varphi_{tot}$ , kde  $\varphi_{tot}$  je úhel mezi tečnou k silnici na začátku a na konci údolí.  $\Delta r$  je mimochodem vždy kladné, tedy to, zda je delší silnice nebo cesta, můžeme určit čistě ze součtu úhlů. To bude fungovat, pokud se řeka nebude křížit sama se sebou, což se může stát asi jen na cestě do pekla.

Nakonec by to chtělo říci, který břeh je pro nás v tomto konkrétním případě výhodnější. Úhly  $\varphi_1$  a  $\varphi_3$  jsou orientované záporně, úhel  $\varphi_2$  kladně. Také na obrázku vidíme, že  $\varphi_3$  je v absolutní hodnotě větší než  $\varphi_2$ , tedy součet těchto tří úhlů je záporný a cesta je kratší než silnice. Také je vidět, že se řeka stočila doprava a úhel mezi jejím směrem na začátku a konci údolí je orientovaný záporně.

### Úloha III.3 ... kde to píská

Verčiny uši lze aproximovat dvěma bodovými detektory ve vzdálenosti  $d$ , které detekují zvukové vlny ze všech směrů stejně dobře. Verča umí polohu známého zdroje zvuku poslepu určit velice přesně, proto jednoho dne, když se probudila, vyzvala své přátele k tomu, aby ji vyzkoušeli. Jenže Verča si v jednom uchu zapomněla špunt, který snižuje intenzitu zvuku v jejím levém uchu  $k$ krát. Verči byly zavázány oči a zdroj byl umístěn do vzdálenosti  $y$  před ni a o  $x$  napravo (či  $-x$  nalevo). Určete, na které místo  $(x', y')$  Verča ukáže, jestliže uši rozeznávají polohu zdroje podle hlasitosti zvuku.



Existují dva přístupy, jeden více počítací a druhý více geometrický. Nejdříve tedy zkusme spočítat vztah mezi  $x, y$  a  $x', y'$ . Víme, že intenzita zvuku klesá s druhou mocninou vzdálenosti podle vzorce

$$I = \frac{c}{r^2},$$

v našem případě pak (pro levé a pravé ucho)

$$I_{L,P} = \frac{c}{\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}, \quad (15)$$

kde  $c$  je nám neznámá konstanta, kterou našťestí nebudeme v tomto příkladě potřebovat, a znaménko plus odpovídá levému uchu.

Ze zadání máme

$$\begin{aligned} I'_L &= \frac{I_L}{k} \\ I'_P &= I_P \end{aligned}$$

Dosadíme z (15) a upravíme <sup>29</sup>

$$\left(x' + \frac{d}{2}\right)^2 + y'^2 = k \left(\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right) \quad (16)$$

$$\left(x' - \frac{d}{2}\right)^2 + y'^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \quad (17)$$

Vyjádríme  $x'$  a  $y'$

$$x' = \frac{(k-1)\left(x^2 + y^2 + \frac{d^2}{4}\right) + dx(k+1)}{2d} \quad (18)$$

$$y'^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x' - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \quad (19)$$

Rozhodně v tomto případě nepovažujeme za vhodné odmocňovat vzorec, natož dosazovat za  $x'$  v druhém vzorci, abychom se ve vzorcích vůbec vyznali.

Věnujme se rozboru těchto rovnic. Pro  $k = 1$  se vzorec zredukuje na  $x' = x$  a  $y'^2 = y^2$ , což odpovídá nezkreslenému vnímání. Druhá rovnost může být splněna dvěma způsoby, s opačnými znaménky. To nám říká, že zdroj může být před nebo za Verčou, mezi čímž ona bohužel nedokáže kvůli osové symetrii problému rozhodnout.<sup>30</sup> Se zvyšujícím se  $k$  se zvyšuje i  $x'$ , čímž se bod, na který ukáže, bude zobrazovat čím dál víc napravo od ní. Jak to bude s  $y'$ ? Z rovnice (19) je vidět, že s rostoucím  $x'$  klesá hodnota  $y'$  až k nule, což znamená, že se čárkovaný bod zobrazuje stále více k ose  $x$ , až ji dosáhne, čímž bude bod přesně vpravo od Verči.<sup>31</sup>

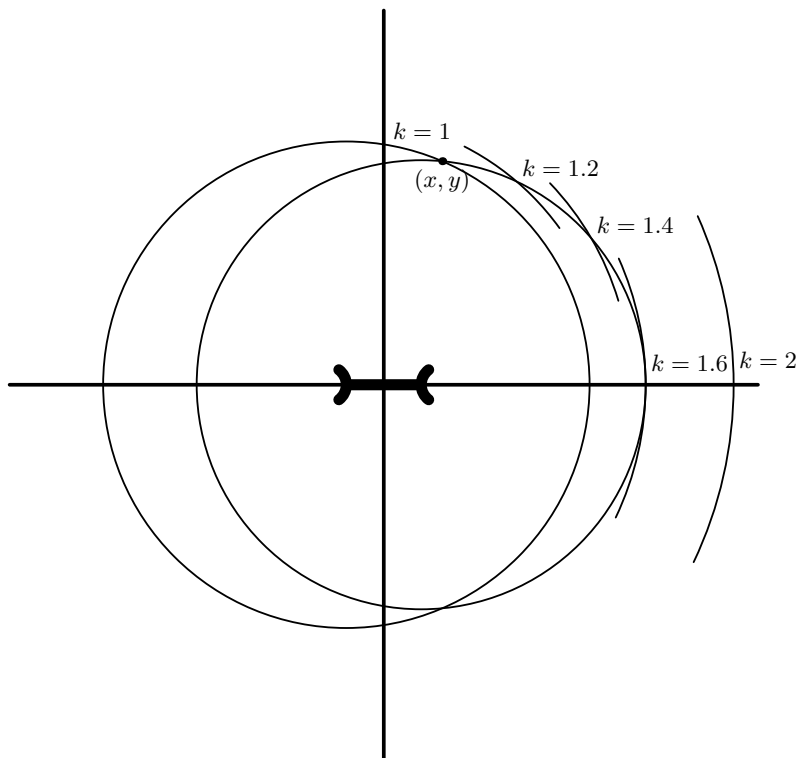
<sup>29</sup>Všimněme si, že  $c$  se zkrátí.

<sup>30</sup>Pokud by měla Verča třetí ucho, mohla by to zvládnout.

<sup>31</sup>Všimněme si, že v tomto okamžiku má rovnice jen jedno řešení—body před a za Verčou splnou.

Pro vyšší  $k$ , a tedy i  $x'$  bude záporný člen rovnice (19) dominovat, čímž posune pravou stranu do záporných čísel, a rovnice nebude mít řešení. V tomto okamžiku si Verča nejspíš uvědomí, že má špunt v uších.

Nyní přejdeme ke geometrickému přístupu. Podívejme se na soustavu rovnic (16),(17). To jsou ale rovnice kružnic! Pravé strany vyjadřují původní vzdálenosti—které považujeme za konstantu.<sup>32</sup> Nalevo pak jsou rovnice pro kružnice se středy v obou uších. Jedna má za poloměr původní vzdálenost ucha od bodu  $(x, y)$ , a tak tímto bodem prochází, druhá pak má poloměr  $\sqrt{k}$ krát větší. Mají-li být splněny obě rovnice, musí se jednat o průsečíky obou kružnic, ty jsou dva, pokud se kružnice protínají, což je konzistentní s rovnicí (19). Jediné řešení rovnice pak odpovídá stavu, kdy se kružnice dotýkají. Lépe je to vidět na obrázku 13.



Obr. 13

<sup>32</sup>Přesněji řečeno za parametr.

## Úloha III.4 . . . radar zadarmo

Na všechny patníky podél silnice umístíme kontrolní červené tabulky (vlnová délka červené barvy je  $\lambda_{\epsilon} = 630 \text{ nm}$ ). Jakmile řidič vidí na patníku před ním tabulku modrou (vlnová délka modré barvy je  $\lambda_m = 450 \text{ nm}$ ), ví, že jede příliš rychle. Jaká je tato mezní rychlost? Jakou má běžné osobní auto při této rychlosti hybnost a kinetickou energii?

Jev, který řidič pozoruje, se jmenuje Dopplerův jev. Jedná se o změnu frekvence zdroje vlnění, kterou zaznamená pozorovatel, pokud se vůči zdroji pohybuje. Tento jev lze dobře pozorovat, když se k vám blíží houkající sanitka: frekvence sirény nejdřív roste, a jakmile vás sanitka mine, tak začne klesat. V našem případě se jedná o světlo, tedy vlnění elektromagnetické. V případě tak silného dopplerovského efektu, že se mění barva světla, se auto hýbe rychlostí řádově srovnatelnou s rychlostí světla  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . V takovém případě se začnou projevovat efekty speciální teorie relativity, kdy čas běží pro vzájemně se pohybující pozorovatele různou rychlostí (tomu se říká dilatace času) a vzdálenosti mají různou délku (tomu se říká kontrakce délek). Podle vzorce pro relativistický Dopplerův jev platí pro vztah pozorované vlnové délky  $\lambda_m$  a vlnové délky zdroje  $\lambda_{\epsilon}$  v případě, kdy se pozorovatel přibližuje ke zdroji, vztah<sup>33</sup>

$$\frac{\lambda_{\epsilon}}{\lambda_m} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}},$$

kde  $v$  je rychlost řidiče. Odtud můžeme vyjádřit a vyčíslit řidičovu rychlost jako

$$v = \frac{\lambda_{\epsilon}^2 - \lambda_m^2}{\lambda_{\epsilon}^2 + \lambda_m^2} c \doteq 0,32c \doteq 9,7 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Nyní spočítáme hybnost  $p$ , kam dosadíme relativisticky korigovanou hmotnost (řekněme, že klidová hmotnost auta je  $m_0 = 1500 \text{ kg}$ ):

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \doteq 1,5 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

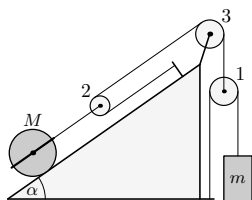
Při určování kinetické energie vyjdeme z toho, že celková energie tělesa  $mc^2$  se rovná součtu klidové energie tělesa  $E_0 = m_0 c^2$  a jeho kinetické energie  $E_k$ . Kinetickou energii odtud určíme takto:

$$\begin{aligned} E_k &= E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) m_0 c^2 - m_0 c^2 = \\ &= m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \doteq 7,7 \cdot 10^{18} \text{ J}. \end{aligned}$$

Když řidič vidí modrou tabulku místo červené, jede rychlostí  $9,7 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , auto má hybnost asi  $1,5 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  a kinetickou energii  $7,7 \cdot 10^{18} \text{ J}$ .

<sup>33</sup> Pro signál šířící se přesně rychlostí  $c$ , tedy v prostředí o indexu lomu  $n = 1$ , což vzduch přibližně splňuje.

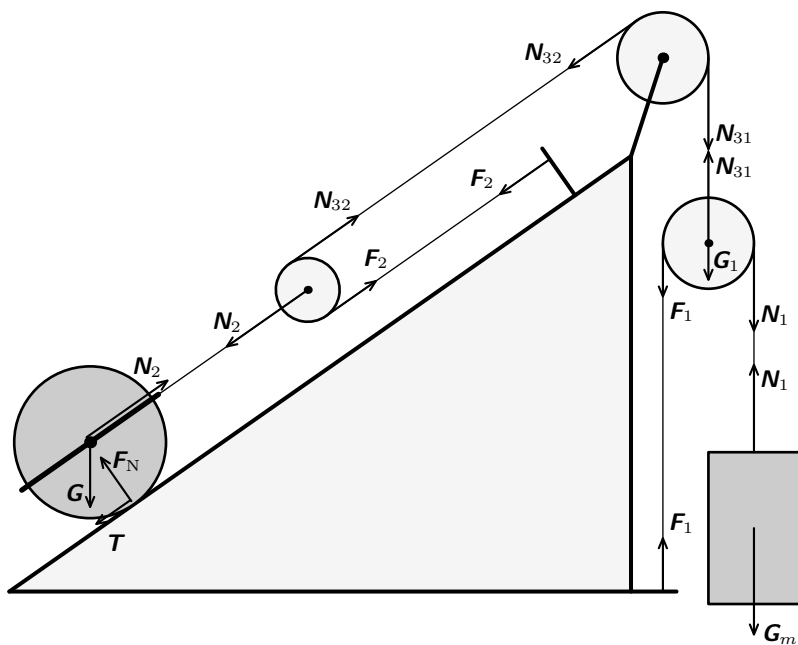
### Úloha III.5 ... kladkovaná



Mějme rozestavení kladek jako na obrázku. Známe hmotnosti  $m_i$ , poloměry  $R_i$  a momenty setrvačnosti  $J_i$  všech kladek, hmotnost  $m$  závaží a hmotnost  $M$ , poloměr  $R$  i moment setrvačnosti  $J$  válce. Zanedbejte tíhu kladky 2, abyste mohli uvažovat, že lana vedoucí ke kladce 2 jsou rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Součinitel smykového i klidového tření mezi válcem a podložkou je  $f$ . Lana na kladkách neprokluzuje. Vypočtete

s jakým zrychlením (popř. i úhlovým zrychlením) se bude pohybovat závaží  $m$  a válec  $M$ .

Jelikož nemáme žádnou teorii hmotných kladek, budeme se k nim chovat jako k libovolnému jinému tělesu v mechanice. To znamená, že si napíšeme pohybové rovnice nejen pro válec  $M$  a závaží  $m$ , ale také pro všechny kladky. Zároveň neznáme žádný obecný vztah mezi velikostmi sil působících na kladku (které jsou pro nehmotné kladky stejně velké, a tedy se vyruší). Na obr. 14 jsou zakresleny všechny síly působící na vyšetřovaná tělesa. Současně tím zavádíme značení sil. Jelikož je kladka 3 pevně uchycena, nemusíme se zabývat silami s nulovým momentem.



Obr. 14: Znázornění všech relevantních působících sil.

Co se týče aproximace ze zadání, uvažujme nyní pouze to, že všechna lana vedoucí ke kládce 2 jsou rovnoběžná s povrchem nakloněné roviny. Toho lze například dosáhnout umístěním kladky 2 do drážky bez tření. Zanedbání typu  $m_2 \approx 0$  provedeme až ve výsledku, kde teprve uvidíme, co můžeme zanedbat.

Dále si musíme uvědomit, že na volných kládkách se zrychlení půlí (vzhledem k tomu, že se lano musí prodloužit dvakrát více, než se skutečně kládka posune). Označme  $a$  zrychlení válce. Za kladný směr zrychlení považujeme případ, kdy válec bude klesat. Potom se kládka 2 pohybuje se zrychlením  $a$ , kládka 1 se zrychlením  $2a$  a závaží  $m$  se zrychlením  $4a$ . Pohybové rovnice závaží a válce vypadají následovně,

$$4ma = mg - N_1, \quad (20)$$

$$Ma = N_2 - Mg \sin \alpha - T, \quad (21)$$

$$J\varepsilon = TR, \quad (22)$$

kde  $\varepsilon$  je úhlové zrychlení válce.

Obvodové zrychlení kladek musíme brát v soustavě spojené s kládkou, tedy od zrychlení lana musíme odečíst zrychlení kladky. Pohybové rovnice rovnice pro kládky nabývají tvaru

$$2m_1a = m_1g + N_1 + F_1 - N_{31}, \quad (23)$$

$$J_1 \frac{2a}{R_1} = (N_1 - F_1)R_1, \quad (24)$$

$$J_3 \frac{2a}{R_3} = (N_{31} - N_{32})R_3, \quad (25)$$

$$m_2a = -m_2g \sin \alpha + N_{32} + F_2 - N_2, \quad (26)$$

$$J_2 \frac{a}{R_2} = (N_{32} - F_2)R_2. \quad (27)$$

Jelikož lana neprokluzují na kládkách, spočítá se úhlové zrychlení kladek jako podíl zrychlení lana na kládce vůči její středu a poloměru kladky.

Nyní však máme pouze 8 rovnic pro 9 neznámých  $a$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_{31}$ ,  $N_{32}$ . Pro jednoznačné řešení potřebujeme přidat ještě devátou rovnici. Pokud je třecí koeficient dostatečně vysoký, tj. třecí síla je nižší než normálová síla  $F_N$  působící mezi válcem a podložkou,

$$|T| \leq fF_N = Mgf \cos \alpha,$$

nebude docházet k prokluzování válce, a můžeme psát

$$a = \varepsilon R. \quad (28)$$

Jelikož směr působení síly  $T$  je závislý na směru pohybu, píšeme velikost  $|T|$ .

Pokud je naopak třecí koeficient příliš malý, nemůže třecí síla  $T$  růst výše než  $fF_N$ , a na této hodnotě už zůstane, tedy

$$T = Mgf \cos \alpha. \quad (29)$$

Toto platí v případě  $a > 0$ . Pokud však vyjde  $a < 0$ , musíme v naší znaménkové konvenci počítat

$$T = -Mgf \cos \alpha. \quad (30)$$

Jelikož se v žádné jiné rovnici nevyskytuje  $f$ , odpovídá tato změna přechodu od  $f$  k  $-f$ , stačí tedy spočítat první případ a pro druhý případ pouze v řešení udělat tuto změnu. Pokud válec neprokluzuje, vyjde řešení stejné pro oba směry pohybu.

Vyřešením této soustavy 9 lineárních rovnic dostáváme řešení pro případ, kdy válec neprokluzuje

$$a = g \frac{4m + 2m_1 - M \sin \alpha - m_2 \sin \alpha}{M + 16m + 4m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}}, \quad (31)$$

Odtud získáme zrychlení závaží jako  $4a$  a úhlové zrychlení válce jako  $\varepsilon = a/R$ .

V případě, kdy válec prokluzuje, dostáváme

$$a = g \frac{4m + 2m_1 - M(\sin \alpha + f \cos \alpha) - m_2 \sin \alpha}{M + 16m + 4m_1 + m_2 + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}}, \quad (32)$$

$$\varepsilon = \frac{g}{R} \frac{MR^2 f \cos \alpha}{J}. \quad (33)$$

Jestliže vychází opačný směr pohybu, musíme řešení upravit na tvar

$$a = g \frac{4m + 2m_1 - M(\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_2 \sin \alpha}{M + 16m + 4m_1 + m_2 + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}}, \quad (34)$$

$$\varepsilon = -\frac{g}{R} \frac{MR^2 f \cos \alpha}{J}. \quad (35)$$

K důkladnějšímu rozboru této změny se ještě vrátíme. Zrychlení závaží získáme v obou případech opět jako  $4a$ .

Vidíme, že když válec prokluzuje, nemá jeho moment setrvačnosti žádný vliv na jeho translační zrychlení, ale pouze na rotační pohyb.

V tuto chvíli můžeme oprávněně provést aproximaci  $m_2 \approx 0$  a vyškrtnout z výrazů (31)-(35) všechny členy obsahující  $m_2$ . Pro jednoduchost se v následujících úvahách nebudeme zabývat patologickými případy, kdy naši aproximaci nelze použít takto jednoduše.

Nyní je třeba vyšetřit, kdy bude a kdy nebude válec prokluzovat. To lze udělat z řešení libovolného z těchto dvou případů. Uděláme to tedy pro názornost oběma metodami. Když válec neprokluzuje, je splněná podmínka  $a = \varepsilon R$  a třecí síla se podle toho patřičně upravuje (s rostoucím  $\varepsilon$  roste). Proto stačí najít mezní případ  $f$ , pro který je splněna rovnost  $|T| = fF_N$ . Jednoduchým dosazením do soustavy dostáváme

$$T = \frac{J\varepsilon}{R} = \frac{J}{R^2}a,$$

$$\frac{J}{R^2}|a| \leq fF_N = Mgf \cos \alpha.$$

Dosazením za  $a$  z (31) a řešením této lineární nerovnice dostáváme, že válec neprokluzuje pro

$$f \geq \frac{J}{MR^2 \cos \alpha} \cdot \frac{|4m + 2m_1 - M \sin \alpha|}{\frac{J}{R^2} + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2} + M + 16m + 4m_1}. \quad (36)$$

V případě, kdy válec prokluzuje je naopak splněna rovnost  $|T| = fF_N$  a pro zrychlení platí  $|a| > |\varepsilon|R$  – musíme tedy vyřešit mezní podmínku  $a = \varepsilon R$ . Tentokrát máme už vyjádřené všechny potřebné veličiny ve vztazích (32) a (33), resp. (34) a (35), proto rovnou píšeme podmínku pro prokluzování válce, (37) pro  $a > 0$  a (38) pro  $a < 0$ ,

$$g \frac{4m + 2m_1 - M(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{M + 16m + 4m_1 + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}} > g \frac{MR^2 f \cos \alpha}{J}, \quad (37)$$

$$g \frac{4m + 2m_1 - M(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{M + 16m + 4m_1 + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}} < -g \frac{MR^2 f \cos \alpha}{J}. \quad (38)$$

Řešení těchto nerovnic se liší znaménkem – můžeme je tedy spojit do jedné, společné podmínky (39),

$$f < \frac{J}{MR^2 \cos \alpha} \cdot \frac{|4m + 2m_1 - M \sin \alpha|}{\frac{J}{R^2} + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2} + M + 16m + 4m_1}. \quad (39)$$

Obě podmínky (36) a (39) skutečně vyšly stejně, přestože druhý případ na první pohled nevypadá, že by měl mít řešení právě ve stejném tvaru.

Pokud bychom měli různý dynamický a statický koeficient tření, byla by správně metoda z případu, kdy válec neprokluzuje. V případě metody druhé bychom museli jako poslední krok nahradit dynamický koeficient statickým, čímž bychom opět dospěli ke stejnému závěru. Poznamenejme však, že pokud by se koeficienty lišily, mohli bychom dostat komplikovaný trhavý pohyb.

Nyní se vraťme k rozboru  $a \geq 0$  v případě prokluzujícího válce. Nejprve poznamenejme, že v případě  $a = 0$ , tedy

$$4m + 2m_1 - M(\sin \alpha \pm f \cos \alpha) = 0,$$

musí nutně platit také  $\varepsilon = 0$ , protože nepůsobí žádný moment roztáčející válec. V tomto případě tedy válec neprokluzuje, a konkrétně setrvává na místě, stejně jako celá soustava. Dále tedy uvažujeme pouze  $a \neq 0$ , díky čemuž můžeme všechny následující nerovnosti uvažovat ostré.

Soustava se bude pohybovat v kladném směru, pokud bude splněna nerovnost  $a > 0$  pro  $a$  ze vzorce (32), tedy

$$4m + 2m_1 - M(\sin \alpha + f \cos \alpha) > 0. \quad (40)$$

Naopak v záporném směru se bude pohybovat pokud bude splněna nerovnost  $a < 0$  pro  $a$  ze vzorce (34), tedy

$$4m + 2m_1 - M(\sin \alpha - f \cos \alpha) < 0. \quad (41)$$

Nerovnosti nemohou být splněny současně, tedy dostáváme jednoznačnou předpověď vývoje systému. Neplatnost žádné z nich však neimplikuje platnost druhé, tedy může nastat situace, kdy nebude splněna ani jedna z nich. Úvahou můžeme dospět k tomu, že pak musí válec neprokluzovat – tento fakt nyní odvodme.

Předpokládejme, že nerovnosti (40) a (41) nejsou splněné – jsou tedy splněné nerovnosti

$$\begin{aligned}4m + 2m_1 - M(\sin \alpha + f \cos \alpha) &< 0, \\4m + 2m_1 - M(\sin \alpha - f \cos \alpha) &> 0.\end{aligned}$$

Z obou z nich vyjádříme  $f$  a spojením výsledků (liší se opět pouze znaménkem) dostáváme nerovnost

$$f > \frac{1}{\cos \alpha} \frac{|4m + 2m_1 - M \sin \alpha|}{M} > f_{\text{mez}} \frac{MR^2}{J} > f_{\text{mez}},$$

kde jsme využili toho, že pro každé těleso platí  $J < MR^2$ , kde  $R$  značí největší vzdálenost bodu tělesa od osy, vůči které počítáme moment setrvačnosti, v našem případě poloměr (okraj od středu). Tím jsme ověřili platnost nerovnosti (36), a tedy válec skutečně neprokluzuje. Vzhledem k tomuto výsledku nesplnění jedné z nerovností (40) nebo (41) automaticky implikuje splnění druhé z nich (pokud víme, že válec prokluzuje).

Při zadaných počátečních podmínkách se tedy musíme podívat na nerovnost (36), zda válec prokluzuje, nebo ne. Pokud prokluzuje, musíme ověřit nerovnost (40), abychom zjistili, jakým směrem se bude pohybovat, a podle toho použili příslušné vyjádření zrychlení.

### Úloha III.P . . . srdeční

*Odhadněte, jakou práci vykoná lidské srdce na pumpování krve za jeden den. S čím se dá tato energie srovnat? Jaké procento z doporučeného denního příjmu energie tvoří váš odhad?*

Nejdříve proberme, jak vlastně srdce pracuje. Srdce je sval, který svými stahy zajišťuje oběh krve v těle. Skládá se ze dvou síní a dvou komor. Přes pravou síň a komoru pumpuje krev do plic, skrz levou síň a komoru proudí krev do zbytku celého těla<sup>34</sup>. Srdce tedy funguje jako živá pumpa, jejíž nejvýraznější podíl na práci má tlakově-objemová práce  $W_p$ . Vedle toho stahy srdce udělí krvi jistou rychlost, můžeme mluvit o kinetické práci  $W_k$ . Celkovou práci srdce  $W$  tedy budeme počítat jako

$$W = W_k + W_p. \quad (42)$$

Hustota krve je udávána<sup>35</sup> jako  $\rho = 1\,060 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Objem každé komory je<sup>36</sup> zhruba 70 ml. Z těchto údajů můžeme ze známého vzorečku  $m = V\rho$  vypočítat hmotnost krve vypuzené při jednom stahu  $m = 74,2 \text{ g}$ . Také se udává, že srdce udělí

<sup>34</sup><https://cs.wikipedia.org/wiki/Srdce>

<sup>35</sup>[http://www.wikiskripta.eu/index.php/Krevní\\_řečiště](http://www.wikiskripta.eu/index.php/Krevní_řečiště)

<sup>36</sup>[http://www.wikiskripta.eu/index.php/Biomechanika\\_krevního\\_oběhu](http://www.wikiskripta.eu/index.php/Biomechanika_krevního_oběhu)



krvi při vypuzování rychlost  $v = 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Z těchto údajů už můžeme vypočítat celkovou kinetickou práci srdce

$$W_k = 2 \frac{1}{2} m v^2 = 0,019 \text{ J}$$

kde faktor 2 je přítomen kvůli tomu, že počítáme dvě komory.

Pro výpočet tlakově-objemové práce budeme potřebovat ještě tlaky, pod kterými je krev vypuzována z komory. Protože krev je vypuzována při tzv. systole, budeme v našem přiblížení pracovat se systolickým tlakem, který je v případě levé komory roven<sup>37</sup>  $p_l = 16 \text{ kPa} = 120 \text{ mmHg}$ , v případě pravé komory je to  $p_p = 2 \text{ kPa} = 15 \text{ mmHg}$  (ještě jednou připomeňme, že objemy obou komor jsou shodně po 70 ml)

$$W_p = V(p_l + p_p) = 1,26 \text{ J}.$$

Tento vzorec platí jenom v přiblížení, kdy srdce krev natlakuje o  $p_l$ , resp.  $p_p$ , téměř okamžitě a udržuje stálý tlak počas systoly – pokud to neplatí, bude práce nižší. To není daleko od pravdy<sup>38</sup>, srdeční stahy jsou hodně prudké.

Z rovnice (42) můžeme vypočítat, že  $W = 1,28 \text{ J}$ . Vidíme, že kinetická práce je zanedbatelná vůči tlakově-objemové. Navíc díky rozdílům systolických tlaků můžeme tvrdit, že největší podíl na tomto čísle má tlakově-objemová práce levé komory. Uvedená práce srdce  $W$  se vztahuje na jeden stah srdce. Proto musíme číslo vynásobit počtem stahů za den, abychom získali práci srdce za jeden den  $W_{\text{den}}$ . Průměrná tepová frekvence je uváděna<sup>39</sup> zhruba  $70 \text{ tep}\cdot\text{min}^{-1}$ . Den má 1 440 minut. Za den máme tedy 101 000 tepů. Vynásobením prací srdce  $W$  dostaneme, že srdce za den spotřebuje  $W_{\text{den}} = 130 \text{ kJ}$ .

Podívejme se dál, jaký podíl z celkové energie srdce spotřebuje. Samozřejmě to závisí na každém člověku. Pokud vezmeme nějakého konkrétního člověka (70 kg, 175 cm, 25 let, muž) máme doporučenou denní dávku energie<sup>40</sup>  $W_{\text{ddp}} = 9590 \text{ kJ}$ .

Z předchozích údajů už můžeme spočítat, že podíl energie  $\eta$ , kterou spotřebovává srdce, je

$$\eta = \frac{W_{\text{den}}}{W_{\text{ddp}}} = 1,4\%.$$

Z různých zdrojů můžeme pro tento podíl najít dvě různé hodnoty (no opravdu, zkuste si to). Toto číslo platí pouze v tom případě, že účinnost srdce je  $u' = 100\%$ . Ale účinnost srdce v klidu je udávána<sup>41</sup> zhruba  $u = 10\%$  (při zátěži vzrůstá). Proto do srdce neputuje pouze 1,4% energie, ale sedmkrát vyšší procento.

Do porovnávání nebudeme započítávat účinnost srdce (tzn. budeme brát 1,3 MJ na den) a budeme hledat, jaké množství jídla dokáže pohánět srdce celý den. Hledáme v internetových kalorických tabulkách<sup>42</sup>. Odpovídá tomu například 0,7 l pomerančového džusu nebo 2-3 bílé rohlíky nebo např. 220 g tvarohu.

<sup>37</sup>[http://www.wikiskripta.eu/index.php/Biomechanika\\_krevního\\_oběhu](http://www.wikiskripta.eu/index.php/Biomechanika_krevního_oběhu)

<sup>38</sup><http://www.cvphysiology.com/Cardiac%20Function/CF024>

<sup>39</sup><https://www.sportvital.cz/sport/klidova-srdecni-frekvence>

<sup>40</sup><http://www.kaloricke-tabulky.cz/nastroje/denni-kaloricky-prijem>

<sup>41</sup>[http://www.wikiskripta.eu/index.php/Biomechanika\\_krevního\\_oběhu](http://www.wikiskripta.eu/index.php/Biomechanika_krevního_oběhu)

<sup>42</sup><https://www.kaloricketabulky.cz/search.php>

## Úloha IV.1 . . . svitková relativita

Pohádkové postavy to nemajú ľahké, chytí-li zistiť, kedy sa objavujú na scéně. Dnešní technika jim to ale usnadňuje. Treba princezna Pointa z pohádky o dĺžke šiest kapitoly. Všetchny kapitoly jsou stejně dlouhé, a tak každá na Karlově displeji měří 1200 pixelů na výšku (samotný displej ale zobrazí jen výšku 900 px). Při čtení Karel souvisle scrolluje a navíc čte pořád stejně rychle. Po třech minutách od začátku čtení Pointa minula první konec posuvníku ve scrollbaru a po sedmi minutách i druhý. V kolikáté kapitole se objeví Pointa?

*Poznámka:* Poměr výšky posuvníku vůči výšce displeje je stejný jako poměr výšky displeje vůči výšce celého textu pohádky.

Celé riešenie budeme vzťahovať ku začiatku textu. Označíme rýchlosť posúvania obrazovky  $v$ , počet kapitoly  $N$ , dĺžka jednej kapitoly  $d$ , výšku displeja  $l$ , čas, kedy Pointa minula dolnú časť posuvníka  $t_1$  a čas kedy minula hornú časť posuvníka  $t_2$ .

Ako prvé určíme pomer výšky posuvníka ku výške displeja. Zo zadania je zrejme, že platí

$$k = \frac{p}{l} = \frac{l}{Nd} = \frac{1}{8}.$$

Karel číta rýchlosťou  $v$  a teda horný okraj obrazovky sa mu posunie za čas  $t$  na polohu

$$y_1(t) = vt.$$

Dolný okraj obrazovky je stále od horného vzdialený o  $l$ , čiže jeho poloha vzhľadom ku začiatku textu je

$$y_2(t) = y_1 + l = vt + l.$$

Situácia je o trochu komplikovanejšia oproti hornému a dolnému okraju obrazovky, avšak nie o veľa. Posuvník budeme opäť vzťahovať ku začiatku textu, čiže vždy má polohu horného okraja obrazovky plus to, o čo sa posunie vzhľadom k hornému okraju obrazovky pri scrollovaní. Na to aby sme text posunuli o  $vt$  musíme posuvník posunúť o  $vtk$ . Pre horný okraj posuvníka potom dostávame

$$y_3(t) = y_1 + y_1 k = vt(1 + k)$$

Dolný okraj posuvníku je od horného posunutý o  $p$ , čo je z rovnice pre pomer posuvníku a výšky displeja  $lk$

$$y_4(t) = y_3 + lk = vt(1 + k) + lk.$$

Naša neznáma je  $x$  – poloha Pointy. Dolný okraj sa bude nachádzať v  $x$  v čase  $t_1$  a horný v čase  $t_2$ . Dostávame sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych (rýchlosť čítania  $v$  a poloha Pointy  $x$ ),

$$y_4(t_1) = x,$$

$$y_3(t_2) = x,$$

z čoho pre  $x$  dostávame

$$x = \frac{kt_2}{t_2 - t_1} \doteq 197 \text{ px},$$

čo je ešte prvá kapitola, teda Pointa sa objaví ešte v prvej kapitole.

## Úloha IV.2 . . . ryvové kyvadlo

Je známou skutočnosť, že aby bola jízda vlakem čo najpohodlnější, pak při rozjíždění a brzdění je potřeba, aby se zrychlení měnilo co nejméně. Proto je dobré, když se vlak rozjíždí s malou konstantní změnou zrychlení. Změna zrychlení se nazývá ryv. Určete, jak se v čase mění stabilní poloha kyvadla (úhel odklonění od svislice  $\varphi$ ). Délku kyvadla označme  $l$ , vlak se rozjíždí na rovině, ryv označme  $k$  ( $k = \frac{\Delta a}{\Delta t}$ , kde  $a$  je zrychlení) a vlak jede po Zemi s normálním tíhovým zrychlením  $g$ .

*Bonus:* Sestavte pohybové rovnice, které numericky vyřešte pro  $\varphi(0) = 0$  a  $\frac{d\varphi}{dt}(0) = 0$  pro různé hodnoty  $k$ .

Zaujímá nás, ako sa zmení uhol  $\varphi_0$ , pri ktorom na kyvadlo pôsobí nulový moment sily. Hľadáme teda funkciu  $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ . Keď sa kyvadlo nakloní, môžeme výslednú silu naň pôsobiacu rozdeliť na vertikálnu zložku  $F_g = mg$ , kde  $m$  je hmotnosť kyvadla a  $g$  je tiažové zrýchlenie, a na horizontálnu zložku  $F = ma$ , kde  $m$  je opäť hmotnosť kyvadla a  $a$  je zrýchlenie vlaku. To môžeme navyše vyjadriť z definície ryvu

$$k = \frac{da}{dt}$$

ako  $a = kt$ . Z rovnováhy momentov síl vyplýva, že tangens uhla  $\varphi_0$  vieme vyjadriť pomocou rovníc uvedených vyššie ako

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{F_a}{F_g} = \frac{ma}{mg} = \frac{kt}{g},$$

z čoho už rýchlo dopočítame hľadanú funkciu

$$\varphi_0 = \text{arctg } \frac{kt}{g}.$$

### *Bonus*

Na kyvadlo pôsobí moment sily

$$\tau = -F_g l \sin \varphi + F_a l \cos \varphi.$$

Vieme, že moment sily a uhlové zrýchlenie  $\varepsilon$  kyvadla sú spojené vzťahom  $\tau = I\varepsilon$ , kde  $I = ml^2$  je moment zotrvačnosti (matematického) kyvadla. Platí teda

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{g}{l} \left( \frac{kt}{g} \cos \varphi - \sin \varphi \right).$$

Toto je pohybová rovnica kyvadla; neprekvapivo, hmotnosť z nej zmizla,  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a dĺžku kyvadla si zvolíme  $l = 10 \text{ m}$  (mohli by sme ju meniť, ale

nedostali by sme tým žiadne zaujímavejšie trajektórie). Na jej riešenie využijeme Python, konkrétne knižnicu scipy. Nasledujúci program dostane na príkazovom riadku hodnotu  $k$  a vypíše hodnoty  $t, \varphi, \varphi_0$  počas prvých 30 s pohybu.

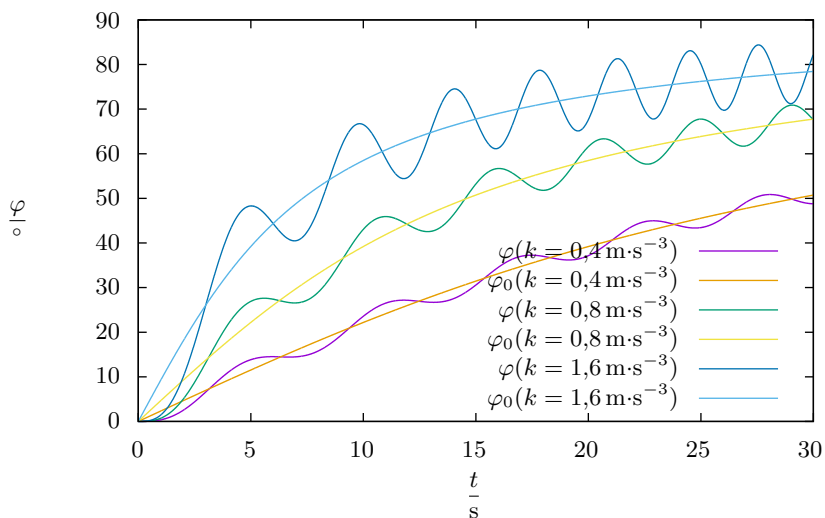
```
import numpy as np
import scipy.integrate as sp
import sys

g, l, k = 9.81, 10, float( sys.argv[1] )
PTS = 3000

def rhs( y, t, g, l, k ): return [ k*t/l * np.cos(y[1]) - g/l * np.sin(y[1]),
    y[0] ]

y0 = [ 0, 0 ]
t = np.linspace( 0, 30, PTS+1 )
y = sp.odeint( rhs, y0, t, args = (g, l, k) )

for i in range(PTS): print( t[i], y[i][1] * 180/np.pi, np.arctan(k*t[i]/g) *
    180/np.pi )
```

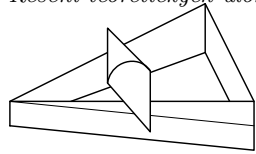


Obr. 15: Závislosť výchylky kyvadla na čase

Funkcie  $\varphi(t), \varphi_0(t)$  pre  $k = 0,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$ ,  $k = 0,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$  a  $k = 1,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$  (je to riadny gigant) sú v grafe 15.

### Úloha IV.3 ... dvojkužel

Mějme dřevěnou konstrukci, která má půdorys rovnoramenného trojúhelníku a výška jejích dvou ramen roste směrem k základně s úhlem  $\alpha = 2^\circ$ . Do vrcholu naproti základně  $c = 35$  cm, u něž má trojúhelník úhel  $\beta = 70^\circ$ , umístíme dvojkůžel s vrcholovým úhlem  $\varphi = 40^\circ$  a výškou  $2h = 40$  cm. Kůžel se samovolně začne valit „do kopce“, tedy ve směru růstu hran trojúhelníku.



- Vysvětlete, proč se dvojkůžel může kutálet do kopce.
- Jak závisí poloha těžiště kůželu na uražené vzdálenosti?
- Jaká je rychlost kůžele těsně před nárazem na základnu?
- Kolik otáček kůžel vykoná během své cesty?

Na počátku je kůžel umístěn horizontálně na konstrukci tak, že jeho těžiště se nachází přesně nad vrcholem trojúhelníku proti základně.

Nejprve poznamenejme, že pokud umístíme kůžel přesně na vrchol konstrukce, tak při rozjezdu zapadne do konstrukce, čímž už při „nulové“ poloze získá jistou energii. Proto interpretujme zadání tak, že kůžel už je mezi rameny a je velmi blízko k samotnému vrcholu.

Přístupme k problému nejprve tak, že úhel  $\alpha$  je malý, a proto budeme uvažovat, že těžiště kůželu leží svisle nad body dotyku (při pohledu z boku). Ve skutečnosti se však bude válec dotýkat ramen konstrukce tak, že spojnice bodu dotyku a osy kůžele bude kolmá na „povrch“ konstrukce. Na konci toto formulujeme přesněji a povíme si, kde se řešení bude lišit.

Označme  $x$  vzdálenost ujetou dvojkůželem (měřenou podél výšky trojúhelníkového půdorysu). Dále označme  $2y$  vzdálenost ramen trojúhelníka v bodě  $x$  (vzdálenost bodů dotyku dvojkůželu s trojúhelníkem),  $r$  poloměr řezu dvojkůžele v bodě dotyku s trojúhelníkem a  $R$  maximální poloměr řezu dvojkůželem (v jeho středu). Tyto rozměry můžeme vyjádřit následovně,

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \\ r &= (h - y) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \\ R &= h \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Když si správně rozmyslíme geometrii, vidíme, že pro výšku těžiště platí

$$t = \frac{x}{\cos \frac{\beta}{2}} \operatorname{tg} \alpha + r - R = x \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right),$$

kde jsme zvolili nulovou hladinu (přidali třetí, konstantní člen) tak, aby v počáteční poloze byla výška těžiště nulová. První člen popisuje, jak se s rostoucím  $x$  zvedají boční stěny konstrukce, a druhý člen, jak se roztahují, v důsledku čehož klesá

těžiště. Zavedme ještě pro pozdější využití koeficient  $k$  jako závorku v předchozím vztahu, abychom mohli jednoduše psát  $t = kx$ .

Jelikož se systém musí vyvíjet tak, že potenciální energie se bude minimalizovat, musí být závorka v předchozím výrazu záporná, pokud chceme, aby se dvojkužel valil „do kopce“, tedy do směru, kde  $x$  roste. Pak při růstu  $x$  bude skutečně potenciální energie klesat. Dosazením zadaných parametrů vidíme, že v tomto případě se skutečně bude dvojkužel valit „do kopce“.

Dále budeme předpokládat, že kužel neprokluzuje, tedy pro translační a rotační rychlost platí vztah

$$v = r\omega = \omega(h - y) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (43)$$

Po dosazením za rychlosti  $v$  a  $\omega$  vztahy

$$v = \frac{dx}{d\tau},$$

$$\omega = \frac{d\Phi}{d\tau},$$

kde  $\tau$  značí čas, můžeme rovnost (43) zintegrovat a získat vztah pro úhel  $\Phi$ , o který se kužel otočil při posunu do polohy  $x$ ,

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (h - x \operatorname{tg} \frac{\beta}{2})} = - \frac{\log \left( 1 - \frac{x}{h} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}.$$

Odtud získáme počet otáček jako

$$N(x) = \frac{\Phi(x)}{2\pi}.$$

Jelikož je otázka polohy nárazu komplikovanější, prozatím předpokládejme, že známe konečnou polohu válce  $x$ , kterou označme jako  $\xi$ , a vypočteme příslušnou rychlost kužele před nárazem. K poloze  $\xi$  se vrátíme vzápětí.

K výpočtu rychlosti použijeme ZZE v následujícím tvaru,

$$-mgk\xi = \frac{1}{2}mv^2(\xi) + \frac{1}{2}J \frac{v^2(\xi)}{r^2(\xi)}.$$

Odtud snadno vyjádříme rychlost

$$v(\xi) = \sqrt{\frac{-2gk\xi}{1 + \frac{J}{mr^2(\xi)}}}.$$

Nyní si uvědomme, že dvojkužel bude mít stejný výraz pro moment setrvačnosti jako kužel<sup>43</sup> (jedná se o součet momentů setrvačnosti dvou kuželů o poloviční

<sup>43</sup> Z toho důvodu v textu nerozlišujeme důsledně rozdíl mezi kuželem a dvojkuželem.

hmotnosti). Hodnota momentu setrvačnosti kužele vzhledem k jeho rotační ose je<sup>44</sup>

$$J = \frac{3}{10}mR^2 = \frac{3}{10}mh^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

V tuto chvíli trochu předběhneme a uvedeme, že vyjde  $\xi \doteq 18,1$  cm. Po dosažení rozměrů systému dostáváme rychlost dvojkuželu před nárazem  $v(\xi) = 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a počet otáček dvojkuželu před nárazem  $N(\xi) = 0.6$ . Tedy na přibližně 18 cm se dvojkužel zrychlí na  $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a při tom se otočí pouze o něco málo víc než půl otočky.

#### Podmínky nárazu a místo kolize

První podmínka pro místo nárazu, která nás napadne, je

$$\xi = \frac{c}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} - R = \frac{c}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} - h \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Toto však platí pouze v případě, kdy je v bodě nárazu těžiště kuželu níže než je výška koncového mantinelu (nárazové stěny), musíme tedy ověřit nerovnost

$$k\xi + R \leq \frac{c}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Pokud je podmínka splněna (v našem případě není), máme správné vyjádření pro  $\xi$ . V opačném případě může kužel pokračovat dál, jelikož jeho nejvzdálenější část je nad koncovým mantinelem. K nárazu dojde v jiné hodnotě  $x$ , kterou opět nazveme  $\xi$  (lépe řečeno bude po tomto rozboru  $\xi$  v každém případě odkazovat na správnou hodnotu  $x$ , kdy dojde k nárazu). Nyní  $\xi$  vyjádříme jako

$$\xi = \frac{c}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} - \Delta x, \quad (44)$$

jen musíme nalézt danou hodnotu  $\Delta x$ . Při nárazu bude osa kuželu vzdálená  $\Delta x$  od koncového mantinelu a těžiště bude nad vrškem mantinelu o výšce danou výrazem

$$\Delta H(\xi) = k\xi + R - \frac{c}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \frac{\beta}{2}},$$

kde  $\xi$  je jako v (44).

Nyní už dostáváme z Pythagorovy věty rovnici pro  $\Delta x$ , a sice

$$R^2 = \Delta x^2 + \Delta H^2(\xi).$$

Jelikož však odsud dostaneme závislost  $\Delta x(\xi)$ , je určující až rovnice pro  $\xi$  ve tvaru

$$\xi = \frac{c}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} - \Delta x(\xi),$$

<sup>44</sup> Tato hodnota už lze nalézt v literatuře nebo si ji můžete sami ověřit integrováním  $r^2 dm$ .

ze které už skutečně<sup>45</sup> dostaneme hodnotu  $\xi$ , kterou však zde nebudeme konkrétně vyjadřovat kvůli složitosti výrazu, který stejně nebudeme potřebovat. Předpokládejme tedy, že nyní známe správnou hodnotu  $x$ , kdy dojde k nárazu – a pojmenujme ji  $\xi$ . V našem případě je  $\xi \doteq 18,1$  cm. Pokud bychom uvažovali první podmínku pro místo nárazu, dostali bychom podle očekávání nižší hodnotu, a sice  $\xi = 17,7$  cm.

Aby však k nárazu došlo, nesmí kužel propadnout dovnitř trojúhelníka, než vůbec dojde k zadní stěně. Musíme tedy ověřit nerovnost  $h \geq y(\xi)$ , tedy

$$h \geq \xi \operatorname{tg} \frac{\beta}{2},$$

kteřá opravdu je splněna.

### Přesnější řešení

Pokud bychom chtěli vzít v potaz i korekci na úhel  $\alpha$ , výraz pro výšku těžiště by nabyl tvaru

$$t = \frac{x}{\cos \frac{\beta}{2}} \operatorname{tg} \alpha + r \cos \alpha' - R \cos \alpha'.$$

Ve druhém členu faktor  $\cos \alpha'$  odráží fakt, že těžiště není svisle nad body dotyku kuželu s konstrukcí, ale kolmo nad rovinou, která by vznikla, pokud bychom na naši konstrukci (bez válce) položila desku.

Úhel  $\alpha'$  můžeme vypočítat tak, že v poloze  $x$  je deska ve výšce  $x \operatorname{tg} \alpha'$ , kterou také umíme spočítat tak, že jsme se posunuli podél ramene (stoupajícího pod úhlem  $\alpha$ ) o vzdálenost  $x/\cos(\beta/2)$ , tedy platí

$$\begin{aligned} x \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{x}{\cos \frac{\beta}{2}} \operatorname{tg} \alpha, \\ \cos \alpha' &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} = \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \doteq 0,999. \end{aligned}$$

Vidíme, že pro malé  $\alpha$  a ne příliš velké  $\beta$ , jako v našem případě, můžeme faktor  $\cos \alpha'$  zanedbat.

Válec by měl nenulovou složku rychlosti i ve svislém směru, pro velikost rychlosti by pak platilo

$$v = \frac{\sqrt{dx^2 + dt^2}}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} \sqrt{1 + \left(\frac{dt}{dx}\right)^2} = \frac{dx}{d\tau} \sqrt{1 + k^2}.$$

Výsledný úhel  $\Phi$  by se tedy měl dělit faktorem  $\sqrt{1 + k^2}$ . Jelikož  $\sqrt{1 + k^2} \doteq 1,045$ , tak také tento faktor šel zanedbat pro naši kombinaci úhlů. Do vztahu pro finální rychlost se tento faktor nedostane, protože stále bude platit ZZK v totožném tvaru, resp. jediná změna bude, že  $k$  bude mít trochu jinou hodnotu.

<sup>45</sup> Tato rovnice je kvadratická, budeme si tedy muset rozmyslet, který kořen je ten správný. Bude to ten nižší, protože vyšší bude odpovídat analogické hodnotě  $\xi$ , ale až za mantinelem.



Při nárazu bude osa kuželu vzdálená  $\Delta x$  od koncového mantinelu a těžiště bude nad vrškem mantinelu o výšku danou výrazem

$$\Delta H(\xi) = k\xi + R \cos \alpha' - \frac{c}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Pokud bychom uvažovali první model (v jistých uspořádáních tohoto experimentu také správný), pak bychom dostali podmínku nárazu

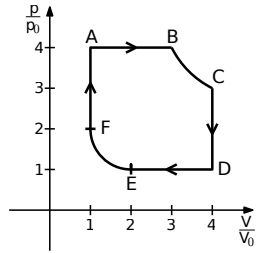
$$\xi = \frac{c}{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} - R(1 - \sin \alpha').$$

Pro naše hodnoty (malý úhel  $\alpha$  především vzhledem k úhlu  $\beta$ ) vyšly všechny výsledky téměř úplně stejně, jako kdybychom zanedbali faktory  $\cos \alpha'$  a  $\sqrt{1+k^2}$ .

#### Úloha IV.4 . . . plynový stroj

Mějme tepelný stroj naplněný ideálním plynem složeným z dvouatomových molekul. Tento tepelný stroj vykonává kruhový děj ABCDEFA, tedy skládá se z šesti dějů

- $A \rightarrow B$  – izobarické zahřátí ze stavu  $4p_0$  a  $V_0$  (teplotu v A označme jako  $4T_0$ ) do stavu s objemem  $3V_0$ ,
- $B \rightarrow C$  – izotermická expanze na objem  $4V_0$ ,
- $C \rightarrow D$  – izochorické ochlazení na tlak  $p_0$ ,
- $D \rightarrow E$  – izobarické ochlazení na objem  $2V_0$ ,
- $E \rightarrow F$  – izotermická komprese na objem  $V_0$ ,
- $F \rightarrow A$  – izochorické zahřátí na tlak  $4p_0$ .



Uřete zbývající stavové veličiny ve stavech B, C, D, E a F, maximální a minimální teplotu ideálního plynu v průběhu děje (v násobcích  $T_0$ ), teplo přijaté či odevdané plynem v jednotlivých dějích a účinnost tepelného stroje. Srovnajte tuto účinnost s účinností Carnotova stroje pracujícího se stejnými maximálními a minimálními teplotami. Pro jednoduchost uvažujte, že se nemění látkové množství plynu ve stroji a nedochází v něm k chemickým přeměnám.

Bonus To samé proveďte pro jednodušší cyklický „čtvercový“ děj, tedy ABCDA, kde plyn začíná ve stavu  $p_0$ ,  $V_0$  a  $T_0$  a izochoricky se ohřeje na  $4p_0$ , izobaricky se zahřeje a rozepne na  $4V_0$ , izochoricky ochladí na  $p_0$  a izobaricky se ochladí na  $V_0$ . Srovnajte účinnosti těchto dvou tepelných strojů a diskutujte, který je lepší.

Pro zpracování úlohy budeme potřebovat znát jednotlivé děje v plynech a vůbec základy termodynamiky. Zde budeme předpokládat, že toto znáte v rozsahu např. studijního textu P. Šedivý: *Kruhový děj s ideálním plynem*, který je součástí knihovničky Fyzikální olympiády.<sup>46</sup>

<sup>46</sup>Text naleznete na webové adrese <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kruhdej.pdf>

Tab. 1: Hodnoty stavových veličin

$i$	$p_i$	$V_i$	$T_i$
A	$4p_0$	$V_0$	$4T_0$
B	$4p_0$	$3V_0$	$12T_0$
C	$3p_0$	$4V_0$	$12T_0$
D	$p_0$	$4V_0$	$4T_0$
E	$p_0$	$2V_0$	$2T_0$
F	$2p_0$	$V_0$	$2T_0$

Nejprve si připomeňme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru  $p_i V_i = nRT_i$ , kde  $n$  je látkové množství plynu (tj. kolik molů plynu je uzavřeno v našem stroji), které se nebude měnit a  $R$  je molární plynová konstanta. U ostatních veličin je uveden index  $i$ , protože se nám mohou a budou měnit, ale tato stavová rovnice nám říká, že dvě veličiny z trojice  $p_i$ ,  $V_i$ ,  $T_i$  nám už vždy určí tu třetí.

Účinnost tepelného cyklu můžeme určit ze vztahu

$$\eta = \frac{Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}},$$

kde  $Q_{\text{in}}$  je celkové teplo přijaté plynem v průběhu jednoho cyklu a  $Q_{\text{out}}$  je teplo odevzdané chladiči (v tomto případě brané s kladným znaménkem). Také bychom mohli účinnost vypočítat z podílu vykonané práce a přijatého tepla, což je ekvivalentní, ale bude praktičtější pracovat pouze s teplem.

Připomeňme si také jednotlivé tepelné děje, ze kterých se náš cyklický děj skládá. Za kladné vždy považujeme teplo, které plyn přijímá od tepelného rezervoáru na vyšší teplotě a záporné je teplo, které plyn předává tepelnému rezervoáru na nižší teplotě. Asi nejjednodušší je izochorický děj, v jehož průběhu se nemění objem plynu a tím pádem se ani nekoná žádná práce. Teplo, které přijme dvouatomový plyn při přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  je  $Q_V = 5(p_j - p_i)V/2$ . V průběhu izobarického děje je konstantní tlak, ale mění se objem plynu. Teplo, které přijme dvouatomový plyn, je  $Q_p = 7p(V_j - V_i)/2$ . Nakonec si vzpomeneme na nejsložitější, izotermický děj, při kterém se mění jak tlak, tak objem a plyn v průběhu děje přijme teplo  $Q_T = p_i V_i \ln \frac{V_j}{V_i} = p_j V_j \ln \frac{V_j}{V_i}$ .

Nyní jsme již vyzbrojeni znalostmi pro dopočtení všeho. Nejprve určíme stavové veličiny  $p$ ,  $V$  a  $T$  pro všechny stavy ze stavové rovnice, a to v násobcích  $p_0$ ,  $V_0$  a  $T_0$ . Hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1.

Nyní vidíme, že minimální teplota, které plyn v průběhu cyklu dosáhne, je  $2T_0$  a maximální teplota je  $12T_0$ . Tím jsme odpověděli na jednu z otázek v zadání. Ihned můžeme odpovědět i na další, a to, jakou účinnost by měl Carnotův cyklus pracující na těchto teplotách. Účinnost Carnotova stroje je maximální účinnost, kterou může tepelný stroj pracující mezi tepelnými rezervoáry o teplotách  $T_{\text{max}}$  a  $T_{\text{min}}$  dosáhnout:

Tab. 2: Tepla, která přijme plyn v průběhu dějů

$i \rightarrow j$	$Q_{ij}$
AB	$28p_0V_0$
BC	$12p_0V_0 \ln \frac{4}{3}$
CD	$-20p_0V_0$
DE	$-7p_0V_0$
EF	$-2p_0V_0 \ln 2$
FA	$5p_0V_0$

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{2T_0}{12T_0} = \frac{5}{6} \doteq 83,3\%.$$

Účinnost Carnotova cyklu a tedy maximální účinnost tepelného stroje je 83,3%.

Když máme stavové veličiny, můžeme určit tepla, která plyn přijme v jednotlivých dějích. Za kladné považujeme teplo vstupující do stroje a za záporné teplo, které stroj odevzdává chladiči. Tepla opět určujeme v násobcích  $p_0$  a  $V_0$ . Pokud máte raději  $nRT_0$ , pak je to samozřejmě ekvivalentní zápis. Tepla jsou uvedena v tabulce 2.

Pravděpodobně jste touto úlohou popsali více papíru, ale jak vidíte, tak když si všechno napíšete do tabulek, tak je to relativně jednoduché a přímočaré. Tedy nyní nám stačí dosadit za  $Q_{\text{in}} = Q_{\text{AB}} + Q_{\text{BC}} + Q_{\text{FA}}$  a  $Q_{\text{out}} = |Q_{\text{CD}} + Q_{\text{DE}} + Q_{\text{EF}}|$  do vztahu pro účinnost. Vychází nám pak účinnost  $\eta \doteq 22,1\%$ . To je zhruba 27% maximální účinnosti, které by dosáhl plyn s Carnotovým cyklem. Slabinou obou cyklů je však izotermický děj, který je zpravidla relativně pomalý, protože se musí vyrovnávat postupně se změnou objemu vyrovnávat i tlak tak, aby byla teplota konstantní.

### Řešení bonusové úlohy

Bonusová úloha byla tentokrát opravdu jednoduchá, protože stačilo vypočítat ještě jednodušší úlohu. Pro přehlednost používáme stejné značení jako u předchozí hlavní úlohy, ale vztahuje se ke stavům, které odpovídají tomuto tepelnému stroji. Známe tlaky a objemy plynu v jednotlivých stavech, určíme si ještě teploty

$$T_A = T_0, \quad T_B = 4T_0, \quad T_C = 16T_0, \quad T_D = 4T_0.$$

Vidíme, že v průběhu cyklu musíme dosahovat větší maximální a menší minimální teploty plynu. Účinnost Carnotova cyklu na těchto teplotách by byla dokonce  $\eta_{\max} = 1 - 1/16 \doteq 93,8\%$ .

Určíme teplo, které bude přijímat či odevzdávat plyn v jednotlivých dějích:

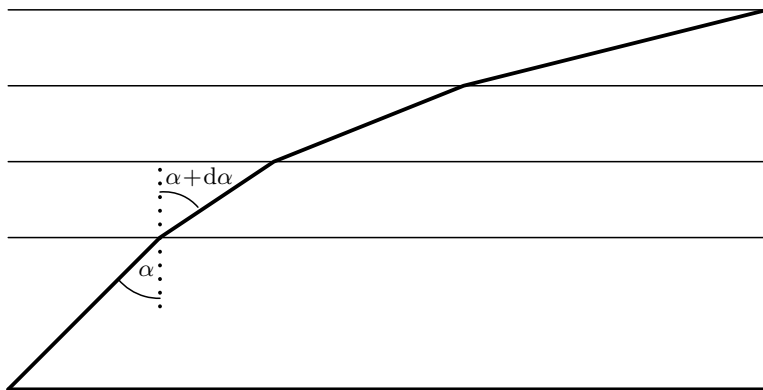
$$Q_{\text{AB}} = \frac{15}{2}p_0V_0, \quad Q_{\text{BC}} = 42p_0V_0, \quad Q_{\text{CD}} = -30p_0V_0, \quad Q_{\text{DA}} = -\frac{21}{2}p_0V_0.$$

Nezbývá než určit účinnost, která je  $\eta \doteq 18,2\%$ . Závěrem bychom měli srovnat oba děje. Evidentně bude těžší vyrobit stroj, který bude využívat cyklus z bonusové úlohy, protože podíl maximální a minimální teploty je více než 2,6násobný vůči prvnímu ději. To, že v průběhu děje je podíl teplot šestnáctinásobný, bude náročné na součástky, ve kterých děj probíhá. Dále je také o něco méně praktický vzhledem k účinnosti, kterou má menší než tepelný stroj z hlavní části úlohy. Jediný argument, který mluví ve prospěch stroje v bonusové úloze, je ten, že má méně stavů a méně dějů. Je tedy jednodušší a může probíhat v principu rychleji, ale to stejně neznamená, že je snáze realizovatelný.

## Úloha IV.5 . . . divná atmosféra

Zažili jste už někdy takovou divnou atmosféru? Do určité výšky je v ní rychlost šíření světla konstantní  $v_0$  a od určité hranice se rychlost šíření světla začne lineárně zvětšovat podle vztahu  $v(\Delta h) = v_0 + k\Delta h$ . V jednom místě, právě ve výšce, kde se začala měnit rychlost světla, vyšleme světelné paprsky pod všemi možnými úhly směrem nahoru. Ukažte, že se budou všechny paprsky pohybovat po částech kružnic a určete poloměry těchto kružnic. Také určete vzdálenost od místa vypuštění paprsků, kde se paprsky vrátí do původní výšky.

Atmosféra pro nás začne být zajímavá od hranice, na které se začne měnit rychlost světla. Nakresleme si tedy okolí této hranice 16.



Obr. 16: Paprsek lámající se na infinitezimálních vrstvách Divné atmosféry.

Situaci si můžeme namodelovat jako řadu oddělených prostředí s infinitezimální tloušťkou a s odlišnou rychlostí světla. Pro lom světla na hranici každého jednoho takového prostředí poté můžeme využít Snellův zákon, tedy

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

kde  $\alpha$  je úhel dopadu a  $\beta$  je úhel lomu.

Vzhledem k tomu, že s rostoucí výškou roste i rychlost světla, plyne pak ze Snellova zákona i následné zvětšení úhlu lomu, odtud poté plyne, že infinitezimálnímu nárůstu výšky bude odpovídat infinitezimální zvětšení úhlu lomu. Označíme-li si tedy úhel dopadu jako  $\alpha$  a úhel lomu jako  $\alpha + d\alpha$ , dostaneme rovnost

$$\frac{\sin(\alpha + d\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Nyní použijeme goniometrický vzorec pro sinus součtu, přibližné vztahy  $\sin(d\alpha) \approx 0$  a  $\cos(d\alpha) \approx 1$  a vyjádření rychlosti v závislosti na výšce ze zadání

$$1 + \frac{d\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 + \frac{k dx}{v_1}.$$

Rovnost poté upravíme na tvar

$$\frac{v_1 \cos \alpha}{k \sin \alpha} = \frac{dx}{d\alpha}.$$

S využitím goniometrických funkcí získáme vztah pro infinitezimální dráhu, kterou světlo urazí

$$ds = \frac{dx}{\cos \alpha}.$$

Definice poloměru křivosti trajektorie v daném bodě je  $R = \frac{ds}{d\alpha}$ , dosazením tedy získáme poloměr křivosti naší křivky v daném bodě

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{v_1}{k \sin \alpha}.$$

Zde si ale můžeme všimnout, že až na konstantu  $k$  nám vyšel stejný poměr jako při použití Snellova zákona. S jeho využitím tedy můžeme psát pro každou vrstvu

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \dots = \frac{\sin \alpha_n}{v_n}.$$

Takže křivka bude mít konstantní poloměr křivosti. Označíme-li si vzdálenost od místa vyslání paprsku k místu, kde se paprsek vrátí na stejnou výšku, jako  $d$  a využijeme-li vztahu pro poloměr křivosti v daném bodě, získáme vztah

$$d = 2R \cos \alpha = 2 \frac{v_0}{k} \cotg \alpha,$$

kde  $\alpha$  značí příslušný úhel dopadu paprsku vůči normále k hranici atmosféry.

Křivka tedy bude mít konstantní poloměr křivosti po celé své délce a pro paprsek vyslaný pod úhlem  $\alpha$  vzhledem ke směru růstu rychlosti světla v divné atmosféře (svisle vzhůru) bude platit, že se do původní výšky vrátí ve vzdálenosti  $d = 2 \frac{v_0}{k} \cotg \alpha$ .

## Úloha IV.P . . . statistikův denní chléb

Známe to všichni, krajíc chleba namazaný medem nebo marmeládou, zakousneme se a najednou je kapka mazačky na ruce a jsme za prasata. Spočítejte, jak závisí pravděpodobnost, že v krajíci bude díra skrz naskrz, v závislosti na jeho tloušťce. Model kynutí těsta necháme na vás. (Třeba rovnoměrně rozmístěné bubliny s exponenciálně rozděleným poloměrem je dobrý model.)

*Model jedné bubliny*

Nejdřív je potřeba udělat si pořádek v pojmech. Budeme tedy uvažovat rovnoměrně rozdělené bubliny s exponenciálně rozděleným poloměrem. Počet bublin označíme  $k$ . Bubliny uvažujeme kulovité. Za rovnoměrné rozmístění považujeme to, když středy bublin budou ve vrcholech krychlové mřížky s délkou hrany  $r > 0$ . Exponenciální rozdělení je rozdělení náhodné veličiny  $x$  takové, že:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases},$$

kde  $f(x)$  je hustota pravděpodobnosti a  $\lambda > 0$ . Zintegrováním od minus nekonečna do  $x$  snadno zjistíme, že její distribuční funkce  $F(x)$  (tedy pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny je menší než  $x$ ) je pro  $x$  nezáporné rovna  $1 - e^{-\lambda x}$ . Nyní uvažujme krajíc s danou tloušťkou  $d$ . Rozdělíme si práci na několik případů.

V prvním případě budeme uvažovat velmi zjednodušený model, kdy se v průběhu kynutí žádné dvě bubliny nespojí tak, aby společně vytvořily tunel. Potom nám stačí zanedbat šířku bublin (budeme tedy pro jednoduchost počítat pouze s jejich výškou). Také se nechceme starat o to, kde mají bubliny střed, proto řekneme, že střed je vždy ve výšce  $d/2$ . Potom lze s výškami bublin počítat jako s poloměry, tedy mají také exponenciální rozdělení, jenom konstanta  $\lambda$  bude poloviční. Výšky jednotlivých bublin jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny. Pravděpodobnost, že výška bubliny bude menší než  $d$ , je:

$$Pr(x < d) = \int_0^d \lambda e^{-\lambda x} dx = [\lambda e^{-\lambda x} (-\lambda^{-1})]_0^d = [-e^{-\lambda x}]_0^d = 1 - e^{-\lambda d}.$$

Tedy pravděpodobnost, že v krajíci nebude díra, tedy že žádná bublina nebude vyšší než  $d$ , je  $(1 - e^{-\lambda d})^k$ .

Abychom měli nějaký odhad, tak nastavme  $k = 800$  (Krajíc buď dlouhý 20 cm a široký 10 cm, bubliny mějte mezi sebou vzdálenost 1 cm. Více bublin nad sebou neuvažují a krajíc si aproximují obdélníkem s danými rozměry. Jeho obsah vynásobím čtyřmi, protože na jeden centimetr čtvereční krajíce připadají čtyři body bublinové mřížky.). Nedovolují bublinám, aby se spojovaly, tedy mě tloušťka krajíce nezajímá.

Letným pohledem na krajíc chleba (Šumava) vidíme, že děr s průměrem 1 cm je málo, ale kolem je spousta menších bublin, od boku střelme 1 000krát víc. Tedy  $\lambda = 6.9$  (to znamená, že pravděpodobnost, že výška bubliny přesáhne 1, tedy  $e^{-\lambda}$ , je zhruba 0.001). Potom pravděpodobnost, že při tomto modelu kynutí nebude

v krajici díra, je  $(1 - e^{-6.9d})^{800}$ , což je pro malá  $d$  nepříjemně malé číslo. Pokud si  $d$  zvolíme 1 (jednotka je 1 cm), tak je to zhruba 0.446 pro to, že nevznikne díra. Tento model je dostatečně přesný pro krajíc, jehož tloušťka je menší než vzdálenost mřížových bodů.

### Model více bublin

Ve druhém přiblížení si zpřesníme pojem „rovnoměrné rozmístění“. Nyní za něj budeme uvažovat to, že na jednotku objemu připadá konstantní počet bublin a že lze krajíc rozdělit na několik výškových sloupců, mezi nimiž se bubliny nebudou spojovat. To znamená, že najednou je počet bublin funkcí závislou na tloušťce krajíce, zafixujeme-li si jeho plochu. Za jednotku objemu si zvolíme  $1 \text{ cm}^3$ .

Ve druhém případě dovolíme, aby bubliny mohly být nad sebou a aby se bubliny v jednom výškovém sloupci mohly spojovat. To je ještě poměrně jednoduchý, ale realističtější model. Jediná změna je, že místo výšky jedné bubliny uvažujeme součet jejich výšek a chceme, aby byl menší než  $d$ . Je to ovšem jen horní odhad výšky tunelu, v reálném světě by se bubliny spojily a celková výška by byla menší.

Následuje část s pokročilejší matematikou, pokud chcete, můžete ji s čistým svědomím přeskočit.

Nyní chceme nějak odvodit, jaká bude hustota pravděpodobnosti pro spojené bubliny. Máme-li dvě nezávislé veličiny (výšky bublin jsou zřejmě navzájem nezávislé), pravděpodobnost, že nastanou obě zároveň, je součin jejich pravděpodobností. Chceme-li pravděpodobnost toho, že jejich součet bude roven  $z$ , jednu  $z$  veličin volíme nezávisle, tedy bude mít hodnotu  $x$ , a druhá už bude závislá na  $x$  s hodnotou  $z - x$ . Pokud bychom pracovali s diskrétními veličinami, které jsou navíc nezávislé, sečetli bychom takovéto součiny přes všechna  $x$  a měli bychom kýženou pravděpodobnost. Ale výška bubliny je spojitá. Analogie součtu přes všechny hodnoty spojitě veličiny je integrál.

Existuje věta z teorie pravděpodobnosti zabývající se součtem nezávislých náhodných veličin, říká se jí Věta o konvoluci: Jsou-li  $X, Y$  nezávislé náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami  $f_X, f_Y$ , pak má veličina  $Z = X + Y$  rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx,$$

kde  $z$  je hodnota součtu, tedy výška celého tunelu. Je sice jen pro součet dvou nezávislých náhodných veličin, ale je vidět (jak ukážeme níže), jak spočítat hustotu součtu tří, čtyř, . . . náhodných veličin. Jenom budeme muset odhadnout nějaké rozdělení možného počtu bublin nad sebou. Ten může nabývat kladných celočíselných hodnot, tedy je to diskrétní veličina. Ukrojme si nyní tlustší krajíc o výšce 1,5 cm stejných rozměrů, tedy v něm bude 2400 bublin a vždy budou tři nad sebou, tedy tam bude 800 trojic. To stačí, abychom ukázali, jak se počítá rozdělení součtu výšek více než dvou bublin nad sebou. Potřebujeme nyní spočítat hustotu rozdělení pro součet tří výšek bublin. Nejdřív to tedy spočítáme pro součet dvou (hustota

pro hodnoty menší než nula je nulová, tedy integrál uřízneme z jedné strany v nule ( $f(x)$ ) a z druhé v  $z$  ( $f(z-x)$ ),  $g$  bude pro záporné hodnoty také identická nula):

$$g(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda z + \lambda x} dx = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}.$$

Tedy to spočítáme pro tři bubliny nad sebou, tedy sečteme jednu a dvě bubliny:

$$h(z) = \int_0^z \lambda^2 x e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda z + \lambda x} dx = \int_0^z \lambda^3 e^{-\lambda z} x dx = \lambda^3 \frac{z^2}{2} e^{-\lambda z}.$$

Nyní potřebujeme spočítat pravděpodobnost, že tři bubliny nad sebou nepřesáhnou výšku  $d$ , využijeme metodu per partes:

$$\begin{aligned} Pr(x < d) &= \int_0^d \lambda^3 \frac{x^2}{2} e^{-\lambda x} dx = -\lambda^2 \frac{1}{2} d^2 e^{-\lambda d} + \int_0^d \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = \\ &= -\lambda^2 \frac{1}{2} d^2 e^{-\lambda d} + \lambda d e^{-\lambda d} + \int_0^d \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda d} \left( \frac{1}{2} \lambda^2 d^2 + \lambda d + 1 \right). \end{aligned}$$

Takto jsme spočítali pravděpodobnost, že bubliny v jednom výškovém sloupci společně nevytvorí tunel. Pro výpočet finální pravděpodobnosti stačí příslušné pravděpodobnosti vynásobit, tedy v našem případě pro  $k = 800$ ,  $\lambda = 6.9$  a  $d = 3$  (ted počítáme s krajícím tloušťky 3 cm, předtím to bylo jen 1 cm) vyjde víc než 0.999 pro to, že nevznikne díra.

Obecně, když kombinujeme několik exponenciálně rozdělených veličin, vznikne náhodná veličina s gamma rozdělením. To je ještě pokročilejší partie matematiky, tedy se gamma rozdělením tady nebudeme zabývat a zájemci necht' si ho najdou na internetu.

### Obecný model

Pro úplnost jenom zmíníme model, ve kterém se bubliny mohou protínat, tedy se jejich výšky mohou překrývat. Potom neplatí, že když součet výšek přesáhne  $d$ , tak v krající musí vzniknout díra. V tomto modelu je to, zda vznikne díra, závislé na poloze středů a je nad výpočetní i časové možnosti autorů alespoň přibližně určit hledanou pravděpodobnost. Jenom podotkneme, že ani tento model není přesný, neboť při opravdovém kynutí se středy bublin v chlebu navzájem pohybují v závislosti na více faktorech, například na hustotě a viskozitě těsta a na aktuální velikosti okolních bublin, což je dynamicky se vyvíjející model (všechny dosud zmíněné modely byly statické). V obecném modelu musíme navíc uvažovat náhodný počet bublin (třeba řídicí se Poissonovým rozdělením).

### Simulace

Napsali jsme simulaci Modelu více bublin v jazyce C++, zde uvádíme pseudokód:

```
int sloupec(double d, double lambda){
    int pocet := poissonovo_rozdeleni(d);
    for i := 0 to pocet-1 do vygeneruj_bublinu();
```



```

//stred rovnomerne na (0,d), polomer exponentialne s parametrem lambda
double horni_mez := dira_odspodu();
//nastavi si horni mez na 0 a hleda, jestli ji nejaka bublina protne
//pokud ano, nastavi si horni mez na horni okraj te bubliny a opakuje
if (horni_mez>1) return 1; //vznikla dira
return 0; //nevznikla dira
}

int main(void){
int p_sloupcu := poissonovo_rozdeleni(800);
int uspech := 0;
for i := 0 to p_sloupcu-1 do uspech := uspech + sloupec(d,6.2);
}

```

Raději ještě slovně popíšeme, co se v kódu děje. Nejprve si vytvoříme funkci `sloupec`, která simuluje jeden výškový sloupec. Vrátil 1, když v krajíci vznikla díra, a 0, když díra nevznikla. Tuto funkci pak dokola voláme tolikrát, kolik máme sloupců.

Výsledky vygenerované funkčním kódem pro různé poloměry ( $\lambda = 6.9$ ) jsou k vidění v tabulce 3. Každé měření jsme zopakovali 10 000krát, tedy můžeme říci, že jsme to změřili pro deset tisíc krajíců.

Tab. 3: Výsledky simulace

$d$	počet sloupců	počet děr	počet děravých krajíců
1	7 999 638	107 058	9 999
2	7 996 136	7 537	5 250
3	8 002 974	494	484
4	8 000 854	38	38
5	8 001 825	2	2

Tyto hodnoty vypadají rozumně pro hodně bublavý chleba. Vůbec ale nekorepondují s výpočty pro jednu bublinu, s výpočty pro více bublin si rozumí už více, ale stále moc ne. Vyšlo nám, že pro výšku 1 je pravděpodobnost vzniku díry téměř stoprocentní. Bude to nejspíš tím, že více parametrů volíme náhodně, a také to, že vzniká více bublin nad sebou.

Na závěr bychom chtěli uvést tabulku, ve které shrneme výsledky spočtených teoretických modelů. Ve sloupci „hodnota“ jsou uvedené pravděpodobnosti, že nevznikne díra.

Tab. 4: Výsledky měření

model	pravděpodobnost	hodnota pro $d = 1$
jedna bublina	$1 - (1 - e^{-\lambda d})^k$	0.446
více bublin	$1 - (1 - e^{-\lambda d} (\frac{1}{2}\lambda^2 d^2 + \lambda d + 1))^k$	$5.219 \cdot 10^{-12}$

U každého modelu  $k$  označuje počet výškových sloupců. U druhého modelu uvádíme pravděpodobnost pro tři bubliny nad sebou (proto vyšlo tak malé číslo), výpočet pravděpodobnosti pro jiný počet bublin je z výše uvedeného postupu zřejmý.

Ještě si musíme rozmyslet, jak jsou uvedené modely realistické. Model jedné bubliny se tváří, že by mohl být realistický pro hodně tenký chleba, tj. takový, ve kterém bude jen jedna bublina v každém sloupci. To má nevýhodu, že v reálném světě nevíme, jak přesně je takový krajíc tlustý, a bez toho nenastavíme konstanty. Model více bublin se snaží tohoto vyvarovat, ale vlastně trpí tím samým problémem – jak víme, že jsme trefili přesně tu tloušťku, kde jsou tři bubliny nad sebou? Simulující program se to snaží léčit tím, že pro každé zvolené  $d$  vygeneruje náhodně jiný počet bublin, ale i u něj může být problém, že jsme třeba špatně nastavili poměry.

## Úloha V.1 . . . vesmírný sněhulák

*Jakou silou bude přidržována hlava našeho sněhuláka, který si volně poletuje ve vesmíru? Máme sněhuláka tvořeného pouze homogenními koulemi o hustotě  $\rho$ , jejichž středy leží na jedné přímce a koule se dotýkají, jsou umístěné v pořadí od největší po nejmenší a s tím, že nejmenší koule (hlava) má poloměr  $r$  a každá další má dvojnásobný poloměr, co ta předchozí. Ve vesmíru je pouze náš sněhulák a nijak nerotuje.*

**Bonus:** *Zobecněte úlohu pro počet koulí  $N \geq 3$ . Bude se síla blížit nějaké konečné hodnotě pro  $n \rightarrow \infty$ , nebo půjde k nekonečnu?*

Řešme rovnou bonusovou úlohu a nakonec dostaneme výsledek základní verze dosazením  $N = 3$ . Koule si označme čísly od nejmenší 1 po největší  $N$ . Poloměr  $i$ -té koule bude  $r_i = 2^{i-1}r$ . Hmotnost  $i$ -té koule bude

$$m_i = \rho V_i = \frac{4}{3} \pi \rho r_i^3 = \frac{4}{3} \pi \rho 2^{3(i-1)} r^3.$$

Síla, kterou hledáme, je součtem jednotlivých sil

$$F_{\text{celk}} = \sum_{i=2}^N F_{1i} = \sum_{i=2}^N G \frac{m_1 m_i}{d_{1i}^2},$$

kde  $F_{1i}$  je gravitační síla mezi první a  $i$ -té kouli (kde  $i \geq 2$ ) a  $d_{1i}$  je vzdálenost jejich středů. Vzdálenost středů už není úplně triviální. Z první a  $i$ -té koule máme jeden poloměr a z koulí mezi nimi dvojnásobek poloměru. Rozepsat si to můžeme jako

$$d_{1i} = r_1 + 2(r_2 + \dots + r_{i-1}) + r_i = r(1 + 2(2 + 4 + \dots + 2^{i-2}) + 2^{i-1}).$$

Nyní využijeme vzorec pro součet konečné geometrické řady

$$\sum_{k=0}^K aq^k = a \frac{q^{K+1} - 1}{q - 1}.$$

$$d_{1i} = r \left( 1 + 4 \frac{2^{i-2} - 1}{2 - 1} + 2^{i-1} \right) = r (3 \cdot 2^{i-1} - 3) = 3r (2^{i-1} - 1).$$

Nyní můžeme dosadit všechno do síly

$$\begin{aligned} F_{\text{celk}} &= \sum_{i=2}^N G \frac{\frac{4}{3} \pi \varrho r^3 \frac{4}{3} \pi \varrho r^3}{(3r (2^{i-1} - 1))^2} = G \sum_{i=2}^N \frac{2^4 \pi^2 \varrho^2 r^4}{3^4} \frac{2^{3(i-1)}}{(2^{i-1} - 1)^2} = \\ &= \frac{\pi^2 \varrho^2 Gr^4}{3^4} \sum_{i=2}^N \frac{2^{3i+1}}{(2^{i-1} - 1)^2} \end{aligned}$$

Nejdříve dořešíme bonusové otázky. Jednak ihned vidíme, že pro  $i \rightarrow \infty$  platí  $F_{1i} \rightarrow \infty$ , dokonce roste řádově jako  $2^i$ . Tím pádem součet těchto členů půjde také do nekonečna. Pokud se pokusíme udělat nějaký částečný součet pro obecné  $N$ , tak když to například necháme spočítat Wolfram Mathematicu, tak dostaneme sumu nějakých ošklivých polynomů generovaných digamma funkcí a jejími derivacemi, takže nic pěkného. Takže nám bude stačit ještě ten relativně pěkný zápis, u kterého jsme skončili.

Řešením základní úlohy je

$$\begin{aligned} F_{123} &= \frac{\pi^2 \varrho^2 Gr^4}{3^4} \sum_{i=2}^3 \frac{2^{3i+1}}{(2^{i-1} - 1)^2} = \frac{\pi^2 \varrho^2 Gr^4}{3^4} \left( 128 + \frac{1024}{9} \right) = \frac{2^7 \cdot 17}{3^6} \pi^2 \varrho^2 Gr^4 \\ &\doteq \varrho^2 r^4 \cdot 2,0 \cdot 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2. \end{aligned}$$

Hustotu ani poloměr jsme neměli zadanou. Nicméně můžeme si říci, že máme třeba sněhuláka železného  $\varrho \doteq 7900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a nejmenší koule má poloměr  $r = 1 \text{ m}$ . Tedy na Zemi oproti člověku by to byl docela velký sněhulák, ale zase ve srovnání s velikostí planety by byl malý. V tom případě by hlava držela silou  $F_{123} \doteq 0,12 \text{ N}$ . Tedy držela by, ale slabě. Dokud nemáme v našem vesmíru nic jiného, ani průvan, ani makroskopickou elektromagnetickou interakci, tak by ta hlava držela. Samozřejmě kdyby někdo do hlavy trochu strčil, tak by pak sjela a nebyl by to už sněhulák, ale tři koule navzájem se dotýkající.

## Úloha V.2 ... koule ve vazkých tekutinách

V některých případech řešení úloh s odporem vzduchu či obecně tekutiny používáme pro odporovou sílu Newtonův vzorec  $F = C \varrho S v^2 / 2$ , kde  $C$  je součinitel odporu tělesa ve směru pohybu tělesa,  $\varrho$  je hustota tekutiny,  $S$  je průřez a  $v$  je rychlost

pohybu tělesa. Ten obvykle docela dobře platí pro turbulentní prostředí. Zajímáme se o kouli, pro kterou  $C = 0,50$ . V laminárním proudění pak obvykle používáme Stokesův vztah  $F = 6\pi\eta rv$ , kde  $\eta$  je dynamická viskozita tekutiny a  $r$  je poloměr koule. Pokud máme nějakou konkrétní kouli, je možné, aby se pro nějakou rychlost tyto odporové rovnaly? Jak bude tato rychlost záviset na poloměru koule?

Vzhledem k tomu, že otázkou je, jestli se mohou dva výrazy rovnat, tak matematickou odpovědí na takovou otázku je obvykle ano, pokud nedojde k nějakému sporu. Proto dáme síly do rovnosti s uvážením, že průřez koule je  $S = \pi r^2$

$$\frac{1}{2}C_{\rho}Sv^2 = 6\pi\eta rv \quad \Rightarrow \quad v_0 = 0 \quad \vee \quad v = \frac{12\pi\eta r}{C_{\rho}S} = \frac{24\eta}{\rho r}.$$

Zdá se, že jsme k nějakému sporu nedošli. Vypadá to, že požadovaná rychlost bude buď nulová<sup>47</sup>, nebo nepřímo úměrná poloměru koule. Triviální řešení, tedy že při nulové rychlosti budou obě síly nulové, je zřejmě správné. Pro jistotu si ještě můžeme dosadit hodnoty v netriviálním řešení, pro nějakou takovou běžnou kouli a běžnou tekutinu. Vybereme si železnou kuličku s poloměrem  $r = 1,0$  cm, která je ponořena do vody o hustotě  $\rho = 1,00$  g·cm<sup>-3</sup>. Voda má dynamickou viskozitu  $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3}$  Pa·s při pokojové teplotě. Výsledná rychlost je pak  $2,4 \cdot 10^{-3}$  m·s<sup>-1</sup>. To je relativně nízká rychlost. Pro vyšší rychlosti bude odhad odporové síly vyšší pro Newtonův vztah a pro nižší rychlosti bude vyšší pro Stokesův vztah.

Ve skutečnosti bychom neměli prakticky používat ve stejné oblasti oba vzorce, protože jeden je vhodný popis pro laminární proudění a druhý pro turbulentní. Ostatně vidíme, že bychom měli používat zpravidla ten odpor, který má vyšší hodnoty. Turbulentní se totiž stává proudění pro vysoké rychlosti a laminární je naopak v nízkých rychlostech. I když toto tvrzení není také úplně přesné, protože rychlost, která nám vyšla pro rovnost u koule, odpovídá řádově desítkám v hodnotě Reynoldsova čísla. To odpovídá ještě laminárnímu proudění a za turbulentní se považuje obvykle proudění od cca od hodnoty 1000 Reynoldsova čísla či o něco vyšší.

### Úloha V.3 . . . něk šíl přes cen srá

Představte si situaci, kdy máme 3 stejné nerotující disky, které se pohybují přesně v jedné přímce v pořadí 1, 2, 3. Všechny tři se pohybují bez tření a dalších odporových sil po vodorovné podložce, přičemž disky 1 a 2 jedou doprava a proti nim jede disk 3 doleva. Platí, že rychlost 1 je větší než 2. Jak závisí výsledné rychlosti disků po proběhnutí všech srážek na pořadí srážek? A jaké tyto rychlosti budou? Srážky probíhají pružně. (Jako vždy nezapomeňte, že odpověď je potřeba řádně zdůvodnit.)

*Bonus: Disky mají různou hmotnost.*

Naše 3 nerotující disky se pohybují po ose bez tření, o rychlostech (popořadě)  $v_{01}$ ,  $v_{02}$ ,  $v_{03}$  a srážejí se v centrálních srážkách, tj. nepracujeme s momenty sil,

<sup>47</sup>Zjevně pak na velikosti koule nebude záležet.

kteřé by způsobily nějaké vyosení disků. Jelikož se jedná o pružné srážky, bude pro ně platit zákon zachování energie i zákon zachování hybnosti. Pro srážku dvou disků s rychlostmi  $v_1, v_2$ :

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2, \quad (45)$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2. \quad (46)$$

Z těchto dvou rovnic si vyčíslíme výsledné rychlosti obou disků  $w_1, w_2$  po srážce:

$$w_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad (47)$$

$$w_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (48)$$

Uvažujeme-li, že všechny tři disky mají stejnou hmotnost, první člen v čitateli nám vypadává a zjišťujeme, že se nám při takové srážce rychlosti jen vzájemně prohodí. Tedy v našem případě, kdy 1. disk má nejvyšší rychlost, 2. má rychlost o něco nižší a poslední 3. disk má směr pohybu proti nim, existují 2 různé sekvence srážek.

1. sekvence začíná srážkou mezi nejrychlejším a 2. diskem, následuje srážka mezi 2. a 3. diskem, kde druhý je nyní z disků nejrychlejší a disponuje rychlostí  $v_{01}$ , na což navazuje srážka mezi, nyní se vracějícím, 2. diskem a diskem prvním. Soustava se tedy ustálí na rozložení rychlostí: první disk se pohybuje vůči zbylým dvěma diskům nazpět, a třetí se pohybuje rychlostí  $v_{01}$ .

2. sekvence pro změnu začíná nejprve srážkou mezi 2. a 3. diskem. Dosazením do (47) a (48) pozorujeme, že i v tomto případě se rozložení rychlostí ustálí stejně jako v předchozí sekvenci. Z čehož plyne, že v případě těchto pružných centrálních srážkách, že výsledná rychlost disků nezáleží na pořadí srážek.

### Bonus

Na základě rovnic (47) a (48) lze dopočítat jakoukoli konfiguraci hmotností disků a jejich počátečních rychlostí. Celkové množství variant všech hmotností a rychlostí bude obecně  $(3!)^2$  pro všechny hmotnosti a rychlosti různé (některé varianty ovšem vedou na méně srážek).

Výsledek získáme dosazením konkrétních hodnot a numerickým dopočítáním. Končíme ve chvíli, kdy rychlosti budou disků budou vzestupně seřazené, míněno  $v_1 < v_2 < v_3$ , to znamená, že již k další srážce nedojde.

Předpokládáme, že při různých hmotnostech na rychlostech záviset obecně bude. Pro ověření tohoto tvrzení stačí pouze najít jednu kombinaci hmotností a rychlostí, pro které nalezneme dva různé výsledky.

Představme si situaci, kdy máme rychlosti  $v_{01} = 3v_0, v_{02} = 2v_0, v_{03} = -v_0$  a disky o hmotnostech  $m_1 = m_0, m_2 = 10m_0, v_3 = m_0$ . Za použití zmíněných rovnic můžeme vypočítat konečné rychlosti po proběhnutí všech srážek (dvou). V prvním případě se nejprve srazí první a druhý disk, potom bude následovat jen

srážka mezi druhým a třetím. Naopak pokud se nejprve srazí druhý a třetí disk, bude následovat jen srážka mezi prvním a druhým. Číselné hodnoty výsledných rychlostí budou skutečně různé: v prvním případě  $\frac{143}{121}v_0$ ,  $\frac{194}{121}v_0$ ,  $\frac{579}{121}v_0$  a v druhém  $\frac{23}{121}v_0$ ,  $\frac{210}{121}v_0$ ,  $\frac{539}{121}v_0$ .

## Úloha V.4 ... na provázku

Dvě závaží zanedbatelných rozměrů o hmotnosti  $m = 100$  g spojíme pružným nehmotným provázkem o klidové délce  $l_0 = 1$  m s tuhostí  $k = 50$  kg·s<sup>-2</sup>. Jedno závaží držíme na místě a druhé kolem něj necháme rotovat s frekvencí  $f = 2$  Hz. První závaží se přitom může volně otáčet kolem své osy. V jednu chvíli držené závaží uvolníme. Na jakou minimální vzdálenost se k sobě závaží přiblíží? Neuvažujte vliv gravitačního pole a předpokládejte platnost Hookeova zákona.

Před uvolněním závaží, které se otáčí pouze kolem své osy, koná druhé závaží kruhový pohyb kolem prvního závaží. V tento okamžik platí rovnost mezi odstředivou silou  $F_d$  a silou pružnosti  $F_p$ :

$$m\omega^2 l = k(l - l_0), \quad (49)$$

kde  $l$  je délka nataženého provázku. Úpravou rovnice (49) dostáváme:

$$l = \frac{k}{k - m\omega^2} l_0 \doteq 1,46 \text{ m}. \quad (50)$$

V okamžiku, kdy původně statické závaží uvolníme, se začne soustava volně pohybovat prostorem. Abychom si zjednodušili popis situace, představíme si, že se „postavíme“ nad hmotný střed soustavy a budeme pozorovat, jak se závaží pohybují okolo nás. Úlohu pak vyřešíme úvahou.

Dříve než se první závaží uvolní, pohybuje se druhé závaží kolem prvního úhlovou rychlostí  $\omega$ . Tím, že si „stoupneme“ nad střed provázku (pozorovatel se nachází nad hmotným středem soustavy; se soustavou se však neotáčí) a budeme pozorovat, jak se závaží kolem nás otáčí, se nezmění úhlová rychlost, s jakou se závaží kolem nás zdánlivě pohybují.<sup>48</sup> Náhle se první závaží uvolní a v ten okamžik pozorovatel nacházející se nad hmotným středem soustavy pozoruje, jak se obě závaží kolem něj otáčejí. V ten okamžik se závaží otáčejí kolem něj stále s úhlovou rychlostí  $\omega$ .

Při rovnoměrném pohybu po kružnici by této úhlové rychlosti odpovídala odstředivá síla, která by se rovnala síle pružnosti provázku. Úvahou nebo jenom zkušeností můžeme rozhodnout, že takto vzatá odstředivá síla, která je určena z okamžité hodnoty úhlové rychlosti závaží a jeho hmotnosti, bude v nějakém okamžiku menší/větší/rovna než síla pružnosti a rozdíl těchto sil uvede závaží v radiálním směru (vůči pozorovateli nacházejícího se uprostřed provázku) do pohybu<sup>49</sup>.

<sup>48</sup> Což není na první pohled zcela zřejmý fakt, je potřeba si ho rozmyslet.

<sup>49</sup> Skutečně se můžeme omezit pouze na sílu odstředivou a pružnosti, není potřeba uvažovat Coriolisovu a Eulerovu sílu, které jsou spojeny s korotující soustavou (naše soustava nerotuje) a míří kolmo na radiální směr (tedy pohybovou rovnicí neovlivňují, mění ale moment hybnosti).

Napišeme pohybovou rovnici pro radiální směr

$$F(l) = -k(l - l_0) + m\omega^2 \frac{l}{2}. \quad (51)$$

*Pozn.:* Při našich úvahách přitom předpokládáme, že provázek splňuje Hookův zákon a že provázek se nemůže nějak jinak (příčně) deformovat či prověsit.<sup>50</sup> Stejně tak, jako se provázek může prodloužit, může se i zkrátit a síla pružnosti bude působit ven.

Dále s výhodou využijeme zákona zachování momentu hybnosti, přičemž moment hybnosti určíme z okamžiku těsně po upuštění:

$$L = 2m \left( \frac{l}{2} \right)^2 \omega, \quad (52)$$

kde  $L$  je moment hybnosti závaží pohybujiících se kolem středu provázku (tj. středu naší soustavy).

Okamžitou vzdálenost závaží od středu provázku zdefinujeme jako  $r = r(t) = l(t)/2$ .

Vyjádřením  $\omega$  z (52) a dosazením do (51) dostáváme pohybovou rovnici

$$\ddot{r} = \frac{F}{m} = \frac{kl_0}{m} - \frac{2kr}{m} + \frac{L^2}{4m^2r^3}. \quad (53)$$

Dostali jsme diferenciální rovnici druhého řádu, což není výsledek, který by nás na první pohled potěšil.

Obecně je analytické řešení diferenciálních rovnic složitější záležitostí, nemluvě ani o tom, že některé diferenciální rovnice analytické řešení nemají. Budeme proto problém řešit numericky, což je velice hojně používaná metoda. K řešení problému použijeme nejjednodušší numerickou metodu a to *Eulerovu metodu*.<sup>51</sup>

K tomu bude nutné všechny ostatní proměnné, které v rovnici (53) vystupují, určit číselně.

Začneme momentem hybnosti, ten určíme z počátečních podmínek

$$L = J\omega = 2m \left( \frac{l}{2} \right)^2 2\pi f. \quad (54)$$

Po dosazení dostáváme  $L = 1,342 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ . Do rovnice (53) zbývá už jen dosadit číselné hodnoty ze zadání.

Eulerova metoda ze znalosti vzdálenosti  $r_i$  v čase  $t_i$  určí zrychlení  $a_i$  (rovnice (53)) a pak jednoduše dopočítáme novou rychlost

$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t,$$

kde  $\Delta t$  je časový krok.

Stejně tak určíme polohu v čase o  $\Delta t$  později

$$r_{i+1} = r_i + v_i \Delta t.$$

<sup>50</sup>Což je splněno, protože nejsme v žádném gravitačním poli a provázek je nehmotný.

<sup>51</sup>Podrobněji např. v textu <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/modelov.pdf>

Výpočet pak provádíme iterativně. Dosazením do (53) dostáváme pro zrychlení výraz

$$a_i = -500(2r_i - 1) + \frac{45,02}{r_i^3}.$$

Jak vypadá takový rekurentní výpočet, je vidět v tabulce 5. Graf závislosti polohy na čase je pak na obr. 17. Z grafu vidíme, že závaží vykonávají kmitavý pohyb a jsme schopni určit minimální vzdálenost závaží od středu provázku:  $r_m = 0,59$  m. Nejkratší délka provázku je tedy  $l_m = 1,18$  m.

Tab. 5: Numerický výpočet

$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{r}{\text{m}}$	$\frac{a}{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$	$\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$
0,000	0,7308	-115,4	-0,1154
0,001	0,7307	-115,3	-0,2307
0,002	0,7305	-114,9	-0,3456
0,003	0,7301	-114,4	-0,4601
0,004	0,7296	-113,7	-0,5738
0,005	0,7291	-112,9	-0,6867
0,006	0,7284	-111,9	-0,7986
0,007	0,7276	-110,7	-0,9093
0,008	0,7267	-109,3	-1,0186
0,009	0,7257	-107,8	-1,1265
0,010	0,7245	-106,2	-1,2326

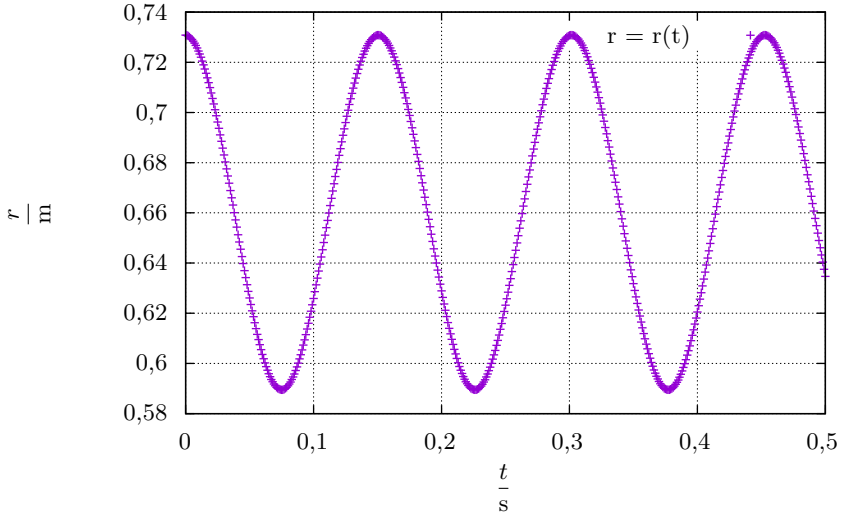
### Diskuze

Z grafu je vidno, že vzájemná vzdálenost obou závaží bude při jejich volném pohybu vždy větší, než je klidová délka provázku. Tento výsledek může na první pohled překvapit, ale lze to jednoduše vysvětlit velkou hodnotu odstředivé síly po celou dobu pohybu. Kvůli velké odstředivé síle (která se periodicky mění) zůstává provázek vždy napnutý a síla pružnosti bude závaží přitahovat k sobě (žádná singularita ve formě nulové vzdálenosti závaží tedy nenastává. Taky nemusíme řešit, zda bude provázek zmuchlaný pro  $l < l_0$ ).

Dále se můžeme ptát, jestli se pružina celou dobu mohla nacházet v mezích pružnosti. Lze jednoduše odečíst, že okamžitá vzdálenost pružin se vždy nacházela mezi 1,18 a 1,46 m, přičemž klidová délka je 1 m. To by znamenalo, že maximální relativní prodloužení je  $\varepsilon = 0,46$ , což je již značná hodnota. Při skutečném experimentu by se provázek u většiny běžných materiálů dostal za oblast meze úměrnosti, nejspíše by překročil i mez pevnosti. Protože ale nevíme, z jakého materiálu je provázek vyroben, nelze k tomuto bodu více dodat.

Náš výpočet tedy probíhal za předpokladu, že se závaží nacházejí celou dobu v oblasti meze pružnosti.





Obr. 17: Kmitavý pohyb

### Úloha V.5 . . . pouťový balónek

Máme balónek s hmotností (po nafouknutí)  $m$  a objemem  $V$  naplněný héliem, na kterém je přivázaná (prakticky nekonečná) stužka s délkovou hustotou  $\tau = 10 \text{ gm}^{-1}$ . Předpokládejte izotermickou atmosféru, pro níž je závislost atmosférického tlaku  $p$  na výšce  $z$  daná vztahem  $p = p_0 e^{-z/z_0}$  ( $z_0$  je parametr atmosféry). Balónek položíme k zemi a poté ho uvolníme. Do jaké maximální výšky balónek vyletí?

Nejprve musíme určit vztah mezi vztlakovou silou a hydrostatickým tlakem. Předpokládejme, že při posunutí se o nějaký malý kousek  $dz$  ve směru osy  $z$  se změní tlak o  $dp$ . Pak platí

$$dp = \rho(z)g dz.$$

Zároveň platí Archimédův zákon

$$F_{Vz} = V\rho(z)g = V \frac{dp}{dz}.$$

Další silou působící na balónek je tíha balónku a stužky daná vzorcem

$$F_g = mg + \tau gz.$$

Nyní již můžeme formulovat Newtonovu pohybovou rovnici, musíme si však uvědomit, že se nám mění hmotnost, která vystupuje na levé straně.

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p_0 V}{z_0} e^{-\frac{z}{z_0}} + mg + \tau gz.$$

což ze znalosti  $p = (m + \tau z) \frac{dz}{dt}$  můžeme dosadit a rozderivovat jako součin

$$(m + \tau z) \frac{d^2 z}{dt^2} + \tau \frac{dz}{dt}^2 = -\frac{p_0 V}{z_0} e^{-\frac{z}{z_0}} + mg + \tau gz.$$

V zadání je díra: s měněním se tlakem může balónek měnit i objem a nevíme jak. Pro tuhý balón je  $V = V_0$ , pro měkký izotermický  $pV = p_0 V_0$ , pro adiabatický  $pV^\kappa = p_0 V_0^\kappa$  a realita bude někde mezi. Zhrneme tedy všechny možnosti do jedné:  $p^\alpha V = p_0^\alpha V_0$ , kde  $\alpha$  je parametr mezi 0 (tuhý balón) a 1 (izotermický měkký balónek, adiabatický má  $\alpha = 1/\kappa < 1$ ).

Řešíme teď rovnici (bude se hodit nerozderivovaný tvar)

$$\frac{d}{dt} \left( (m + \tau z) \frac{dz}{dt} \right) = -\frac{p_0 V_0}{z_0} e^{-(1-\alpha) \frac{z}{z_0}} + mg + \tau gz. \quad (55)$$

Rovnici chceme „zintegrovat“ - přepsat ji do tvaru „časová derivace funkce je 0“; přenásobíme obě strany  $(m + \tau z) \frac{dz}{dt}$  a zjistíme, že levá strana se dá vyjádřit jako

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (m + \tau z)^2 \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right).$$

To jistě potřebujeme udělat s pravou stranou

$$g(m + \tau z)^2 \frac{dz}{dt} - \frac{p_0 V_0}{z_0} (m + \tau z) \frac{dz}{dt} e^{-(1-\alpha) \frac{z}{z_0}}.$$

První člen: využijeme pravidlo o derivaci složené funkce, tedy upravíme  $\frac{1}{\tau} \frac{dm + \tau z}{dt} = \frac{dz}{dt}$  a  $g(m + \tau z)^2 \frac{dz}{dt} = \frac{g}{3\tau} \frac{d(m + \tau z)^3}{dt}$ .

Druhý člen: obecně spočteme  $(m + \tau z) \frac{dz}{dt} e^{-kz}$ ; opět využijeme pravidla o derivaci složené funkce a součinu a dostaneme (zvlášť pro  $k = 0$ )

$$\begin{aligned} (m + \tau z) \frac{dz}{dt} e^{-kz} &= -\frac{1}{k} (m + \tau z) \frac{de^{-kz}}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{k} (m + \tau z) e^{-kz} \right) - \frac{\tau}{k} \frac{dz}{dt} e^{-kz} \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{k(m + \tau z) + \tau}{k^2} e^{-kz} \right); \\ (m + \tau z) \frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{(m + \tau z)^2}{2\tau} \right). \end{aligned}$$

My máme  $k = (1 - \alpha) \frac{1}{z_0}$ , pravá strana je tedy

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{g}{3\tau} (m + \tau z)^3 + \frac{p_0 V_0 z_0}{(1 - \alpha)^2} \left( (1 - \alpha) \frac{m + \tau z}{z_0} + \tau \right) e^{-(1-\alpha) \frac{z}{z_0}} \right)$$

a z rovnice (55) plyne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(m + \tau z)^2 \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 - \frac{g}{3\tau}(m + \tau z)^3 \\ & - \frac{p_0 V_0 z_0}{(1 - \alpha)^2} \left( (1 - \alpha) \frac{m + \tau z}{z_0} + \tau \right) e^{-(1-\alpha) \frac{z}{z_0}} \\ & = \text{konst.} . \end{aligned} \quad (56)$$

Z počátečních podmínek určíme integrační konstantu. Pouštíme z klidu, takže pro nulovou výšku máme nulovou rychlost a konstanta je

$$-\frac{g}{3\tau} m^3 - \frac{p_0 V_0 z_0}{(1 - \alpha)^2} \left( (1 - \alpha) \frac{m}{z_0} + \tau \right) .$$

Nás zajímá max. výška  $z = z_1$ , kde  $\frac{dz}{dt} = 0$ , tedy

$$\begin{aligned} & \frac{g}{3\tau}(m + \tau z_1)^3 - \frac{g}{3\tau} m^3 = \\ & = \frac{p_0 V_0 z_0}{(1 - \alpha)^2} \left( (1 - \alpha) \frac{m}{z_0} + \tau \right) - \\ & - \frac{p_0 V_0 z_0}{(1 - \alpha)^2} \left( (1 - \alpha) \frac{m + \tau z_1}{z_0} + \tau \right) e^{-(1-\alpha) \frac{z_1}{z_0}} . \end{aligned} \quad (57)$$

Vyřešme zvlášť případ  $\alpha = 1$  (dělíme nulou). Pak je pravá strana (55) rovná

$$-\frac{p_0 V_0}{z_0} + mg + \tau gz ;$$

zbytek je stejný a pro max. výšku dostaneme rovnici

$$\frac{g}{3\tau} ((m + \tau z_1)^3 - m^3) = \frac{p_0 V_0}{2\tau z_0} ((m + \tau z_1)^2 - m^2) \quad (58)$$

s řešením

$$z_1 = \frac{3}{2\tau} \left( \frac{p_0 V_0}{2gz_0} - m + \sqrt{\left( \frac{p_0 V_0}{2gz_0} \right)^2 - \frac{m^2}{3} + \frac{p_0 V_0}{3gz_0} m} \right) .$$

Na to, aby balón vzlétl, musí ovšem být  $m < \frac{p_0 V_0}{z_0 g}$ .

Zpátky k (57). Tuto rovnici nevyřešíme obecně, jenom numericky, nebo můžeme zkusit aproximovat. Nejdůležitější je zbavit se exponenciály.

- $(1 - \alpha)z_1 \gg z_0$ : exponenciála jde k nule,

$$\frac{g}{3\tau}(m + \tau z_1)^3 - \frac{g}{3\tau} m^3 \approx \frac{p_0 V_0 z_0}{(1 - \alpha)^2} \left( (1 - \alpha) \frac{m}{z_0} + \tau \right) ,$$

s řešením

$$z_1 \approx \frac{1}{\tau} \sqrt[3]{m^3 + \frac{3p_0 V_0 z_0 \tau}{g(1 - \alpha)^2} \left( (1 - \alpha) \frac{m}{z_0} + \tau \right) - \frac{m}{\tau}} .$$

- $(1 - \alpha)z_1 \ll z_0$ : exponenciálu aproximujeme jako  $1 - (1 - \alpha)\frac{z_1}{z_0} + (1 - \alpha)^2\frac{z_1^2}{2z_0^2}$  a máme

$$\tau^2 z_1^2 \approx 3 \left( \frac{p_0 V_0}{g z_0} - m \right) (m + \tau z_1) - 3 \frac{p_0 V_0}{2g z_0} \left( \tau + \frac{(1 - \alpha)m}{z_0} \right) z_1,$$

$$z_1 \approx \frac{3}{2\tau} \left( \frac{p_0 V_0}{2g z_0} \beta - m + \sqrt{\left( \frac{p_0 V_0}{2g z_0} \beta \right)^2 - \frac{m^2}{3} + \left( \frac{4}{3} - \beta \right) \frac{p_0 V_0}{g z_0} m} \right),$$

kde jsme označili  $\beta = 1 - \frac{(1 - \alpha)m}{\tau z_0}$ .

Všimněte si, že pokud je balón měkký a izotermický<sup>52</sup>, tedy tlak a teplota se rychle vyrovnávají s okolím, druhá aproximace platí pro libovolné výšky; v opačném případě taky platí, ale jenom pro malé výšky. První aproximace zas platí pouze pro dostatečně izolovaný balón a dostatečně velké výšky.

Pro běžné hodnoty (hmotnost řádově deset gramů, objem řádově litr,  $z_0 \doteq 7$  km) balón vzlétne jenom do malé výšky - hlavním důvodem je tah a váha stužky.

## Úloha V.P ... sklíčka

*Popište zobrazovací soustavy mikroskop (složený ze 2 spojek) a Keplerův dalekohled. Vysvětlete rozdíl ve funkci a konstrukci mikroskopu a dalekohledu a načrtněte průchod paprsků. Jak se dá smysluplně definovat zvětšení pro dané optické prvky? Odvoďte pro zvětšení konkrétní vzorce.*

Nejprve se podívejme, co musí obraz předmětu splňovat, abychom ho mohli vidět. V oku je spojná čočka, která z rozbíhajících se paprsků vytvoří skutečný obraz na sítnici. Současně je pro oko nejpohodlnější, když je obraz v dále, protože nemusí být akomodováno. Proto, abychom něco v libovolné zobrazovací soustavě viděli, měl by být obraz ideálně virtuální a v nekonečnu. Jiný obraz (virtuální nebo reálný) můžeme také pozorovat, ale oko musí zaostřit tak, aby ho zobrazilo přesně na sítnici a nikam jina.

Základní princip soustavy dvou spojek (Keplerův dalekohled se také skládá ze dvou spojek) tedy bude, že první čočka (objektiv) zobrazí předmět do ohniskové roviny druhé čočky (okuláru) a ta poté vytvoří obraz v nekonečnu<sup>53</sup>. Hlavní rozdíl je, že mikroskopem se zvětšují blízké předměty (tedy se jedná o zobrazení z blízka do nekonečna) a dalekohledem předměty vzdálené (zobrazení z nekonečna do nekonečna). Objektiv dalekohledu tedy vytvoří meziobraz ve své ohniskové rovině, kam musíme umístit také ohnisko okuláru.

<sup>52</sup> pro  $\alpha = 1$  je tento výsledek stejný jako dřív vypočtený přesně

<sup>53</sup> Takový obraz není virtuální v pravém slova smyslu, ale tento případ lze interpretovat jednak tak, že se vytvoří skutečný obraz v plus nekonečnu, nebo že se vytvoří virtuální obraz v minus nekonečnu, což je přesně to, co chceme.

Oproti tomu objektiv mikroskopu vytvoří meziobraz dále než ve své ohniskové rovině, a to podle zobrazovací rovnice

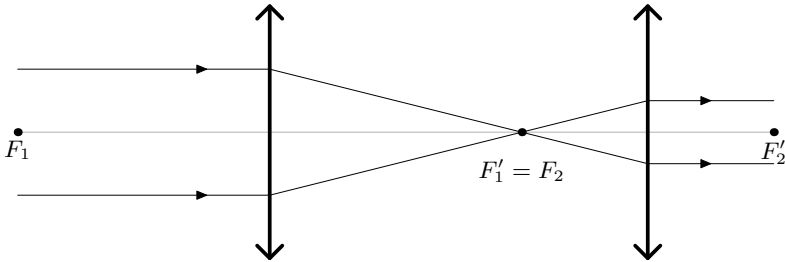
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_1} = \frac{1}{f_1},$$

kde  $a_1$  značí vzdálenost předmětu od objektivu,  $a'_1$  vzdálenost meziobrazu od objektivu a  $f_1$  ohniskovou vzdálenost objektivu. Mikroskop má typicky fixní vzdálenost objektivu a okuláru, a co se dá měnit, je vzdálenost  $a_1$ . Označme  $\Delta$  vzdálenost bližších ohnisek objektivu a okuláru tak, že je kladná, pokud je ohnisko  $F'_1$  nalevo od ohniska  $F_2$  (pro dalekohled by platilo  $\Delta = 0$ ). Potom můžeme zobrazovací rovnici psát ve tvaru

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{f_1 + \Delta} = \frac{1}{f_1}, \quad (59)$$

odkud lze vypočítat patřičnou vzdálenost  $a_1$ .

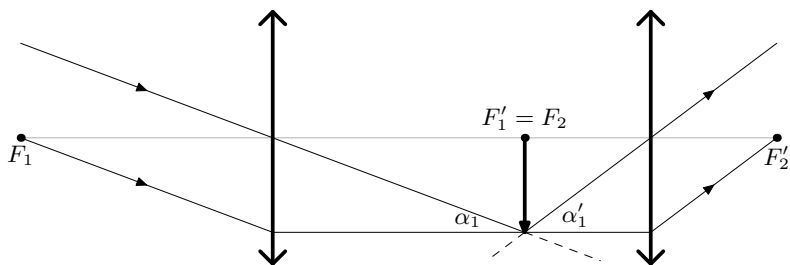
Kromě hvězdářských dalekohledů jsou ještě dalekohledy na pozemské vzdálenosti, které se však od obou soustav ze zadání liší – zobrazujeme předměty, ke kterým se můžeme dostat relativně blízko, a ohniska okuláru a objektivu nespływají. Je tady jistá podobnost s mikroskopy. V tomto případě však nelze měnit vzdálenost  $a_1$ , proto se mění vzdálenost  $\Delta$ , kterou můžeme vypočítat se stejné rovnice (59).



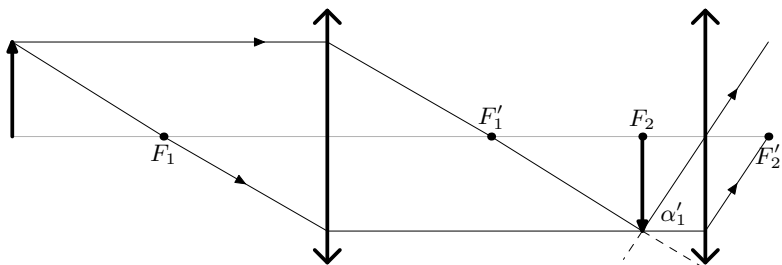
Obr. 18: Průchod horizontálních paprsků dalekohledem

Na obr. 18 a 19 vidíme průchod paprsků dalekohledem a na obr. 20 průchod mikroskopem. Současně je na obrázcích vidět, že do dalekohledu přichází paprsky z nekonečna a ohniska objektivu a okuláru splývají. Dále je předmět blízko k mikroskopu a na obr. 20 je vyznačena vzdálenost  $\Delta$ .

Smysluplné zvětšení je poměr úhlových velikostí, a to z jednoduchého důvodu. Velikost obrazu vytvořeného na sítnici oka závisí právě na úhlové velikosti předmětu. Pro mikroskop (lupu a další zobrazovací soustavy na blízko) se porovnává úhel obrazu v mikroskopu a úhel předmětu v konvenční zrakové vzdálenosti  $L = 25$  cm. Tato vzdálenost je zvolena proto, že čím blíže předmět je, tím větší ho vidíme (a zvětšení chceme porovnávat s nejlepším možným pozorováním pouhým okem), ale současně oko není schopné zaostřit libovolně blízké předměty. Konvenční zraková vzdálenost je blízkým bodem (nejbližší bod, na který jsme schopni zaostřit) průměrného lidského jedince.



Obr. 19: Průchod šikmých paprsků dalekohledem



Obr. 20: Průchod paprsků mikroskopem

V případě dalekohledu nemůžeme pozorovat předměty v konvenční zrakové vzdálenosti, proto je třeba zvětšení definovat jako poměr úhlových velikostí tělesa v dalekohledu a bez dalekohledu. To můžeme udělat díky tomu, že vzdálenost pozorovaných předmětů je výrazně vyšší, než jak moc jsme schopni se k těm předmětům přiblížit (tedy toto zvětšení nezávisí na naší poloze).

Při výpočtu zvětšení předpokládáme, že úhlové velikosti předmětu i obrazu jsou malé, tedy můžeme použít vzorce

$$\sin x \approx x,$$

$$\operatorname{tg} x \approx x.$$

Tuto aproximaci můžeme použít, protože mikroskopem koukáme na velice malé předměty a dalekohledem koukáme do velmi velké vzdálenosti. Jedná se o klasickou paraxiální aproximaci.

Spočtíme nyní zvětšení mikroskopu. Úhlová velikost předmětu je

$$\alpha = \frac{y}{L},$$

kde  $y$  je jeho příčný rozměr. Dále z podobnosti trojúhelníků na obr. 20 vidíme

$$\frac{y}{f_1} = \frac{-h}{\Delta} = \frac{-f_2 \alpha'}{\Delta},$$

kde  $h$  je příčná velikost meziobrazu (který je převrácený). Teď už můžeme psát vzorec pro úhlové zvětšení mikroskopu

$$\Gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{-\frac{y\Delta}{f_1 f_2}}{\frac{y}{L}} = -\frac{L\Delta}{f_1 f_2}.$$

K výpočtu zvětšení dalekohledu využijeme obr. 19. Interpretovat ho můžeme dvojím způsobem, buď je předmět vycentrovaný na optické ose a paprsky přichází od jeho horního kraje (a  $y$  je tedy jeho poloměr), nebo dolní okraj předmětu je na optické ose, paprsky také přichází od jeho horního kraje, ale  $y$  je jeho celý průměr. Úhel paprsků a optické osy odpovídá úhlu  $\alpha$  a úhel finálních paprsků, mířících do oka, s optickou osou je právě úhel  $\alpha'$ . Z obrázku je vidět

$$h = f_1 \alpha = f_2 \alpha',$$

kde jsme však nechali pro názornost pouze kladná znaménka. Protože bude obraz převrácený, musíme do vzorce pro zvětšení přidat minus. Nyní jednoduše vyjádříme zvětšení dalekohledu

$$\Gamma = -\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1}{f_2}.$$

Aby tedy dalekohled skutečně zvětšoval, musí mít okulár menší ohniskovou délku než objektiv. Nenechte se však zmást tím, že v tomto případě bude obraz předmětu dalekohledem příčně zmenšený (jak vidíme na obr. 18), záleží totiž především na úhlovém zvětšení.

Reálně využívané zobrazovací soustavy jsou složené z mnoha zrcadel, hranolů a čoček, které převrací obraz a především eliminují vady zobrazení – např. sférickou a chromatickou.

## Úloha VI.1 ... dost těžké kulometry

*Na auto připevníme dopředu dva kulometry, které vystřelují kulky o hmotnosti  $m = 25$  g rychlostí  $v_1 = 500$  m·s<sup>-1</sup>, každý s frekvencí 10 výstřelů za sekundu. Auto se rozjede po rovině rychlostí  $v_2 = 80$  km·h<sup>-1</sup> a poté začne střílet. Kolik nábojů vystřelíme, než auto zastaví? Během palby nepřidáváme plyn, odpor vzduchu a kol zanedbáváme. Tepelné ztráty uvnitř zbraní jsou taktéž zanedbatelné.*

Soustavu auta, kulometů a vystřelených projektilů považujeme za izolovanou. Buď v ní tedy platit zákon zachování hybnosti. Budeme tedy uvažovat tak, že auto předává postupně svou hybnost vystřeleným projektilům. Poté, co vystřelíme dostatečný počet projektilů, jejichž celková hybnost bude rovna počáteční hybnosti auta, auto bude mít nulovou hybnost a tedy bude stát.

Pokud bychom chtěli úlohu počítat přesně, bylo by to poněkud komplikovanější. Projektily se pohybují rychlostí  $v_p$  vůči autu, tedy velikost jejich hybnosti vůči vnějšímu pozorovateli bude rovna  $p_p = m(v_p + v_a)$ , přičemž rychlost auta se bude právě v důsledku střelby snižovat. Také se bude měnit hmotnost auta, jak budou projektily vystřelovány. To by vedlo k úvahám a výpočtům podobným těm, které

se používají při odvození Ciolkovského rovnice (kde se však počítá se spojitým tahem motoru). My se pokusíme situaci zjednodušit.

Rychlost projektilů vůči autu  $v_p = 500 \text{ ms}^{-1}$  je poměrně velká oproti rychlosti auta  $v_a = 22,22 \text{ ms}^{-1}$ . Na konci bude rychlost auta nulová. Jelikož střelíme kulky vždy po stejném krátkém časovém úseku a auto bude zpomalovat přibližně lineárně v čase, můžeme odhadnout průměrnou rychlost projektilů vůči zemi jako

$$v_{pp} = \frac{v_p + (v_p + v_a)}{2} = 511,1 \text{ ms}^{-1}.$$

Nyní je ještě třeba zhodnotit změnu hmotnosti auta. Terénní pick-upy, které jsou v některých oblastech běžně používány jako nosiče kulometů, váží kolem 2 t. Pokud by auto vystřelilo celkem 2000 projektilů, jejich celková hmotnost by byla 50 kg. To tedy můžeme vzhledem k celkové hmotnosti auta přibližně zanedbat. Podle zákona zachování hybnosti tedy bude platit

$$\begin{aligned} p_{celk} &= p_a = N p_{pp}, \\ M v_a &= N m v_{pp}. \end{aligned}$$

Z toho jednoduchými úpravami získáme počet vystřelených projektilů.

$$N = \frac{M v_a}{m v_{pp}}$$

Po dosazení  $M = 2 \text{ t}$  a zbylých hodnot dojdeme k výsledku, že je potřeba  $N \doteq 3479$  projektilů k zastavení auta. Auto však pravděpodobně úplně přesně nezastaví – jeden výstřel jej zpomalí na minimum rychlosti a následující výstřel jej už bude odtlačovat zpět. Pokud by kulometry střelily naráz, bude situace podobná, jen projektily budou pak 2, tedy nabraná rychlost bude ještě větší. Rychlost však bude poměrně malá, v řádu  $\text{cm s}^{-1}$ . Dá se odhadnout, že jeden výstřel by asi na znovouzpohybování auta nestačil.

Vidíme, že rozdíl v hmotnosti auta bude přibližně 87 kg. Celkově tedy bude k zastavení auta třeba méně projektilů v důsledku ztráty hybnosti snižováním hmotnosti auta.

Ještě může být zajímavé pokusit se úlohu vyřešit pomocí Ciolkovského rovnice a porovnat ji s předchozím výsledkem. Hmotnost projektilů je poměrně malá a kance je vysoká, takže by spojitá aproximace mohla být poměrně přesná. Podle Ciolkovského rovnice platí

$$\Delta v = v_e \log \frac{m_0}{m_1}$$

V našem případě je  $\Delta v = v_a$ ,  $v_e = v_p$ ,  $m_0 = M_0$  je počáteční hmotnost auta a  $m_1 = M_0 - m_p$  je hmotnost auta bez vystřelených projektilů, kde  $m_p$  je hmotnost vystřelených projektilů. To nám po úpravách dává

$$m_p = M_0 \left(1 - e^{-\frac{v_a}{v_p}}\right)$$

Tedy hmotnost je přibližně 87 kg, celkem tedy 3478 projektilů. To se liší od výše spočítané hodnoty jen o 1 projektil. To je vcelku pozoruhodné. V předchozím



výpočtu jsme pokles hmotnosti, který je nakonec asi 4 %, neuvažovali, zde jsme však došli k téměř stejnému výsledku.

Tyto výsledky můžeme nakonec porovnat s numerickým výpočtem, který uvažuje změny hmotnosti a rychlosti po každém výstřelu. Došli jsme k výsledku 3478 projektilů. To velmi přesně odpovídá našim předchozím výpočtům, při kterých jsme však použili různé aproximace, aby byl výpočet jednodušší.

## Úloha VI.2 ... upadlo

*Z jaké výšky nad povrchem neutronové hvězdy bychom museli „upustit“ předmět, aby dopadl na její povrch v rychlosti  $0,1c$  ( $0,1$  rychlosti světla). Naše neutronová hvězda má hmotnost  $1,5$ násobku hmotnosti Slunce a průměr  $d = 10$  km. Zanedbejte atmosféru neutronové hvězdy a její rotaci. Zanedbejte relativistické korekce. Srovnajte ale, jakého výsledku byste dosáhli, pokud by pád probíhal v homogenním gravitačním poli (které má intenzitu stejnou jako na povrchu planety) s tím, kdy pád probíhá v radiálním gravitačním poli.*

*Bonus: Uvažujte korekci na speciální teorii relativity v případě pádu v homogenním poli.*

Samozřejmě se na začátek domluvíme, že do hvězdy nebudeme házet nic, co má hmotnost řádově srovnatelnou s hvězdou, tj. nechť hmotnost našeho testovacího předmětu je zanedbatelná.

První odhad výšky potřebné k nabrání  $0,1c$  stanovíme uvažováním homogenního gravitačního pole. V takovém poli je intenzita gravitačního pole ve všech bodech stejná. Intenzita homogenního gravitačního pole je ekvivalentní gravitačnímu zrychlení na povrchu hvězdy

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

kde  $m$  je hmotnost předmětu,  $M$  je hmotnost neutronové hvězdy a  $\mathbf{e}_r$  je jednotkový vektor směřující do středu hvězdy.

V takovém poli vypočítáme dopadovou rychlost  $z$  rovnice

$$v = v_0 + gt,$$

kde dosazujeme  $v_0 = 0$ . Získáme dobu pádu  $t$ , pomocí které již jsme schopni vyjádřit počáteční výšku

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{d^2(0,1c)^2}{8GM} \doteq 56,51 \text{ m}.$$

Pokud uvažujeme radiální pole a vycházíme ze ZZE, stanovíme si kinetickou energii při dopadu jako rozdíl potenciálních energií při upuštění a při dopadu

$$\frac{1}{2}mv^2 = GmM\left(\frac{2}{d} - \frac{1}{R}\right).$$

Po dosazení  $v = 0,1c$  a  $R = r - d/2$  se dostáváme k vyjádření potřebné výšky

$$h = \left( \frac{1}{1 - \frac{(0,1c)^2 d}{4GM}} - 1 \right) \frac{d}{2} \doteq 57,16 \text{ m}.$$

### Bonus

Pracujme v sústave, kde sa neutrónová hviezda nehýbe. Intenzita tiažového poľa tu zostáva rovnaká a tiež sa nemusíme zaoberať kontrakciou dĺžky / dilatáciou času (tie existujú len v sústave spojenej s predmetom); jediná zmena je, že hmotnosť predmetu závisí na jeho rýchlosti podľa dobre známeho vzťahu

$$m = m_0 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

Druhý Newtonov zákon stále platí, musíme ale počítat so zmenami hmotnosti a použiť ho v tvare

$$F = mg = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Rozderivovaním dostaneme

$$mg = m \frac{dv}{dt} + m_0 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} v = m \frac{dv}{dt} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

kde môžeme vykrátiť  $m$  a zintegrovať (využijeme  $v(0) = 0$ ) na

$$v = c \operatorname{tgh} \frac{gt}{c}.$$

Dráhu prejdenú za daný čas dostaneme ako

$$h(t) = \int v dt = \frac{c^2}{g} \ln \cosh \frac{gt}{c},$$

z čoho pomocou vzťahu  $\operatorname{tgh}^2 x = 1 - \cosh^{-2} x$  dostaneme

$$h(v) = -\frac{c^2}{2g} \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = -\frac{d^2 c^2}{8GM} \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Pre  $v = 0,1c$  vychádza  $h = 56,80$  m. Rovnaký výsledok by sme dosiahli aj pri použití zákona zachovania energie

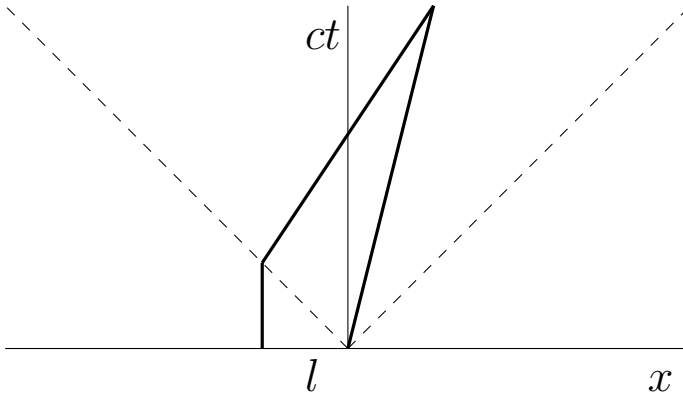
$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + (p^2 c^2)}.$$

Vďaka malej rýchlosti a hustej hviezde sú všetky tri výsledky veľmi podobné, ale keby sme chceli počítat s nehomogénnym poľom, vidíme, že musíme uvažovať aj špeciálnu relativitu, inak výsledok oveľa presnejší nebude. Dokonca vtedy potrebujeme aj všeobecnú relativitu, ktorá zmení výsledok o ďalšie desiatky percent - to sme vám ale za bonus dať nechceli.

## Úloha VI.3 . . . relativistický Zenonův paradox

Superman a Flash se rozhodli, že si dají závod. Závod se koná v hlubokém vesmíru, protože na Zemi není dostatečně dlouhá rovná pláž. Flash, protože je pomalejší, startuje s délkovým náskokem  $l$  před Supermanem. Flash v jednu chvíli vyběhne s konstantní rychlostí  $v_F$  srovnatelnou s rychlostí světla. Ve chvíli, kdy si Superman všimne, že Flash vyběhl, vyběhne také, a to konstantní rychlostí  $v_S > v_F$ . Za jak dlouho Superman Flashe dožene (z pohledu Supermana)? A za jak dlouho Flashe dožene Superman (z pohledu Flashe)? A byl vůbec závod spravedlivě odstartován, resp. dokázali byste vymyslet spravedlivější způsob (příčemž náskok  $l$  má být ponechán)?

Velmi efektivní metodou, jak řešit kinematické úlohy speciální teorie relativity, jsou prostorčasové diagramy. Jde o graf, kde na vodorovnou osu vynášíme prostorovou souřadnici a na svislou čas, resp. hodnotu  $ct$ . Jedna událost je pak v grafu reprezentována bodem a světočára (historie hmotného bodu) čarou. Protože je rychlost světla v rámci STR významnou konstantou, zakresluje se do diagramu i tzv. světelný kužel, tedy světočáry  $x = \pm ct$ .



Obr. 21: Časoprostorový diagram situace.

Pro řešení naší úlohy bude nejjednodušší vycházet z diagramu 21 vztaženého vůči pozorovateli stojícímu v klidu v místě, ze kterého startuje Flash. Na diagramu vidíme, přesně dle zadání, že Superman stojí, než k němu dorazí informace o vyběhnutí Flashe, poté vyběhává také.

Nyní určíme souřadnice událostí, kdy a kde se Superman s Flashem potkají, a také, kdy pro ně začneme měřit čas. Uvědomit si, že záleží na události, odkud pro oba závodníky měříme čas, a tyto události rozumně zvolit bylo součástí zadání. My si zde pro každého ze závodníků zvolíme jako počátek událost, kdy daný hrdina ze svého pohledu vyběhl. Souřadnice těchto počátků jsou  $(ct_{F0}, x_{F0}) = (0, 0)$

pro Flashe a  $(ct_{S0}, x_{S0}) = (l, -l)$  pro Supermana. Souřadnice události, ve které Superman dožene Flashe, získáme řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x &= v_F t \\x + l &= v_S \left( t - \frac{l}{c} \right),\end{aligned}$$

což jsou rovnice příslušných přímek v diagramu. Souřadnice zmíněné události jsou

$$(ct_C, x_C) = l \frac{c + v_S}{v_S - v_F} \left( 1, \frac{v_F}{c} \right).$$

Tyto časy a vzdálenosti jsou ale měřeny v klidové soustavě. Pokud chceme určit časy z pohledu závodníků, tedy jejich vlastní časy, musíme vzít v úvahu dilataci času

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2},$$

kde  $\Delta\tau$  je interval vlastního času,  $\Delta t$  interval času v klidové soustavě a  $v$  rychlost daného hrdiny vůči klidové soustavě. Odečtením časů událostí v klidové soustavě a aplikací dilatace času pak dostáváme vlastní časy Supermana a Flashe

$$\begin{aligned}\Delta\tau_S &= (t_C - t_{S0}) \sqrt{1 - \left( \frac{v_S}{c} \right)^2} = \frac{l}{c} \frac{c + v_F}{v_S - v_F} \sqrt{1 - \left( \frac{v_S}{c} \right)^2}, \\ \Delta\tau_F &= (t_C - t_{F0}) \sqrt{1 - \left( \frac{v_F}{c} \right)^2} = \frac{l}{c} \frac{c + v_S}{v_S - v_F} \sqrt{1 - \left( \frac{v_F}{c} \right)^2}.\end{aligned}$$

Závod ale nebyl odstartován příliš spravedlivě, z pohledu Supermana i Flashe vyběhl Flash dříve, než Superman.<sup>54</sup> Pokud bychom ale na půli cesty mezi Supermana a Flashe postavili pozorovatele, který by závod odstartoval (např. bliknutím baterky do obou směrů) a oba závodníci by vyběhli ve chvíli, kdy by k nim tento signál dorazil, vyběhli by z pohledu Supermana i Flashe současně. Pro úplnost dodejme, že z jejich pohledu by závod trval  $\Delta\tau_S = l/(v_S - v_F) \sqrt{1 - (v_S/c)^2}$ , resp.  $\Delta\tau_F = l/(v_S - v_F) \sqrt{1 - (v_F/c)^2}$ .

## Úloha VI.4 ... zastřel si svého potkana

Mirek by rád zastřelil potkana, kterého vídá na kolejích. Připravil si tedy jednoduchou vzduchovou pušku, kterou si můžeme modelovat jako trubku s konstantním průřezem  $S = 15 \text{ mm}^2$  a délkou  $l = 30 \text{ cm}$ , která je na jedné straně uzavřená a na druhé otevřená. Do ní se chystá Mirek umístit náboj hmotnosti  $m = 2 \text{ g}$ , který trubku akorát utěsní, a to ve vzdálenosti  $d = 3 \text{ cm}$  od uzavřeného konce. Náboj zde zatím nechá upevněný v klidu a natlakuje uzavřenou část trubky na určitý tlak  $p_0$ . Posléze náboj uvolní. Chce, aby na konci ústí byla rychlost náboje

<sup>54</sup>Poznamenejme, že současnost se nešíří se světelným kuzelem, ale odpovídá konstantní časové souřadnici daného pozorovatele. Superman tedy sice viděl vyběhnout Flashe ve chvíli, kdy vybíhal i on sám, ale stalo se to v jeho minulosti.

minimálně  $v = 90 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Poradte mu, na jaký tlak by musel vzduchovou pušku natlakovat, aby náboj vyšel s takovou rychlostí, pokud by plyn byl ideální, a diskutujte realističnost uspořádání. Předpokládejte, že náboj je uvolňován kvazistatickým adiabatickým dějem, kde  $\kappa = 7/5$ , protože se jedná o dvouatomový plyn. Uvažujte, že z vnějšku působí na náboj atmosférický tlak  $p_a = 10^5 \text{ Pa}$ . Zanedbejte energetické ztráty vyvolané třením, odporem vzduchu a stlačováním plynu před nábojem.

V našem případě je hnacou silou strelly stlačený plyn. Budeme sa riadiť Poissonovým zákonom pre ideálny plyn

$$pV^\kappa = \text{konst.}$$

Pri výstrele v Mirkovej pušky plyn zväčšuje svoj objem, čím tlačí náboj dopredu. Z toho vidíme, že objem plynu  $V$  a tlak  $p$  v nejakom čase môžeme popísať ako

$$p = p_0 \frac{V_0^\kappa}{V^\kappa}.$$

Nakolko je prierez hlavne  $S$  konštantný, môžeme predchádzajúcu rovnicu prepísať ako

$$p = p_0 \left( \frac{Sd}{Sx} \right)^\kappa = p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa.$$

Doteraz sme uvažovali, že náboj je tlačенý z jednej strany stlačeným vzduchom, no z druhej proti pohybu nič nekladie odpor, čo ako tušíme, nemôže fungovať. Uvažujeme, že oproti gulke pôsobí atmosférický tlak  $p_a$ . Výsledné silové pôsobenie na projektil v hlavni bude dané rozdielom týchto dvoch tlakov, čiže platí

$$p' = p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a.$$

Tlak, ako vieme už zo základnej školy, sa prejavuje ako určité silové pôsobenie sily  $F$  na plochu  $S$ . Vďaka tomu, že hlavni má prirodzene konštantný prierez, môžeme silu tlačiacu náboj vyjadriť v tvare

$$F = Sp' = S \left( p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a \right).$$

Z druhého Newtonovho pohybového zákona platí, že ak na teleso o hmotnosti  $m$  v inerciálnej vzťažnej sústave, pôsobí sila  $F$ , tak potom sa začne pohybovať so zrýchlením o veľkosti  $\frac{F}{m}$ , a teda môžeme písať

$$ma = S \left( p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a \right).$$

Ako mnohí iste viete, zrýchlenie v určitom čase  $t$  môžeme zistiť ako prvú deriváciu rýchlosti podľa času, alebo druhú deriváciu dráhy podľa času. Z vety o derivácií zloženej funkcie potom získavame

$$ma = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dx} v = S \left( p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a \right),$$

čo je lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu, ktorú budeme riešiť metódou separácie premenných. Po separácii dostávame

$$\begin{aligned}
 mvdv &= S \left( p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a \right) dx \\
 \int_0^v mvdv &= \int_d^l S \left( p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a \right) dx \\
 \frac{1}{2}mv^2 &= S \left( p_0 \frac{d^\kappa (d^{1-\kappa} - l^{1-\kappa})}{\kappa - 1} - p_a(l - d) \right),
 \end{aligned}$$

odkiaľ po vyjadrení tlaku získavame

$$p_0 = \frac{(\kappa - 1) \left( \frac{1}{2}mv^2 + Sp_a(l - d) \right)}{Sd^\kappa (d^{1-\kappa} - l^{1-\kappa})}.$$

Po dosadení hodnôt dostávame  $p_0 \doteq 1,256 \cdot 10^7$  Pa, teda asi 126 atmosfér.

### Realistickosť usporiadania

Ako vidíme, výsledný tlak vyšiel dosť veľký, čiže vzhľadom na usporiadanie nemôžeme považovať plyn za ideálny. Pri počítaní s ideálnym plynom sa zanedbáva vlastný objem molekúl a príťažlivé sily, ktoré zohľadňuje Van der Waalsova rovnica, poprípade môžeme použiť ešte viriálnu stavovú rovnicu. S tým vzniká ďalšia otázka, a to, akým plynom Mírek zbraň natlakoval. (Bežné sú okrem vzduchu  $\text{CO}_2$  a  $\text{N}_2$ .) V prípade, že by nešlo o čisto dvojatómový plyn, vychádzali by sme z Daltonovho zákona.

Pri výpočtoch sme zanedbali odpor vzduchu, ktorý by aj tak nemal veľký vplyv. V hlavni sa časť energie ďalej spotrebuje na roztočenie projektilu a zároveň sa vylúči určité teplo pri trení projektilu v hlavni, teda možno očakávať, že tlak bude o niečo málo väčší ako náš výsledok.

Pre informáciu uvedme, že vzduchové zbrane podliehajúce ohláseniu by mali mať ústovú energiu viac ako 16 J. Nakoľko avšak energia projektilu Mirkovej vzduchovky tesne po tom, čo opustí hlavňu, je len 8,2 J, Mírek môže naďalej beztriestne strieľať po potkanoch na koleji.

Porovnaním s reálnymi vzduchovkami zistíme, že tlak v komore pre podobné ústové rýchlosti sa skutočne pohybuje v rádovo desiatkach až stovkách atmosfér.

### Úloha VI.5 ... pretáhni ho přes prsty

Máme homogennú tyč konštantného prierezu dĺžky  $l$  pripojenú na jednom konci k otočnému kloubu. Na počátku směřuje tyč přímo vzhůru a jsme v homogenním tíhovém poli velikosti  $g$ . Tyč se vlivem mírného závánu větru začne otáčet a „padat“ dolů, ale stále je držena otočným kloubem. S jakým zrychlením se bude pohybovat konec tyče v průběhu času?

Označme uhol odklonu tyče od nestabilnej rovnovážnej polohy  $\vartheta$ . Z geometrie situácie vidíme, že tiažová sila má voči osi prechádzajúcej kĺbom moment  $\tau = = gml \sin(\vartheta)/2$ , kde  $m$  je hmotnosť tyče. Moment zotrvačnosti tyče voči osi prechádzajúcej kolmo jej koncom je  $I = ml^2/3$ . Môžeme teda rovno napísať pohybovú rovnicu

$$\begin{aligned} I\ddot{\vartheta} &= \tau, \\ \ddot{\vartheta} &= \frac{3g}{2l} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (60)$$

Riešenie tejto rovnice ale nie je zjavné, skúsme teda použiť iný prístup. Ak zanedbáme trenie v kĺbe, bude sa v tejto sústave zachovávať energia, z čoho vieme jednoducho napísať diferenciálnu rovnicu prvého rádu, keďže kinetická energia bude v každom bode rovná poklesu potenciálnej energie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2 &= mg\Delta h, \\ l\dot{\vartheta}^2 &= 3g(1 - \cos \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \cos \vartheta}} &= \sqrt{\frac{3g}{l}} dt, \end{aligned}$$

kde  $\Delta h$  je pokles výšky ťažiska tyče. Tu vidíme to, čo by sme čakali, poloha  $\vartheta = = 0$  je rovnovážna a teda musíme začať s nejakou konečnou výchylkou  $\varepsilon \ll 1$ , aby tyč začala padať. Treba si ale uvedomiť, že rovnicu sme dostali za predpokladu, že pokles potenciálnej energie voči polohe  $\vartheta = 0$  dáva kinetickú energiu (aspoň približne), čo v prípade, že začíname s výchylkou  $\varepsilon$  znamená, že má tyč v tomto bode kinetickú energiu, akoby do tejto polohy spadla z nehybnej rovnovážnej polohy, a teda v čase  $t = 0$  je jej uhlová rýchlosť nenulová. Toto ale nie je zásadný problém, jednak preto, že predpokladáme malé hodnoty  $\varepsilon$ , kedy rozdiel energií na začiatku závisí od  $\varepsilon^2$ ,<sup>55</sup> a tiež preto, že takto začíname v situácii, do ktorej by sme sa dostali pádom z menšej počiatočnej výchylky. Teda voľbou nejakej inej (nenulovej) počiatočnej výchylky len posúvame čas  $t = 0$  do iného bodu, ale nemeníme správanie systému. Čím menšiu výchylku ale volíme, tým viac musíme čas posúvať, a nulová výchylka je v čase  $-\infty$ ; vieme spočítať iba čas pádu z nejakej výchylky  $\varepsilon > 0$ . Prípadne by sme si vystačili s predpokladom  $\dot{\vartheta} \neq 0$  v bode  $\vartheta = 0$ .

Integrál  $1/\sqrt{1 - \cos \vartheta}$  ale stále nie je triviálny, použitím vhodných goniometrických identít a substitúcií (alebo vhodného softwaru) dostaneme

$$\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \cos \vartheta}} = \sqrt{2} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{4} \right),$$

z čoho dostávame riešenie diferenciálnej rovnice

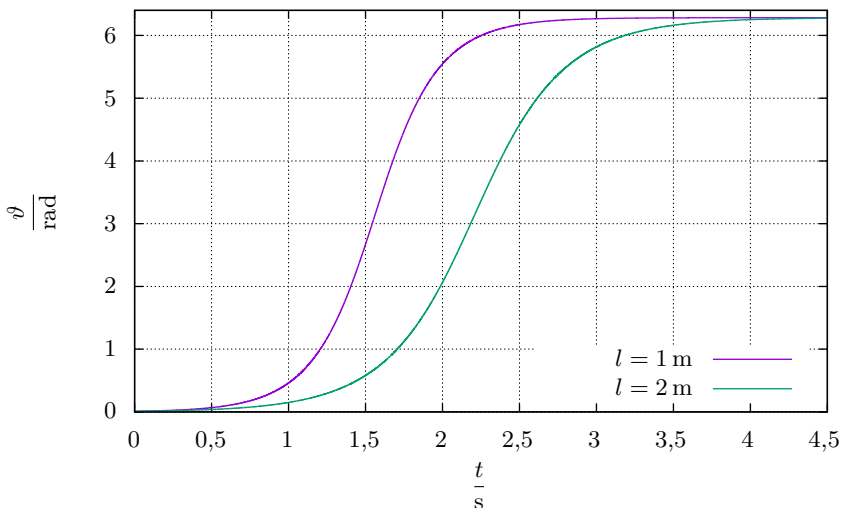
$$\sqrt{2} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{4} \right) - \sqrt{2} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} \right) = \sqrt{\frac{3g}{l}} t, \quad (61)$$

<sup>55</sup>Vo výraze pre pokles energie by sme dostali ďalší člen tvaru  $1 - \cos \varepsilon$

Presunutím člena s  $\varepsilon$  na druhú stranu rovnice hneď vidíme, že počiatočná výchylka je naozaj len posunutie v čase. Z tohto môžeme vyjadriť  $\vartheta(t)$  ako

$$\vartheta = 4 \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} e^{\sqrt{\frac{3g}{2l}} t} \right).$$

Tvar tejto funkcie pre 2 rôzne dĺžky tyče vidno na obrázku 22.



Obr. 22: Vývoj uhla odklonu od osi v čase pre 2 dĺžky tyče a počiatočnú výchylku  $\varepsilon = 0,01$  rad

V úlohe sa ale pýtame na zrýchlenie, to môžeme vyjadriť z rovnice (60), keďže vieme že radiálne zrýchlenie je nulové (dĺžka tyče je konštantná), bude zrýchlenie koncového bodu tyče dané

$$a = l\ddot{\vartheta} = \frac{3g}{2} \sin \vartheta,$$

kde stačí za  $\vartheta$  dosadiť z predošlého. Použitím

$$\sin(4 \operatorname{arctg} x) = 4 \frac{x - x^3}{(x^2 + 1)^2},$$

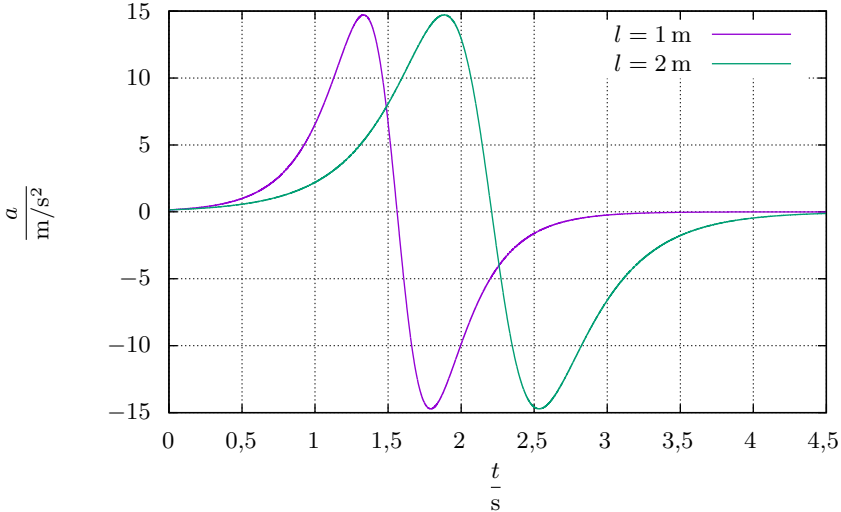
a  $\operatorname{tg} \varepsilon/4 \approx \varepsilon/4$ , označujúc

$$\chi = \sqrt{\frac{3g}{2l}},$$

dostaneme

$$a(t) = 24g\varepsilon \frac{16e^{\chi t} - \varepsilon^2 e^{3\chi t}}{(\varepsilon^2 e^{2\chi t} + 16)^2}.$$





Obr. 23: Vývoj zrychlenia koncového bodu v čase pre počiatočnú výchylku  $\varepsilon = 0,01$  rad

Dostaneme takto graf zrychlenia na obrázku 23. Ešte môžeme skontrolovať, že tento graf vyzerá tak, ako by sme očakávali; v čase keď tyč prechádza spodnou rovnovážnou polohou je zrychlenie nulové, v bode s  $\vartheta = \pi/2$  je zrychlenie maximálne a v bode  $\vartheta = 3\pi/2$  minimálne, pričom v týchto bodoch je jeho veľkosť podľa (60)  $a_{\max} = 3g/2 \doteq 14,7 \text{ m/s}$  nezávisle na dĺžke tyče.

## Úloha VI.P ... vypařující se asteroid

Umístíme hodně velký kus ledu, dejme tomu o průměru 1 km, do blízkosti hvězdy podobné Slunci na kruhovou dráhu. Blížkost je tak velká, že rovnovážná teplota černého tělesa by v této vzdálenosti byla zhruba  $30^\circ\text{C}$ . Co se bude dít s takovým asteroidem a jeho dráhou? Asteroid nemá vázanou rotaci.

Na začiatku máme jedno zanedbateľne malé teleso obiehajúce okolo Slnka po kruhovej dráhe, čo je jednoduchý prípad problému dvoch telies (kde po celý čas rátame s tým, že menšie teleso je oproti väčšiemu zanedbateľne hmotné). Keďže kométa sa bude pri takejto teplote vyparovať, (kométy sa vypařujú vždy, pokiaľ ich teplota je väčšia ako  $0\text{K}$ ) s časom sa bude meniť hmotnosť kométy. Ako bude teda pôsobiť táto zmena hmotnosti na dráhu kométy?

Vieme že dráha kométy je kruhová (zo zadania). Pre kruhovú dráhu, v prípade, že hmotnosť obiehajúceho telesa je zanedbateľná oproti hmotnosti centrálnemu,

platí rovnica

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M}{r^2},$$

kde  $v$  je obežná rýchlosť obiehajúceho telesa,  $G$  je gravitačná konštanta,  $M$  je hmotnosť centrálného telesa a  $r$  je polomer dráhy obiehajúceho telesa. Ako môžeme vidieť, tento vzťah nijako nezávisí na tom, aká je alebo ako sa mení hmotnosť menšieho telesa. Navyše na kométu môžu pôsobiť len sily v radiálnom smere (tým sa budeme venovať neskôr). Z toho vieme, že hmotnostný úbytok kométy nijak neovplyvní. Napriek tomu chceme ale vedieť, asi ako rýchlo sa taký asteroid bude roztápať.

Keďže kométa je kus čistého ľadu a ľad je kryštál, na jeho roztápanie sa môžeme pozerat' z rôznych uhlov pohľadu. Skúsime uhol pohľadu nezahŕňajúci fyziku skupenských premien kryštálov látok z viacerých molekúl. Napríklad ten, že kus ľadu je v tepelnej rovnováhe v čase  $t = 0$ . S plynutím času rátame, že asteroid rotuje rozumne tak, že sa kométa ohrieva na celom povrchu z dlhodobého hľadiska rovnomerne. Na jej povrchu sa ohrievajú len najvrchnejšie vrstvy atómov, tie s nejakou účinnosťou predávajú časť energie spodnej vrstve a tá zase spodnej a tak ďalej až po stred. Rozdiel teplôt na povrchu a v strede tak môže byť za predpokladu dostatočného dopadajúceho výkonu, ktorý výrazne prekoná efekt vodivosti ľadu, nezanedbateľný. Teraz sa pozrime na to, čo sa deje na povrchu. Máme kryštalickú mriežku molekúl, pričom každý atóm kmitá v mriežke inou rýchlosťou a s inou vlastnou energiou kmitania. Spočítat' to, akú energiu potrebuje molekula na povrchu kryštálu na to, aby opustila kryštál len z pôsobenia síl v molekulárnej mriežke, je zrejme veľmi zložitá fyzika, presne tá, ktorej sa chceme vyhnúť. Avšak vieme si pomôcť termodynamikou, v ktorej nepotrebujeme poznať mikroskopické procesy – tie sú dostatočne popísané známymi fyzikálnymi veličinami, napríklad skupenským teplom sublimácie ľadu pri nulovom tlaku. Uvidíme, že aj tabuľková hodnota nám prezradí, koľko energie treba dodať na to, aby sa dané množstvo ľadu z kométy odparilo.

Vezmime prípad, že schopné odpariť sa hneď pri potrebnej energii sú častice na povrchu látky (rozumný predpoklad je do hĺbky tak 5-10 častíc). Ak by bol výkon žiarenia dopadajúceho za dostatočne malý časový úsek na celý povrch kométy taký, že by sa celá táto povrchová vrstva okamžite odparila, tak by sme mohli vedenie tepla zanedbať a rátať, že za ten krátky časový úsek sa vyparí istá povrchová vrstva kométy a zvyšok kométy to nijak neovplyvní. Aby sme celý čas len neteoretizovali, skúsme spočítat', v akých rádoch sa pohybuje čas, za ktorý sa pri tomto procese celá kométa roztopí. Najprv si z danej teploty absolútne čierneho telesa (AČT) určíme žiarivý výkon, ktorý dopadá na povrch kométy. Výkon dopadajúci na absolútne čierne teleso vo vzdialenosti kométy s prierezom  $S$  je

$$P_1 = S \Phi_S \frac{R_Z^2}{R_k^2}$$

kde  $\Phi_S$  je slnečná konštanta pre Zem,  $R_Z$  vzdialenosť Zeme od Slnka a  $R_k$  je vzdialenosť, v ktorej sa nachádza kométa. Tu nie je jasné, o aké AČT sa jedná – rovnovážna teplota závisí od jeho povrchu aj rozloženia teploty na ňom. My uvažujeme,

že to nie je guľa, ale ploché teleso, ktoré je k Slnku stále prívratené jednou stranou (najjednoduchší tvar) a chladné na druhej strane. Potom vieme výkon vyžiarený takýmto AČT s teplotou  $T_{\text{ačt}} = 30^\circ\text{C}$  ako

$$P_2 = S\sigma T_{\text{ačt}}^4$$

(dosadzujeme absolútne teploty v  $K$ ).

Z rovnováhy žiarivých výkonov  $P_1 = P_2$  vieme dopočítať vzdialenosť, v ktorej sa nachádza naše myslené AČT a teda aj kométa. Po dosadení hodnôt zistíme, že kométa sa nachádza niekde za dráhou Marsu (1,69 AU). Na našu kométu svieti Slnko tiež s výkonom  $P_1$ , čo pre  $S = \pi R^2$  ( $R$  je polomer kométy) vychádza  $0,48 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$ .

Pre začiatok budeme rátať, že sa všetka energia, ktorú kométa naspäť nevyžiari, spotrebuje na sublimáciu hmoty z kométy. Z fázového diagramu vody pri nulovom tlaku<sup>56</sup> vieme približne odčítať maximálnu hodnotu termodynamickej teploty povrchu, pri ktorej kométa dokáže existovať ako kus ľadu a nedôjde k jej sublimácii  $T \approx 200 \text{ K}$ . Časť dopadajúceho výkonu sa stratí tým, že kométa vyžaruje ako AČT s teplotou najviac  $T$ . Minimálny výkon, ktorý sa musí využiť na sublimovanie kométy, je teda rovný

$$P = \pi R^2 \sigma T_{\text{ačt}}^4 - 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Môžeme vidieť, že kométa prijíma žiarenie zo štvrtiny povrchu, ale vyžaruje z celého povrchu. Je to analogické tomu, akoby bola na celom povrchu ožarovaná 4-krát slabšie. Teraz poďme zrátať, ako rýchlo sa vyparí. Keďže keď sa bude vyparovať, bude sa zmenšovať jej povrch a s ním aj množstvo absorbovaného žiarenia kométou, je rozumné nájsť model roztápania kométy, ktorý nezávisí od jej plochy. Na sublimáciu ľadovej vrstvy s hrúbkou  $\Delta R$  potrebujeme teplo  $4\pi R^2 \Delta R \rho l$ , kde  $l \doteq 2,8 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  je skupenské teplo sublimácie a  $\rho \doteq 900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  je hustota ľadu. Zanedbajme teplo potrebné na zohriatie ľadu na teplotu povrchu, to je dosť malé. Tiež zanedbajme závislosť  $l$  na teplote a tlaku – pri atmosférickom tlaku a teplote  $0^\circ\text{C}$  je teplo potrebné na sublimáciu molu ľadu cca  $51 \text{ kJ}$  a pri teplote  $-30^\circ\text{C}$  je to  $51,1 \text{ kJ}$ , na jeden kilogram je to teda zhruba  $2,8 \text{ MJ}$  aj vo vákuu pri teplotách okolo  $-70^\circ\text{C}$ . Za malý čas  $\Delta t$  sa na sublimáciu teda spotrebuje teplo  $P\Delta t = 4\pi R^2 \Delta R \rho l$ , z čoho dostávame

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\sigma}{\rho l} \left( \frac{1}{4} T_{\text{ačt}}^4 - T^4 \right) \doteq 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Celá kométa by sa mala vypariť za  $1 \text{ km} / 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 3000$  rokov. Tento odhad samozrejme nie je veľmi presný, lebo teplota povrchu kométy môže byť úplne iná a na druhej strane sa nemusí všetko teplo dokonale spotrebovať na sublimáciu.

Skúsime sa teraz pozrieť na celú udalosť z mikroskopickejšieho hľadiska. Vezmime veľkosť jednej molekuly vody  $\sim 0,1 \text{ nm}$  a rátajme, že vyparí sa za malý čas  $\Delta t$  majú šancu molekuly z hĺbky  $d \sim 1 \text{ nm}$  (cca desiatky molekúl pod povrchom). Ak neuvažujeme vyžarovanie vrstvy ľadu, na ktorú teplo dopadne, tak rátaeme, že na plochu  $S$  dopadne za čas  $\Delta t$  teplo, ktoré sa rozdelí medzi ľad o hmotnosti  $dS\rho$ . Toto teplo musí ľad roztopiť, teda  $dS\rho l \sim S\sigma T_{\text{ačt}}^4 \Delta t$ . Ak by sme ráтали  $\Delta t$

<sup>56</sup>[http://www1.lsbu.ac.uk/water/water\\_phase\\_diagram.html](http://www1.lsbu.ac.uk/water/water_phase_diagram.html)

naozaj malý, napr. stotinu sekundy, tak dostaneme  $d \sim 2$  nm, čo skutočne zodpovedá predpokladom. Keďže sa jedná len o hrubé odhady, môžeme byť s hodnotou odparu  $2 \cdot 10^2 \text{ nm} \cdot \text{s}^{-1}$  celkom spokojní.

Týmto tempom vieme usúdiť, že za jedinú sekundu sa (za predpokladu, že asteroid je absolútne čierny – mimochodom veľmi rozumný predpoklad, pretože je známe, že kométy sú azda najčiernejšie objekty v Slnčnej sústave – a teplo nevedie, resp. vedie len tak pomaly, že všetok dopadnutý výkon sa spotrebuje len na sublimáciu a zohriatie pary na povrchu) dokáže odpariť zhruba 200 nm z celého polomeru kométy, čo znamená, za predpokladu, že sa nezmení jej vzdialenosť od Slnka, že celá vysublumuje za  $t_{\text{death}} \sim 150$  rokov.

Tu sme použili úplne iný model a dostali úplne iný výsledok. Neuvažovali sme vyžarovanie kométy ako AČT, namiesto toho sme predpokladali, že dopadajúca energia sa celá spotrebuje na sublimáciu (a prípadne aj niečo iné, napr. dodatočné zahriatie) malej povrchovej vrstvy ľadu. Poďme sa teraz pozrieť, aké efekty by mohli ovplyvniť dráhu nášho asteroidu (vieme, že samotná zmena hmotnosti to nespôsobí).

Na všetky telesá v slnčnej sústave neustále pôsobí tlak žiarenia. Ten má tým väčší vplyv, čím je teleso väčšie, odrazivejšie a ľahšie. Prvý parameter vypovedá o tom, aká veľká je plocha, na ktorú dopadajú slnečné fotóny, ktorých hybnosť sa využije, druhý to, aká časť hybnosti fotónov sa premení na hybnosť telesa (pre priesvitné teleso je to 0%, pre čierne 100% a pre úplne odrazivé 200%). Tretí parameter hovorí o tom, aký bude mať týmito fotónmi generovaná sila pomer voči zotrvačnosti, to znamená, ako veľmi ovplyvní celkovo dráhu asteroidu. Náš asteroid je celý z vody, má tvar gule a je 1 km veľký. Rátame, že je absolútne čierne teleso a nachádza sa vo vzdialenosti 1,69 AU od Slnka. To sú všetky hodnoty, ktoré potrebujeme k odhadu tejto sily. Postupovať budeme tak, že si zrátame, akú hybnosť majú dokopy všetky fotóny, ktoré dopadnú na asteroid. Táto hybnosť sa pripočíta k hybnosti asteroidu v smere kolmo preč od Slnka.

Za sekundu dopadne na  $1 \text{ m}^2$  celkom 480 J energie. To je na celý povrch 1,5 GJ. Fotón s energiou  $E$  má hybnosť

$$p = \frac{E}{c},$$

čo nezávisí na vlnovej dĺžke. Celková hybnosť častíc, ktoré dopadnú na kométu za daný čas, je teda cca  $5 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Rátame s tým, že kométa je absolútne čierne teleso, teda táto hybnosť sa premietne do zmeny hybnosti celého telesa; prírastok hybnosti za čas je zároveň sila, ktorá tlačí kométu od Slnka. Zrýchlenie smerom od Slnka udeľované kométe Slnkom bude

$$a = \frac{\Delta p(t)}{m(t)\Delta t},$$

kde  $\Delta p(t)$  je hybnosť častíc, ktoré dopadnú za malý čas  $\Delta t$ , a  $m(t)$  je hmotnosť v čase  $t$ . Udelenú hybnosť ako funkciu času vieme zapísať ako

$$p(t) = p_0 \left( \frac{r_0 - kt}{r_0} \right)^2,$$

kde  $p_0$  je hybnost za čas na začiatku,  $r_0$  je polomer kométy na začiatku a faktor  $k = 0,009 \text{ m}\cdot\text{d}^{-1}$  je vyjadrením rýchlosti zmenšovania polomeru (pre čas roztope-  
nia 300 rokov). Hmotnosť ako funkcia času je

$$m(t) = \frac{4}{3}\pi (r_0 - kt)^3 \varrho,$$

kde  $\varrho$  je hustota ľadu. (Ak budeme počítat s hustotou vody, rádovo to nezmení  
výsledok.) Rýchlosť, ktorú by za čas  $\tau$  získala, je teda rovná

$$v = \int_0^\tau \frac{3p_0}{4\pi r_0^2 \varrho} \frac{1}{r_0 - kt} dt = \frac{3p_0}{4\pi r_0^2 \varrho k} \ln \frac{r_0}{r_0 - k\tau}.$$

Kinetická energia kométy sa tým zvýši najviac o  $mv^2/2$ ; táto energia je dostatočná  
na to, aby sa kométa vzdialila od Slnka o

$$s = \frac{v^2 R_k^2}{2GM},$$

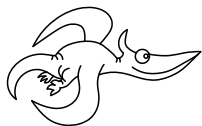
kde  $M$  je hmotnosť Slnka. Teraz si potrebujeme zvolit čas  $\tau$  – hornú medzu in-  
tegrálu. Nemôžeme zvolit čas, za ktorý sa kométa rozpustí ( $r_0/k$ ), to by integrál  
divergoval; nech to je teda 99,9% tohto času. Vzdialenosť  $s$ , o ktorú sa vzdiali ko-  
méta od Slnka vplyvom tohto efektu, je potom rovná približne 200 m, teda poloha  
kométy sa prakticky nezmení. Predpoklad, že sa aj množstvo energie absorbované  
do jednotky plochy nezmení, je teda správny.

Ďalším efektom, ktorý by potenciálne vedel ovplyvniť dráhu kométy, je tak-  
zvaný Yarkovského efekt. Ide tu o to, že musíme rátať s tým, že tak ako prijatie  
fotónu hybnosť dodáva (t.j. ak absorbujeme fotón z jedného smeru, dodá nám to  
hybnosť v smere, v akom letel fotón), tak emitovanie fotónu hybnosť odoberá, t.j.  
ak emitujeme fotón, získame rovnako veľkú hybnosť ako mal fotón, len v opačnom  
smere ako ten, ktorým vyletel fotón. Vieme si to predstaviť ako delo, ktoré vystrelí  
guľu jedným smerom a trochu ho to rozhýbe smerom druhým. Ak teda máme ab-  
solutne čierne teleso, ktoré emituje rovnaké fotóny na všetky strany rovnako, tak  
sa tie hybnosti navzájom vykompenzujú a celková hybnosť tohto telesa spôsobená  
týmto javom je 0. Avšak ak máme teleso, ktoré je na jednej strane teplejšie ako na  
druhej, tak dôsledkom toho majú fotóny emitované jedným smerom nižšiu energiu  
(hybnosť) ako fotóny emitované z druhej strany a teda výsledná zmena hybnosti  
takéhoto telesa je nenulová.

V predošlých výpočtoch s našou kométou rátame s tým, že jej teplota je na  
celom povrchu konštantná, Yarkovského efekt by sme teda pozorovať nemali, ale  
ak by sme aj pripustili rozdiely teplôt na povrchu, dá sa ľahko overiť, že na zmene  
polomeru dráhy kométy to bude mať vždy menší efekt ako tlak žiarenia. Konkrétne  
ak by mala na privrátenej strane kométa teplotu AČT v danej vzdialenosti a na  
odvrátenej 0K, tak by sa hybnosť emitovaných termálnych fotónov rovnala hyb-  
nosti fotónov prijatých od Slnka a preto by hybnosť udelená kométe za jednotku  
času bola nanajvýš taká, ako je hybnosť za jednotku času získaná od tlaku slneč-  
ného žiarenia. Posledné, čo má na kométu vplyv, je tlak slnečného vetra; ten je  
však ešte slabší ako predchádzajúce dva efekty.

Ak si to zhrnieme, tak kométa pravdepodobne zanikne na dráhe podobnej tej, na ktorú sme ju vypustili. Aj krátky čas pred zánikom sa bude stále nachádzať o menej ako polomer pôvodnej kométy od počiatkovej kruhovej trajektórie, teda ak by sme si dráhu kométy na začiatku predstavili ako torus/pneumatiku, tak sa pri svojom zániku stále bude nachádzať vo vnútri tohoto torusu. Zrýchlenie, ktorým na ňu pôsobí slnečný vietor, síce pri zániku rastie do nekonečna, ale to, čo sa deje, keď už je kométa dostatočne malá na to, aby ju to zaneslo nezanedbateľne ďaleko, na náš odhad času nemá podstatný vplyv. (Navyše sa asi bude rozširovať inak ako veľká kométa.)

Záver: Vyšetřili sme, ako by sa pohyboval asteroid celý z vodného ľadu (absolútne čierny, čo je pri kométach veľmi dobré priblíženie, nakoľko majú albedo – odrazivosť obvykle okolo 6 %, čo je spôsobené tým, že obsahujú aj malé množstvo prachu) vo vzdialenosti približne 1,69 AU od Slnka. Tvar jeho dráhy by sa až do konca jeho „života“ prakticky nezmenil, len by sa mierne zväčšil jej polomer (o asi 200 metrov). Asteroid by prestal existovať za približne stovky až tisícky rokov. Aj keď naše výpočty boli približné, takto zodpovedajú (najmä tie o zmene dráhy) fyzikálnej realite. Zmeny dráh komét spôsobené vyššie spomínanými efektmi sú pozorovateľné len vďaka superpresným prístrojom. To, čo reálne ovplyvňuje dráhy komét oveľa signifikantnejšie, sú prechody blízko hmotných objektov, ktoré gravitačne zakrivia ich dráhu.



## Zadání experimentálních úloh

### Úloha I.E ... Pechschnitte

12 bodů

Padá krajíc namazanou stranou dolů? Zkoumejte experimentálně tento Murphyho zákon s důrazem na statistiku! Záleží na rozměrech krajíce, složení a typu vrstvy? K experimentálním výsledkům hledejte teoretická zdůvodnění. Pro vaše měření použijte toastový chléb. *(řešení str. 101)*

### Úloha II.E ... jedno plnotučné, prosím

12 bodů

Tučnější mléko by mělo být „bělejší“ – více světla rozptýlí a méně propustí skrz. Proveďte měření tučnosti mléka na základě rozptylu světla, přičemž jako barevnou škálu použijte přiložený papírek (pokud jste neřešili první sérii a chcete obdržet papírek, napište nám na [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)). Rozdíly nejlépe vyniknou, pokud do různých druhů mléka budete přidávat barvivo tak, aby jej v mléku byla stejná (malá) koncentrace. Jako barvivo můžete použít černou tuš. Samozřejmě je možno použít jakékoliv jiné barvivo, ale pak si budete muset vyrobit vlastní barevnou škálu, kterou přiložte k řešení. Zrealizujte měření pro různé druhy mléka a směsi mléka a vody. Diskutujte spolehlivost určení obsahu tuku. *(řešení str. 105)*

### Úloha III.E ... reflexní náramek

12 bodů

Změřte co nejvíce charakteristik samonavíjecího reflexního náramku. Zajímá nás především:

- Náramek je vyztužen kusem plechu, který může být ohnut podélně (svinutý náramek) nebo příčně (narovnaný náramek). Jaký poloměr křivosti mají tyto ohyby, pokud na plech nepůsobí vnější síla?
- Pokud náramek narovnáme a budeme ohýbat v jednom místě, při jakém úhlu přejde do ohnutého stavu? Při jakém úhlu se opět narovná? (Pozorujeme hysterezi?)
- Jaký moment síly je potřebný k ohnutí náramku?
- Je některý ze stavů náramku (svinutý nebo narovnaný) energeticky výhodnější? Odhadněte o kolik.

*(řešení str. 111)*

### Úloha IV.E ... Mikulášova vejce

11 bodů

Změřte povrch ptačího (např. slepičího) vejce.

*(řešení str. 119)*

### Úloha V.E ... vlasec

12 bodů

Změřte modul pružnosti v torzi vlasce  $G$ , který jsme vám poslali společně se zadáním. (řešení str. 121)

### Úloha VI.E ... skladba jako od Cimrmana

12 bodů

Sežeňte si skleničku na víno, ideálně tenkou se zabroušeným okrajem. Nejprve změřte vnitřní průměr skleničky v závislosti na výšce ode dna. Pak ji rozeznívejte, ideálně navlhčeným prstem pohybem po jejím okraji – někdy to chce trochu trpělivosti. Změřte závislost frekvence tónů, které sklenička vydává v závislosti na výšce naplnění vody v ní (alespoň pro 5 hladin vody a dvě frekvence v každé výšce).

Nápověda: Pokud je sklenička tenkostěnná, můžete její vnitřní rozměry považovat za stejné jako vnější a díky tomu závislost jejího průměru na výšce určit z vhodné fotografie s měřítkem. Pro měření zvuku doporučujeme freeware program Audacity (Rozbor → Kreslit spektrum). (řešení str. 125)





## Řešení experimentálních úloh

### Úloha I.E ... Pechschnitt

*Padá krajíc namazanou stranou dolů? Zkoumejte experimentálně tento Murphyho zákon s důrazem na statistiku! Záleží na rozměrech krajíce, složení a typu vrstvy? K experimentálním výsledkům hledejte teoretická zdůvodnění. Pro vaše měření použijte toastový chléb.*

Snad každý z nás už se nad tímto podivným tvrzením několikrát pozastavil a chtěl vědět, zda na tom opravdu něco je nebo je to jen mýtus. V této experimentální úloze padání chlebu na namazanou stranu podrobíme důkladné fyzikální zkoušce a na závěr rozhodneme, zda je na tomto Murphyho zákoně něco pravdy.

### Teorie

Tento experiment je díky velkému množství volných parametrů (například výška dopadu, způsob upuštění chleba, počáteční rotace chleba, tloušťka vrstvy namazání, rozměry krajíce atd.) velice komplikovaný. Abychom se do toho nezamotali, je nutné na začátku stanovit omezující podmínky, kterých bude hned několik. Budeme měřit četnost dopadu chleba na namazanou stranu jen v závislosti na následujících parametrech:

1. Rozměr krajíce.
2. Tloušťka namazané vrstvy.
3. Typ pomazánky.
4. Výška, ze které bude krajíc chleba padat.
5. Způsob upuštění chleba.

Jistě by mohl každý namítat, že svou roli bude hrát ještě velké množství jiných parametrů, ale vzhledem k rozsahu této úlohy závislost na ostatních parametrech zkoumat nebudeme (pokud to někdo ve své vzorovém řešení udělal, může získat bonusové body).

Teoretický popis pádu chleba je z hlediska fyziky velice komplikovaný (zejména z důvodu mnoha vstupních parametrů). Chleba bychom mohli při troše zjednodušení popsat jako nehomogenní kvádr a potom by bylo potřeba řešit pád tohoto nehomogenního kvádru v homogenním gravitačním poli s vlivem odporu prostředí (včetně rotace při pádu) a ještě nějakým způsobem fyzikálně popsat dopad chleba na podložku. Přesný fyzikální popis tohoto procesu je příliš komplikovaný, proto se jím nebudeme dále zabývat. Tento experiment bude zaměřen na samotné měření a následné statistické zpracování naměřených hodnot.

## Experiment

Dalším krokem je určení způsobu měření a popis měřící aparatury.

V našem experimentu budeme používat pouze čtvercový toustový chléb standardní velikosti. Při měření, zda strana dopadu závisí na velikosti chleba, budeme potom používat toustový chléb, který v každém ze dvou rozměrů (tloušťku ponecháme stejnou) rozpůlíme (tedy obsah bude čtvrtinový oproti původnímu stavu). Původní velikost krajíce toustového chleba budeme označovat jako „velká“ a zmenšenou velikost budeme označovat „malá“.

Tloušťku namazané vrstvy na krajici chleba budeme měřit pomocí hmotnosti rovnoměrně rozetřené pomazánky na celém krajici chleba. Před opakováním experimentu vždy převážení zajistíme, aby na chlebu bylo stejné množství pomazánky. Měření budeme provádět pro 2 různé vrstvy pomazánky na chlebu. Jako „malou“ vrstvu označíme případ, kdy na celý krajíc chleba namažeme 5 g pomazánky a jako „velkou“ vrstvu budeme označovat případ, kdy na celý krajíc chleba namažeme 15 g pomazánky. V případě „malé“ velikosti chleba bude tedy „malá“ vrstva pomazánky znamenat 1,25 g pomazánky a „velká“ vrstva pomazánky bude znamenat 3,75 g pomazánky.

V našem experimentu budeme zkoušet jen 2 typy pomazánky, a sice klasické máslo a lučinu.

Budeme pouštět chleba z různé výšky, abychom proměřili také závislost orientace chleba při dopadu na výšce, ze které byl chleba upuštěn. Nejvíce se zaměříme na výšku odpovídající výšce běžného kuchyňského stolu (80 cm), výšku, kde se nachází ústa běžně urostlého sedícího člověka (110 cm) a výšku, ve které má běžně urostlý stojící člověk ústa (150 cm). Tyto 3 výšky pracovně označíme jako „malá“, „střední“ a „velká“ výška. Právě z těchto třech výšek bude v praktickém životě namazaný chleba nejčastěji padat.

Důležitou věcí je správné popsání upouštění namazaného chleba a dodržování tohoto postupu při všech měřeních. V celém našem experimentu budeme namazaný chleba pomalu sunout přes hranu stolu (nebo jiné vodorovné plochy). Tímto se zajistí, že chleba nebude mít na počátku pádu žádnou (nebo jen zanedbatelnou) vodorovnou složku rychlosti ani žádnou rotaci. Orientace chleba budeme měnit a budeme měřit závislost na orientaci. Budeme zkoušet pouze 2 polohy. První poloha bude taková, že hrana chleba bude rovnoběžná s hranou desky (pracovně tuto polohu označíme jako „rovnoběžná“) a druhá poloha bude taková, že hrana desky a hrana chleba budou svírat úhel  $45^\circ$  (pracovně tuto polohu označíme jako „přes roh“).

## Měření

Pro jednotlivé konfigurace vstupních parametrů, jak jsou popsány výše, jsme provedli vždy 10 pokusů upuštění chleba. Jelikož pokus mohl dopadnout vždy jen dvěma způsoby, jimiž jsou pád na namazanou stranu nebo pád na nenamazanou stranu, není nutné uvádět výsledky jednotlivých pokusů, postačí pokaždé uvést počet pádů na namazanou stranu. Výsledky měření včetně odhadů pravděpodob-

Tab. 6: Naměřené četnosti dopadu chleba na namazanou a nenamazanou stranu v závislosti na zvolených parametrech (první polovina měření).

výška	vrstva	mazání	velikost	shazování	namaz. stranou	odhad psti.	směr. odch.
malá	malá	máslo	velká	rovnoběžné	10	1	–
malá	malá	máslo	velká	přes roh	10	1	–
střední	malá	máslo	velká	rovnoběžné	8	0,8	0,13
střední	malá	máslo	velká	přes roh	7	0,7	0,15
velká	malá	máslo	velká	rovnoběžné	0	0	–
velká	malá	máslo	velká	přes roh	0	0	–
malá	velká	máslo	velká	rovnoběžné	10	1	–
malá	velká	máslo	velká	přes roh	10	1	–
střední	velká	máslo	velká	rovnoběžné	5	0,5	0,17
střední	velká	máslo	velká	přes roh	5	0,5	0,17
velká	velká	máslo	velká	rovnoběžné	0	0	–
velká	velká	máslo	velká	přes roh	0	0	–
malá	malá	lučina	velká	rovnoběžné	10	1	–
malá	malá	lučina	velká	přes roh	10	1	–
střední	malá	lučina	velká	rovnoběžné	8	0,8	0,13
střední	malá	lučina	velká	přes roh	8	0,8	0,13
velká	malá	lučina	velká	rovnoběžné	0	0	–
velká	malá	lučina	velká	přes roh	0	0	–
malá	velká	lučina	velká	rovnoběžné	10	1	–
malá	velká	lučina	velká	přes roh	10	1	–
střední	velká	lučina	velká	rovnoběžné	5	0,5	0,17
střední	velká	lučina	velká	přes roh	6	0,6	0,16
velká	velká	lučina	velká	rovnoběžné	0	0	–
velká	velká	lučina	velká	přes roh	0	0	–

nosti pádu chleba na namazanou stranu a její směrodatné odchytky můžeme vidět v tabulkách 6 a 7.

## Diskuze

Z naměřených výsledků je vidět, že hlavním faktorem, který má vliv na dopad chleba, je výška, ze které chléb upustíme. Je to díky tomu, že chléb při pádu rotuje a výška upuštění rozhoduje o době trvání pádu a ta rozhoduje o počtu otáček (nebo půlotáček), které chléb při pádu vykoná. Rotaci chléb získá díky způsobu pouštění, kdy se převálí přes hranu stolu. Jediným dalším faktorem, který ovlivňoval četnost pádu chleba na namazanou stranu významněji než v rámci směrodatné odchytky, byla tloušťka namazané vrstvy (pouze v případě střední

Tab. 7: Naměřené četnosti dopadu chleba na namazanou a nenamazanou stranu v závislosti na zvolených parametrech (druhá polovina měření).

výška	vrstva	mazání	velikost	shazování	namaz. stranou	odhad psti.	směr. odch.
malá	malá	máslo	malá	rovnoběžné	10	1	–
malá	malá	máslo	malá	přes roh	10	1	–
střední	malá	máslo	malá	rovnoběžné	7	0,7	0,15
střední	malá	máslo	malá	přes roh	6	0,6	0,16
velká	malá	máslo	malá	rovnoběžné	0	0	–
velká	malá	máslo	malá	přes roh	0	0	–
malá	velká	máslo	malá	rovnoběžné	10	1	–
malá	velká	máslo	malá	přes roh	10	1	–
střední	velká	máslo	malá	rovnoběžné	5	0,5	0,17
střední	velká	máslo	malá	přes roh	5	0,5	0,17
velká	velká	máslo	malá	rovnoběžné	0	0	–
velká	velká	máslo	malá	přes roh	0	0	–
malá	malá	lučina	malá	rovnoběžné	10	1	–
malá	malá	lučina	malá	přes roh	10	1	–
střední	malá	lučina	malá	rovnoběžné	7	0,7	0,15
střední	malá	lučina	malá	přes roh	6	0,6	0,16
velká	malá	lučina	malá	rovnoběžné	0	0	–
velká	malá	lučina	malá	přes roh	0	0	–
malá	velká	lučina	malá	rovnoběžné	10	1	–
malá	velká	lučina	malá	přes roh	10	1	–
střední	velká	lučina	malá	rovnoběžné	6	0,6	0,16
střední	velká	lučina	malá	přes roh	6	0,6	0,16
velká	velká	lučina	malá	rovnoběžné	0	0	–
velká	velká	lučina	malá	přes roh	0	0	–

výšky upuštění), kdy se ukazuje, že chleba s velkou vrstvou pomazánky má menší četnost pádu na namazanou stranu než chleba s malou vrstvou pomazánky (tento efekt je ovšem pozorovatelný pouze u velké velikosti chleba, při použití malého chleba není tolik významný). Toto je pravděpodobně způsobeno tím, že chléb s větší vrstvou pomazánky při pádu rotuje rychleji, a proto je zde větší pravděpodobnost, že během pádu vykoná celou jednu otáčku, a dopadne tedy na nenamazanou stranu zatímco chléb s malou vrstvou pomazánky díky pomalejší rotaci pravděpodobně vykoná jen polovinu otáčky a dopadá tedy častěji na namazanou stranu. Vliv tohoto parametru je ale v porovnání s vlivem výšky upuštění chleba malý. Ostatní zkoumané parametry podle naměřených výsledků nemají na stranu dopadu chleba žádný statisticky významný vliv (všechny rozdíly v četnostech pádů na namazanou

stranu jsou v rámci statistické chyby a nemohou tedy být považovány za statisticky významné).

Na závěr musíme uvést, že naše naměřená data potvrzují doporučení kuchařského guru Ládi Hrušky, že pokud nechcete, aby vám při snídani spadl namazaný chléb namazanou stranou dolů, měli byste snídat buď na podlaze, nebo u stropu (zdroj: <https://www.youtube.com/watch?v=4r7SGcA2fLE>).

## Úloha II.E . . . jedno plnotučné, prosím

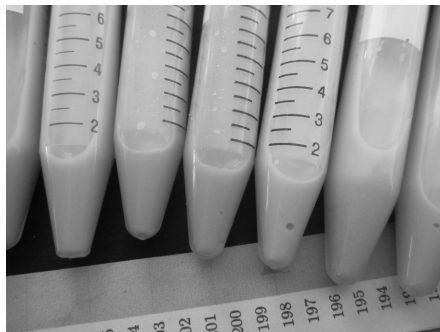
*Tučnější mléko by mělo být „bělejší“ – více světla rozptýlí a méně propustí skrz. Proveďte měření tučnosti mléka na základě rozptylu světla, přičemž jako barevnou škálu použijte přiložený papírek (pokud jste neřešili první sérii a chcete obdržet papírek, napište nám na [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)). Rozdíly nejlépe vyniknou, pokud do různých druhů mléka budete přidávat barvivo tak, aby jej v mléku byla stejná (malá) koncentrace. Jako barvivo můžete použít černou tuš. Samozřejmě je možno použít jakékoliv jiné barvivo, ale pak si budete muset vyrobit vlastní barevnou škálu, kterou přiložte k řešení. Zrealizujte měření pro různé druhy mléka a směsi mléka a vody. Diskutujte spolehlivost určení obsahu tuku.*

Nejprve si musíme uvědomit, z čeho se mléko skládá. Jedná se o komplexní směs sacharidů, lipidů a bílkovin. Ze sacharidů se zde vyskytují především mono- a disacharidy, z čehož většinu tvoří laktóza. Tyto sacharidy jsou snadno rozpustné ve vodě, a protože neobsahují násobné chemické vazby, nemají důvod výrazněji interagovat s viditelným světlem. Tuky jsou v mléce ve formě kapének, které mají velikost několika mikrometrů. Ovšem po homogenizaci, kterou prochází většina dostupných mlék, mají již jen stovky nanometrů. Další skupinou jsou bílkoviny. 80 % z nich tvoří kasein, který spolu s fosforečnanem vápenatým tvoří micely o velikosti několika stovek nanometrů. Zbytek bílkovin tvoří různé enzymy, povětšinou rozpustné ve vodě. I ostatní vyskytující se látky jsou rozpuštěny buď ve vodě, nebo tukových kapénkách.

Jak vidíme, jsou v mléce koloidní částice o velikosti několika stovek nanometrů, což je přibližně vlnová délka viditelného záření. Proto bude v této oblasti docházet k významnému rozptylu. Kvůli různým velikostem částic nebude existovat jedna preferovaná vlnová délka a mléko bude odrážet světlo všech barev, čímž se bude zdát bílé. Při zpracovávání mléka se odstraňuje tuk, kdežto obsah ostatních látek zůstává téměř nezměněn, jak lze snadno zjistit z informací na etiketě. Proto i mléko zcela zbavené tuku nebude průhledné, ale bude mít bílou barvu.

Jako měření jsme zvolili metodu, kdy jsme pomocí tuše obarvili mléko, při stejné koncentraci tuše pro různé vzorky, a porovnáním se škálou odečetli hodnotu, která odpovídá barvě se všemi třemi hodnotami RGB rovnými danému číslu na škále. Abychom dosáhli dostatečně nízkých koncentrací, tak jsme tuš ředili na dvakrát. Při prvním ředění jsme do 10 ml vody přidali pomocí automatické pipety 0,2 ml tuše a poté jsme 0,2 ml tohoto roztoku přidali do 10 ml mléka, čímž jsme získali koncentraci tuše okolo 0,038 %, která dávala barvu odpovídající zhruba středu škály.

Protože zdánlivá světlost silně závisela na osvětlení, snažili jsme se měřit ve stínu a zachovat co nejkonzistentnější osvětlení. Nejprve jsme od každého druhu mléka vzali jeden vzorek, ten zařadili a poté seřadili vzorky podle naměřené barevnosti. Získali jsme pořadí vzorků na obrázku 24. Jak jistě vidíte, absolutní přesnost je naprosto neuspokojivá. Proto jsme se od tohoto okamžiku snažili vždy měřit tak, aby pro nás byly důležité spíše relativní výsledky, a snažili jsme se srovnávat i vzorky mezi sebou. Proto jsme vzorky seřadili ve správném pořadí podle tmavosti,



Obr. 24: Tento obrázek demonstruje vysokou nespolehlivost použité metody, neboť zkumavky jsou seřazeny tak, jak jsme je určili „naslepo“, tedy bez porovnávání s ostatními vzorky. Zároveň demonstruje, jak neznatelné rozdíly byly mezi většinou vzorků.

nařadili na hodnoty na škále a další měření jsme prováděli porovnáváním s těmito vzorky, zároveň s kontrolou na škále. Pro každý druh mléka jsme použili 5 vzorků, z nichž jsme určili střední hodnotu a směrodatnou odchylku a získali jsme výsledky v tabulce 8.

Tyto výsledky jsme vynesli do grafu 25 a 26. Je zde vidět lehká korelace mezi obsahem tuku a bělostí, ale výsledky pro různé druhy mléka se stejným obsahem tuku se dost podstatně liší, takže nelze dělat spolehlivé závěry. Abychom dokázali odhadnout typ závislosti, potřebovali jsme použít vzorky s vyšším obsahem tuku, a proto jsme přidali mezi měřené vzorky dva druhy smetany, čímž jsme dostali graf 26.

Poté jsme zkusili prozkoumat závislost barvy na koncentraci tuše. Použili jsme smetanu s vyšším obsahem tuku kvůli vyššímu rozsahu měřených hodnot barevnosti, postupně jsme po 0,2 ml přidávali pipetou 2% roztok tuše a získali jsme hodnoty v grafu 27, kde jsme museli provádět korekci na objem přikapané tuše, který již není zanedbatelný a získali jsme tím přibližně lineární závislost.

Proto jsme s očekáváním lineární závislosti postupně připravovali vzorky se stále více ředěnou smetanou. Ředili jsme zároveň vodou, kde se tím pádem snižovala koncentrace tuku i bílkovin, a zároveň paralelně s tím jsme ředili odtučněným mlékem, kde se víceméně zachovávala koncentrace bílkovin. Získali jsme tím graf 28. Zajímavé na něm je, že barva smetany ředěné vodou a mlékem se příliš neliší,

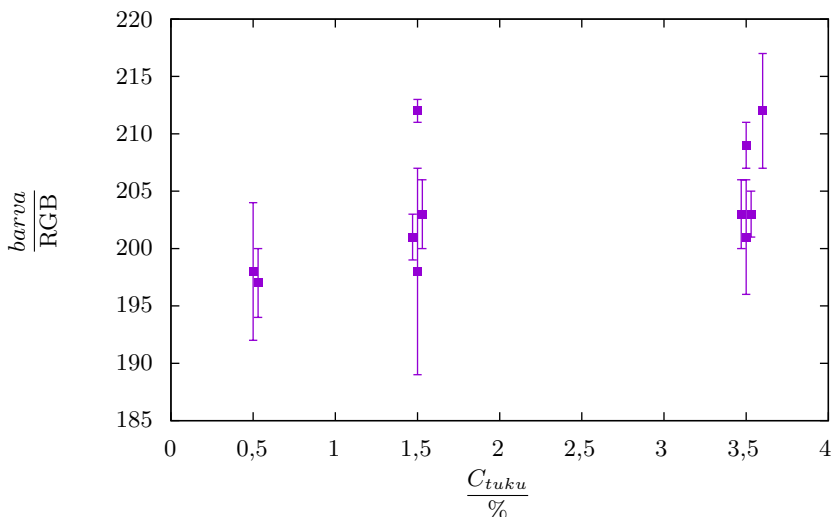
Tab. 8: Naměřená data pro dané druhy mléka a smetany

Druh mléka			$\frac{\text{barva}}{\text{RGB}}$	$\frac{\sigma_{\text{barva}}}{\text{RGB}}$
Ah Basic mléko plnotučné	trvanlivé	3.5%	201	5
Tesco mléko polotučné	čerstvé	1.5%	198	9
Madeta Jihočeské mléko odtučněné	trvanlivé	0.5%	197	3
Madeta Jihočeské mléko polotučné	trvanlivé	1.5%	203	3
Madeta Jihočeské mléko plnotučné	trvanlivé	3.5%	203	3
Madeta Jihočeské mléko polotučné	čerstvé	1.5%	201	2
Madeta Jihočeské mléko plnotučné	čerstvé	3.5%	203	2
Tesco mléko plnotučné	trvanlivé	3.5%	209	2
Pragolactos mléko polotučné	trvanlivé	1.5%	212	1
Tesco value mléko odtučněné	trvanlivé	0.5%	198	6
Selské mléko plnotučné	čerstvé	3.6%	212	5
Smetana na vaření		11%	226	2
Smetana ke šlehání		31%	232	3

až pro čistou vodu graf najednou prudce spadne, a rozdíl je dramatický. Měření pro čistou vodu bylo nemožné kvůli průhlednosti vody s tuší, proto jsme do něj museli přidat pár kapek mléka, abychom vůbec vzorek mohli přiřadit na škálu.

Právě kvůli skoku při nulové koncentraci jsme se rozhodli proměřit nízké koncentrace smetany a zjistit průběh. Smetanu jsme nejprve naředili na 10% roztok, a ten jsme pak ředili na požadovanou koncentraci. Tím jsme získali graf 29, kde jsme do horní osy přidali koncentraci tuku, vypočtenou z původního obsahu ve smetaně, a pro srovnání naměřená data pro různé druhy mléka. Při měření jsme postupovali vzestupně a pro koncentraci 5% jsme získali podobnou hodnotu, jako jsme naměřili předtím pro vysoké koncentrace smetany, kdežto pro 10% jsme získali hodnotu řádově vyšší, což zase ukazuje na nespolehlivost měření. Zároveň vidíme, že pro nízké koncentrace, které nás zajímají nejvíc, je závislost nelineární, a proto není možné výsledky extrapolovat na nulový obsah tuku, protože neznáme typ závislosti.

Každopádně se můžeme pokusit odhadnout, jaký je příspěvek tuku na celkové bělosti mléka. Když se podíváme na graf 29, vidíme, že odtučněnému mléku odpovídá hodnota přibližně 197, kdežto smetaně naředěné s ohledem na stejný obsah tuku, která ovšem obsahuje jen asi 1,5% bílkovin proti mléku, odpovídá hodnota 170. Hodnota odpovídající téměř čisté vodě je pak 145, což nám dává odhad, že tuk v mléce je zodpovědný za maximálně polovinu bílé barvy mléka. Jistotu nemůžeme mít kvůli tomu, že závislost barvy na koncentraci pro bílkoviny pravděpodobně bude mít podobně nelineární průběh pro nízké koncentrace, a proto i 1,5% procenta bílkovin může být nezanedbatelné množství. Navíc srovnáváme měření, které jsme prováděli nezávisle na sobě, a tudíž nemůžeme vyloučit částečně



Obr. 25: Naměřená data, měřeno bylo pro 5 vzorků od každého druhu mléka.

Data byla vytríděna podle obsahu tuku a částečně rozdělena kvůli přehlednosti – všechny body blízko sebe mají mít stejné množství tuku.

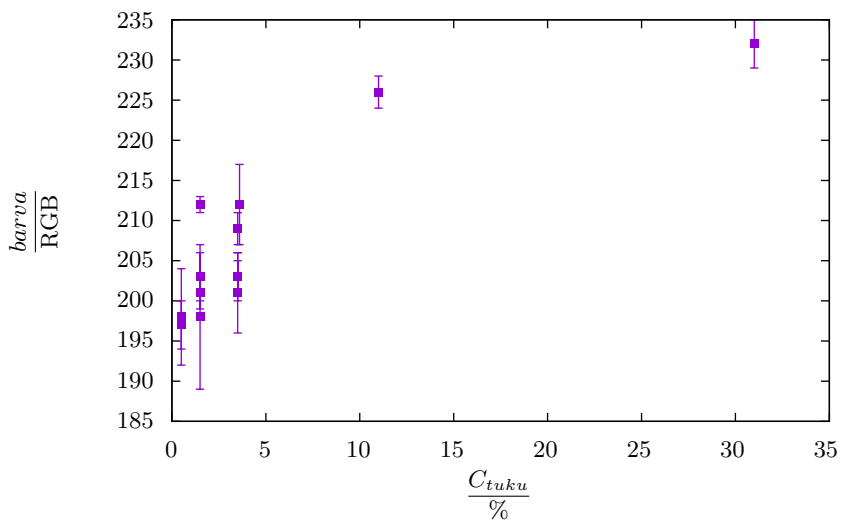
jiné osvětlení. (viz obrázek 24)

Je vidět, že se jedná o velice nepřesnou metodu, nejen kvůli vysokým odchylkám při měření více stejných vzorků, ale i kvůli podstatné systematické chybě způsobené měřením, kterou nelze odstranit, protože je při každé sérii měření jiná. Navíc je toto měření vysoce subjektivní, a dokonce experimentátor může ovlivnit měření tím, že má představu, jaký by mu měl přibližně vyjít výsledek. Kvůli tomu je toto měření téměř nereprodukovatelné, a pokud bychom chtěli získat nějaké věrohodné výsledky, museli bychom především upravit experimentální uspořádání, především tak, aby detektorem nebylo lidské oko.

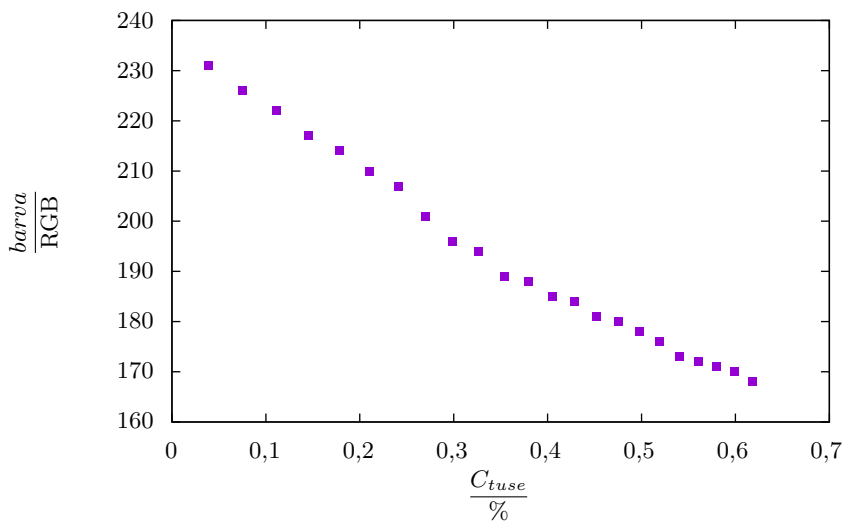
Nicméně v praxi se k tomuto účelu používá měření, které je založené na rozptylu světla procházejícího ředěným mlékem, kde se zkoumá množství prošlého světla.

Prostudovali jsme tedy tuto metodu, našli jsme určitou korelaci mezi množstvím tuku a barevností, ale kvůli vysokým odchylkám a malému množství bodů na škále jsme nedokázali určit, zda jde o lineární závislost. K určení obsahu tuku je ovšem přesnost nedostatečná. Na základě měření s ředěnou smetanou jsme došli k závěru, že tukové kapénky jsou složkou, která se na bílé barvě podílí nanejvýš polovinou, zbytek je pravděpodobně způsoben bílkovinami.

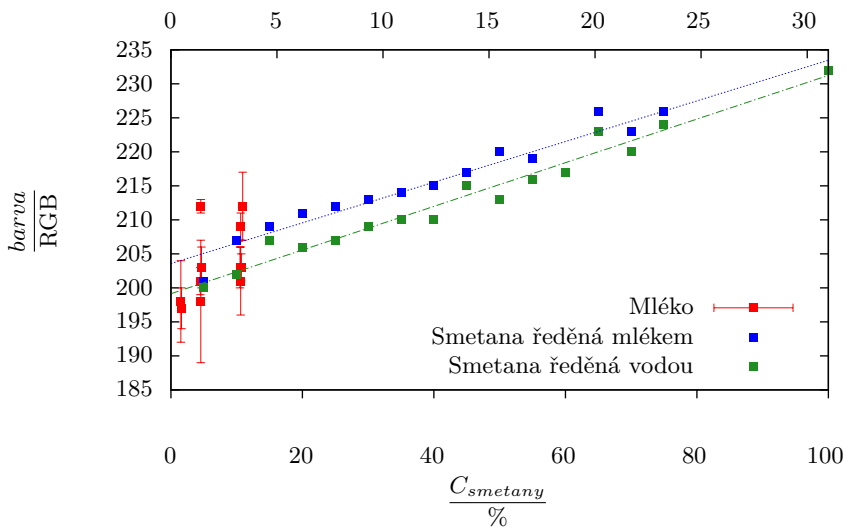




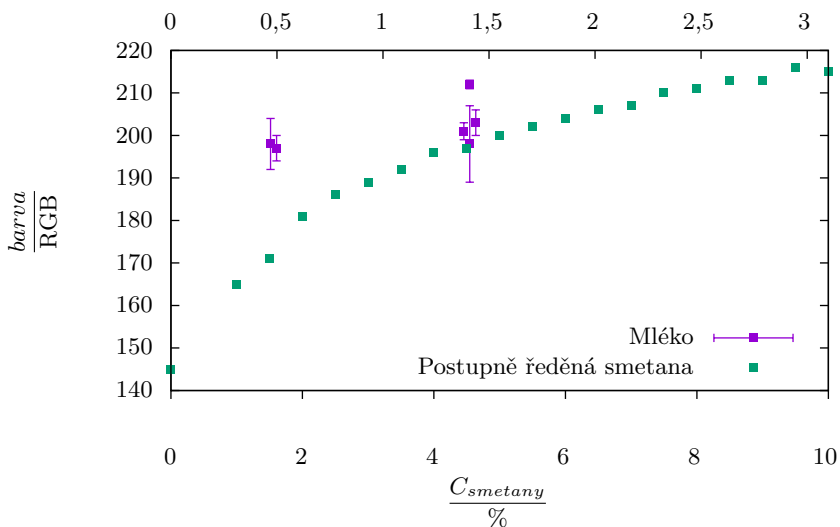
Obr. 26: Data z grafu 25, doplněná o dva druhy smetany.



Obr. 27: Závislost barvy na koncentraci tuše.



Obr. 28: Závislost barvy na koncentraci smetany. V horní ose pak přepočít na obsah tuku.



Obr. 29: Naměřená data pro nízké koncentrace smetany s vodou. V horní ose pak přepočít na obsah tuku.

## Úloha III.E . . . reflexní náramek

Změřte co nejvíce charakteristik samonavíjecího reflexního náramku. Zajímá nás především:

- Náramek je vyztužen kusem plechu, který může být ohnut podélně (svinutý náramek) nebo příčně (narovnaný náramek). Jaký poloměr křivosti mají tyto ohyby, pokud na plech nepůsobí vnější síla?
- Pokud náramek narovnáme a budeme ohýbat v jednom místě, při jakém úhlu přejde do ohnutého stavu? Při jakém úhlu se opět narovná? (Pozorujeme hysterezi?)
- Jaký moment síly je potřebný k ohnutí náramku?
- Je některý ze stavů náramku (svinutý nebo narovnaný) energeticky výhodnější? Odhadněte o kolik.

## Měření poloměrů křivosti

## Teorie

U svinutého náramku můžeme změřit přímo průměr  $r_1$  a vydělit ho dvěma. U narovnaného náramku změříme jeho šířku  $d$ , která je vlastně tětivou kružnice, a výšku svinutí  $h$ . Z toho pomocí Pythagorovy věty vyjádříme poloměr  $r_2$ .

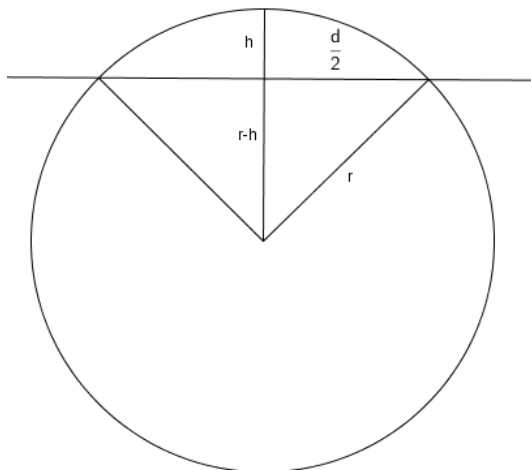
$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r_2 - h)^2 &= r_2^2 \\ \frac{d^2}{4} + r_2^2 - 2r_2h + h^2 &= r_2^2 \\ r_2 &= \frac{\frac{d^2}{4} + h^2}{2h} \end{aligned}$$

Poté podle vzorce

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

spočítáme výběrovou směrodatnou odchylku průměru. Nakonec dopočítáme nejistotu narovnaného poloměru zakřivení pomocí parciálních derivací:

$$\begin{aligned} \sigma(r_2) &= \sqrt{\left(\frac{\partial r_2}{\partial h} \sigma(h)\right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial d} \sigma(d)\right)^2} \\ \sigma(r_2) &= \sqrt{\left(\frac{4h^2 - d^2}{8h^2} \sigma(h)\right)^2 + \left(\frac{d}{4h} \sigma(d)\right)^2} \end{aligned}$$



Obr. 30: Měření poloměru svinutého náramku.

*Postup*

Měření jsme prováděli posuvným měřítkem. Nejprve jsme měřili průměr svinutého náramku, poté výšku  $h$  a šířku  $d$  nataženého. Každé měření jsme provedli desetkrát. Chyba jednoho měření je 0,1 mm.

*Výsledky*

Naměřená data jsou v tabulce 9.

$$r_1 = (3,55 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$r_2 = (3,44 \pm 0,09) \text{ cm}$$

*Diskuse*

Obě měření jsou poměrně přesná, měření poloměru prohnutí nataženého náramku je méně přesné, protože jsme nemohli měřit přímo, ale museli jsme tento poloměr vypočítat ze dvou měřených veličin. Nepřesnosti by mohly být způsobeny kromě lidské chyby a nepřesnosti měřidla také nerovností kusu plechu (nejde o přesný oblouk kružnice) a obalem reflexního pásku.

Tab. 9: Měření poloměru křivosti

Číslo měření	$\frac{r_1}{\text{cm}}$	$\frac{h}{\text{mm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$
1	3.67	2.8	2.56
2	3.46	2.3	2.51
3	3.54	2.2	2.52
4	3.30	2.4	2.49
5	3.38	2.6	2.50
6	3.92	2.5	2.52
7	3.50	2.1	2.45
8	3.61	2.2	2.55
9	3.57	2.4	2.53
10	3.54	2.4	2.54
Průměr	3.549	2.39	2.517
Výběrová směrodatná odchylka průměru	0.05	0.06	0.01

### Měření úhlu potřebného k ohnutí a narovnání náramku

#### Teorie

Úhel, při kterém se náramek přemění z nataženého stavu do svinutého, označíme  $\varphi_0$ , úhel, při kterém se svinutý náramek opět natáhne, označíme  $\varphi_n$ .

#### Postup

Reflexní pásek jsme izolepou připevnili na úhломěr (přesnost měření  $0,5^\circ$ ), nejprve tak, aby konec pásku ukazoval na nulu, později jsme zkusili jiný postup a připevnili ji na  $90^\circ$ . Poté jsme pásek ohýbali a opět narovnávali v počátku úhломěru a měřili úhel přechodu mezi stavy natažený a ohnutý. Měření jsme provedli patnáctkrát a poté jsme vypočítali výběrový průměr a výběrovou směrodatnou odchylku průměru.

#### Výsledky

Naměřená data jsou v tabulce 10.

$$\varphi_0 = 4,1^\circ \pm 0,3^\circ$$

$$\varphi_n = -0,3^\circ \pm 0,6^\circ$$

#### Diskuse

Obě měření vyšla velmi nepřesná, obzvlášť u druhého měření nemůžeme přesně říct, zda je úhel kladný nebo záporný - náramek musíme téměř úplně natáhnout a možná až ohnout opačným směrem, aby zůstal natažený. Téměř jistě však víme, že je úhel potřebný k natažení menší než úhel potřebný k ohnutí, čili že náramek má tendenci zůstat svinutý, čili pozorujeme hysterezi. Velké nepřesnosti jsou způsobeny malým měřeným úhlem a nepřesnou metodou měření.

Tab. 10: Měření kritického úhlu

Číslo měření	$\frac{\varphi_0}{\circ}$	$\frac{\varphi_n}{\circ}$
1	5	1
2	3	5
3	4	-1
4	3	1.5
5	2	-2
6	3	-1
7	5	4
8	6	-1
9	6	-2
10	4	-4
11	4	-4
12	5	0
13	4	0
14	3	-1
15	4	0
Výběrový průměr	4.1	-0.3
Směrodatná odchylka	0.3	0.6

### Měření momentu síly potřebného k ohnutí

#### Teorie

Moment síly je definován pomocí vztahu

$$M = Fr,$$

kde  $F$  je síla ohýbající náramek a  $r$  je vzdálenost působíště síly od bodu podepření. Moment síly potřebný na zlomenie náramku by měl být jeden pro celý náramek.

#### Postup

Náramek jsme položili na okraj stolu a jeho konec zatížili. Jako závaží jsme používali igelitový pytlík, do kterého jsme postupně přidávali bombóny. Bombóny jsme používali, protože jsme potřebovali závaží o malých rozdílech hmotnosti. Proto jsme zvažili vždy několik bombónů a celkovou hmotnost vydělili počtem bombónů. Poté jsme pro každý počet bombónů měřili vzdálenost, při které se náramek ohne.

#### Výsledky

Měření průměrné hmotnosti bombónu je uvedeno v tabulce 11, měření momentu síly v tabulce 12.

Protože momenty síly se velmi liší, zakreslili jsme do grafu závislost momentu síly na rameni síly. Protože u ramen se objevila velká mezera mezi 16 cm a 13,5 cm,

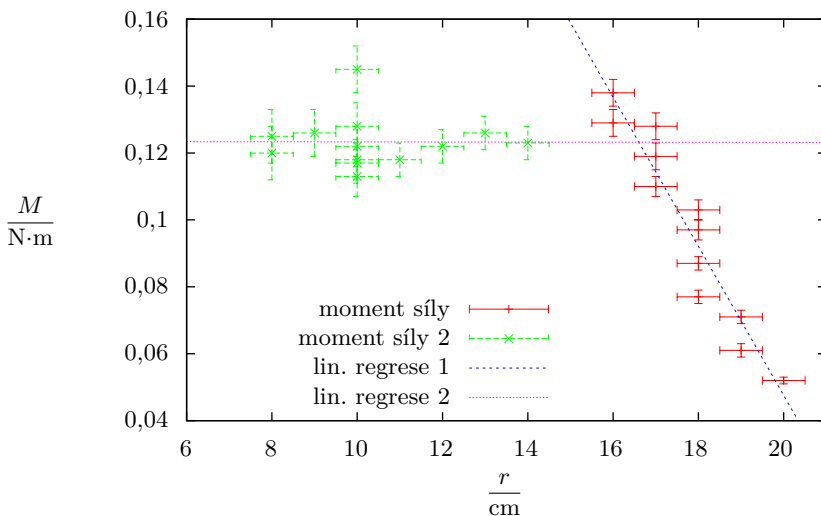
Tab. 11: Měření hmotnosti

Číslo měření	Počet bombónů	$\frac{m_{\text{celk}}}{\text{g}}$	$\frac{m_b}{\text{g}}$
1	20	109	5.54
2	17	93	5.47
3	20	109	5.45
4	15	82	5.47
5	13	72	5.53
Průměr	-	-	5.48
Směrodatná odchylka	-	-	0.02

Tab. 12: Měření momentu síly

Číslo měření	n	$\frac{m}{\text{kg}}$	$\frac{r}{\text{cm}}$	$\frac{M}{\text{N}\cdot\text{m}}$	$\frac{\sigma(M)}{\text{N}\cdot\text{m}}$
1	5	0.027	20	0.052	0.001
2	6	0.033	19	0.061	0.002
3	7	0.038	19	0.071	0.002
4	8	0.044	18	0.077	0.002
5	9	0.049	18	0.087	0.002
6	10	0.055	18	0.097	0.003
7	11	0.060	18	0.103	0.003
8	12	0.066	17	0.110	0.003
9	13	0.071	17	0.119	0.004
10	14	0.077	17	0.128	0.004
11	15	0.082	16	0.129	0.004
12	16	0.088	16	0.138	0.004
13	17	0.093	14	0.123	0.005
14	18	0.099	13	0.126	0.005
15	19	0.104	12	0.122	0.005
16	20	0.110	11	0.118	0.005
17	21	0.115	10	0.113	0.006
18	22	0.120	10	0.118	0.006
19	23	0.126	10	0.117	0.006
20	24	0.131	10	0.122	0.006
21	25	0.137	10	0.128	0.007
22	26	0.142	9	0.126	0.007
23	27	0.148	10	0.145	0.007
24	28	0.153	8	0.120	0.008
25	29	0.159	8	0.125	0.008

zakreslili jsme moment síly jako dvě funkce.



Obr. 31: Závislost momentu síly na vzdálenosti působitě

Obě funkce jsme proložili přímkou. Rovnice přímky v části s větším ramenem síly vychází  $M = -2,2 \text{ N} \cdot r + 0,49 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Část s menším ramenem síly vypadá jako konstanta, takže můžeme vypočítat moment síly v tomto úseku spolu se standardní odchylkou. Aritmetický průměr těchto hodnot je  $123 \text{ mN}\cdot\text{m}$  a standardní odchylka je  $2 \text{ mN}\cdot\text{m}$ . Protože je ale průměr nejistot měření momentu síly  $6 \text{ mN}\cdot\text{m}$ , musíme započítat i tuto chybu jako nejistotu typu B:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = \sqrt{(2 \text{ mN}\cdot\text{m})^2 + (6 \text{ mN}\cdot\text{m})^2} \doteq 7 \text{ mN}\cdot\text{m}$$

$$M = (123 \pm 7) \text{ mN}\cdot\text{m}$$

### Diskuse

Graf se překvapivě rozdělil do dvou rozdílných částí, kde jedna část je dle předpokladu konstantní, ale dle druhé to vypadá, že moment síly klesá lineárně s rostoucím ramenem síly. To by mohlo být způsobeno tím, že náramek se během zkoušení úhlu ohnutí zlomil přibližně uprostřed, a proto se liší hodnoty, kdy se uprostřed ramene nachází deformace a kdy ne. Pokud se uprostřed nenachází, chová se funkce jinak. Neumíme vysvětlit, proč zrovna lineárně klesá, ale tento trend je poměrně silný.

### Odhad energetické bilance

Pro náramek je určitě energeticky výhodnější být ve stavu svinutý, protože do něj velmi ochotně přechází. Rozdíl energetických stavů je daný prací, kterou je potřeba



k přechodu vykonat. Práce, kterou je potřeba vykonat k svinutí náramku, je menší než práce potřebná k natažení náramku, protože je mezi nimi energetická bariéra. (Pokud by tam nebyla, náramek by se svinoval sám od sebe.) Rozdíl energetických stavů je tedy dán rovnicí

$$\Delta E = W_{\text{natažení}} - W_{\text{svinutí}}.$$

Pokud chci tento rozdíl odhadnout, musím odhadnout obě práce. Práce se vypočítá jako součin síly a dráhy, po kterou tato síla působí. Pokud ohýbáme náramek, musíme náramek ohnout o úhel přibližně  $4,1^\circ$ . Pokud náramek ohýbáme v nějakém bodě, je vykonaná práce (úhel dosazujeme v radiánech; protože je úhel malý, aproximujeme spirálu kružnicí)

$$W_{\text{svinutí}} = Fs = Fr\varphi = M\varphi \doteq 8,8 \text{ mJ}.$$

Ještě dopočítáme chybu měření:

$$\sigma(W_{\text{svinutí}}) = \sqrt{(\varphi\sigma(M))^2 + (M\sigma(\varphi))^2} \doteq 2 \text{ mJ}.$$

Práce potřebná k natažení je tedy

$$W_{\text{svinutí}} = (9 \pm 2) \text{ mJ}.$$

Práci potřebnou k narovnání náramku spočítáme podobně. Sice jsme neměřili moment síly potřebný k natažení, ale protože se jedná pouze o řádový odhad, budeme předpokládat, že je stejný jako ten pro svinutí. Dráha, po které působíme touto silou, je část Archimédovy spirály.

Pokud jsou souřadnice koncového bodu spirály  $r$  a  $\vartheta$ , její délku vypočítáme podle vzorce <sup>1</sup>

$$s = r \left( 1 + \frac{\vartheta}{2} \right).$$

V případě rozvinování náramku je úhel přibližně  $\vartheta = 180,3^\circ$ . Pokud bychom počítali, že náramek narovnááme v jednom bodě a působíme stejným momentem síly jako při natahování, je vykonaná práce:

$$W_{\text{natažení}} = Fs = Fr \left( 1 + \frac{\vartheta}{2} \right) = M \left( 1 + \frac{\vartheta}{2} \right) \doteq 0,316 2 \text{ J},$$

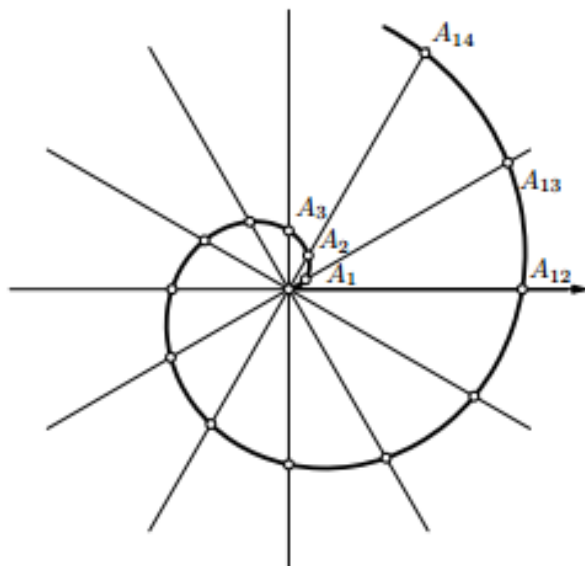
$$\sigma(W_{\text{natažení}}) = \sqrt{\left( \left( 1 + \frac{\vartheta}{2} \right) \sigma(M) \right)^2 + \left( \frac{M}{2} \sigma(\varphi) \right)^2} \doteq 0,02 \text{ J}.$$

Takto určená nejistota je sice poměrně malá, použité předpoklady ale způsobují výrazně větší nejistoty. Práce potřebná k natažení je tedy přibližně

$$W_{\text{natažení}} = 0,3 \text{ J}.$$

---

<sup>1</sup> zdroj: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>



Obr. 32: Dráha působení síly.

Dopočítáme energetický rozdíl obou stavů náramku:

$$\Delta E = 0,3 \text{ J}$$

Toto je však spíše řádový odhad, jelikož pro natahování jsme nedokázali změřit moment síly. Je možné, že ten bude o hodně větší než náš odhad, neboť taky může záviset na tom, nakolik je náramek svinutý.

### Závěr

Svinutý a natažený náramek mají přibližně stejné poloměry křivosti, konkrétně svinutý náramek  $r_1 = (3,55 \pm 0,05)$  cm a natažený  $r_2 = (3,44 \pm 0,09)$  cm.

Při ohýbání náramku pozorujeme hysterezi, když pro svinutí je třeba úhel  $\varphi_0 = (4,1 \pm 0,3)^\circ$  a pro natažení úhel  $\varphi_n = (-0,3 \pm 0,6)^\circ$ .

Moment síly potřebný k ohnutí náramku má v jednom úseku velikost  $M = (123 \pm 7)$  mN·m, celkově však možná kvůli deformaci náramku není konstantní.

Pro náramek je energeticky výhodnější být ve stavu svinutý, energetický rozdíl mezi těmito stavy je přibližně  $\Delta E = 0,3 \text{ J}$ .

## Úloha IV.E . . . Mikulášova vejce

Změřte povrch ptačího (např. slepičího) vejce.

*Teorie*

Je několik způsobů, jak zjistit povrch průměrného vejce. Mohli bychom například omotat vejce provázkem o změřené průměrné šířce a pak změřit délku provazu. Také bychom mohli vejce vyfouknout, naplnit ho vodou, zjistit tak objem skořápky a nakonec díky znalosti tloušťky vejce vypočítat jeho povrch. Pro matematicky nadanější existuje možnost vejce aproximovat jako funkci souřadnic a vypočítat povrch numericky.

Pro náš pokus jsme zvolili slepičí vejce velikosti M. Vybraná metoda měření je velmi podobná druhému popsanému způsobu. Nejprve vejce rozklepneme a odstraníme bílek se žloutkem<sup>2</sup>. Vnitřek skořápky vysušíme a odstraníme vnitřní blánu. Na několika místech změříme tloušťku skořápky  $l$  posuvným měřidlem. Poté zjistíme objem vysušené skořápky  $V$  v odměrném válci. Celkový povrch skořápky  $S$  pak vypočítáme jako podíl

$$S = \frac{V}{l}.$$

Odchylky mohou vznikat několika různými způsoby. Posuvným měřidlem měříme s přesností  $\pm 0,05$  mm, objem byl měřen v odměrném válci s přesností  $\pm 0,25$  ml. Metoda předpokládá konstantní tloušťku celé skořápky. Dále potřebujeme tak tenkou skořápku, že vnitřní povrch je zhruba stejný jako vnější, a tedy zakřivení skořápky dává zanedbatelný efekt. Skořápky vybraných vajec jsme vysušili kuchyňskými utěrkami, aby se zamezilo chybám při měření objemu. Skořápky jsme lámali nad čistým bílým papírem. Do válce se skořápka sypala přímo z papíru, abychom zamezili ztrátám drobných úlomků skořápky.

*Výsledky*

Celkem jsme měřili 6 vajec. Abychom zjistili průměrnou tloušťku skořápky, měřili jsme ji posuvným měřidlem na pěti různých místech. Průměrnou tloušťku skořápky i s dalšími naměřenými údaji máme v tabulce 13. Objem skořápky se dá změřit pouze jednou. Je to způsobeno tím, že použitý odměrný válec byl příliš úzký na to, abychom z něj mohli skořápky jednoduše vyndat, přesušit a pokus zopakovat. V tabulce 14 najdeme průměrné hodnoty tlouštěk skořápek, naměřený objem jedné skořápky a vypočítaný povrch každého vejce. Chyby jsme zjišťovali podle Gaussova zákona propagace chyb, tedy ze vzorce

$$\Delta S^2 = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \Delta V \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial l} \Delta l \right)^2 = \left( \frac{1}{l} \Delta V \right)^2 + \left( \frac{V}{l^2} \Delta l \right)^2$$

Tento vzorec můžete znát ze třetího dílu letošního seriálu.

<sup>2</sup>Můžeme si z nich například udělat omeletu podle chuti.

Zprůměrováním měřených vajec dospějeme k závěru, že průměrné slepičí vejce má povrch  $(66 \pm 12)\text{cm}^2$ .

Tab. 13: naměřené tloušťky vajec i s jejich průměrnou hodnotou se statistickou odchylkou

číslo měření	vejce 1 $l$ [mm]	vejce 2 $l$ [mm]	vejce 3 $l$ [mm]	vejce 4 $l$ [mm]	vejce 5 $l$ [mm]	vejce 6 $l$ [mm]
1	0.55	0.45	0.40	0.40	0.50	0.40
2	0.55	0.50	0.45	0.45	0.45	0.40
3	0.55	0.50	0.40	0.40	0.50	0.40
4	0.50	0.45	0.45	0.40	0.50	0.45
5	0.55	0.45	0.45	0.45	0.50	0.40
průměr	$0.54 \pm 0.05$	$0.47 \pm 0.06$	$0.43 \pm 0.06$	$0.42 \pm 0.06$	$0.49 \pm 0.05$	$0.41 \pm 0.05$

Tab. 14: charakterizace jednotlivých skořápek

číslo vejce	$l$ [mm]	$\Delta l$ [mm]	$V$ [ml]	$\Delta V$ [ml]	$S$ [cm <sup>2</sup> ]	$\Delta S$ [cm <sup>2</sup> ]
1	0.54	0.05	3.00	0.25	56	7
2	0.47	0.06	3.00	0.25	64	9
3	0.43	0.06	3.25	0.25	76	12
4	0.42	0.06	2.75	0.25	65	11
5	0.49	0.05	3.25	0.25	66	9
6	0.41	0.05	2.75	0.25	67	11

### Diskuse

Můžeme si všimnout, že největší chybu nám do měření vnášely nepřesnosti měřidel. Můžeme se proto domnívat, že s lepším vybavením bychom pravděpodobně došli k přesnějším výsledkům.

Když se podíváme do tabulky 13, zjistíme, že tloušťky skořápek různých vajec se sice mohou lišit, ale v rámci jednoho vejce se tloušťka skořápky měřená na několika místech vejce nelišila od průměrné hodnoty ani o nejmenší dílek stupnice.

Pokud bychom vejce aproximovali za kouli, spočítali její poloměr, odečetli tloušťku nejsilnější skořápky a znovu přepočítali na povrch koule, dostali bychom  $62\text{cm}^2$ . Vidíme, že rozdíl mezi vnitřním a vnějším povrchem skořápky máme asi 3%. S přesnějšími měřidly bychom tuto chybu měli brát v potaz, ale v našem přiblížení je zanedbatelná.

Měřili jsme 6 různých vajec, jejich povrchy se neliší o víc než je odchylka měření, čo je ale len kvôli veľkosťou našich odchýlok, vieme že všetky vajcia nie sú rovnaké a pri presnejšom meraní by sme tieto rozdieli videli. Mohli by sme rozumne

predpokladat, že plochy vajec mají Gaussovskou distribúciu okolo strednej hodnoty ktorú sme zmerali, tento predpoklad ale narúša to, že do našej vzorky sa dostanú len vajcia v určitom rozsahu veľkostí určeným distribútorom, teda distribúcia je z oboch strán orezaná a určit jej smerodatnú odchýlku je nad rámec tohto textu. Změřili jsme, že stredný povrch vejce se bude blížit hodnotě 70 cm<sup>2</sup>.

## Úloha V.E ... vlasce

Změřte modul pružnosti v torzi vlasce  $G$ , který jsme vám poslali společně se zadáním.

### Úvod

V našem experimentu budeme měřit modul pružnosti v torzi  $G$  pomocí tzv. *torzního kyvadla*. Takovým kyvadlem běžně rozumíme tuhé těleso zavěšené na pružném závěsu, kterým je v našem případě zkoumaný vlasce. Toto těleso pak může volně kmitat ve vodorovné rovině kolem svislé osy závěsu<sup>3</sup>. Vzhledem k parametrům vlasce, který jsme měli k dispozici, jsme zvolili tento způsob měření modulu  $G$ .

### Teorie

Jak jsme již nastínili v úvodním odstavci, při našem měření budeme chtít matematicky popsat volné kmity tělesa, které otočíme kolem svislé osy, a to se tak začne otáčet proti směru výchylky vlivem sil pružnosti závěsu a po dosažení opačné výchylky se vrací zpět – což označujeme jako torzní kmity. Z naměřené periody těchto kmitů a dalších parametrů kyvadla pak stanovíme hledaný modul pružnosti v torzi.

Vztah pro výpočet periody torzních kmitů lze v našem případě odvodit velmi podobně jako periodu malých výchylek matematického kyvadla. Při experimentu bude na zavěšené těleso vychýlené o úhel  $\varphi$  působit moment síly

$$M = -D\varphi.$$

Tento výraz je definičním vztahem pro direkční moment  $D$ . Za předpokladu, že vlasce má kruhový průřez, lze jeho direkční moment vyjádřit jako

$$D = \frac{\pi GR^4}{2l}, \quad (62)$$

kde  $R$  je poloměr průřezu vlasce,  $l$  je jeho délka a  $G$  hledaný modul pružnosti v torzi.

Pokud budeme předpokládat, že těleso zavěšené na vlasci má mnohem větší moment setrvačnosti  $J$  než vlasce, platí pro neznámý úhel  $\varphi$  pohybová rovnice ve tvaru

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}J + \varphi D = 0.$$

<sup>3</sup>Torzní kyvadlo však obecně může mít podstatně více podob, předešlá definice rozhodně není vyčerpávající.

Pro periodu  $T$  odvodíme podobně jako u klasického kyvadla rovnici

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (63)$$

Jako závaží jsme použili homogenní válec s momentem setrvačnosti

$$J = \frac{mr^2}{2}.$$

S touto uvažovanou hodnotou  $J$  vyjádříme hledaný modul  $G$  ze vztahů (62) a (63) jako

$$G = \frac{8\pi J l}{R^4 T^2} = \frac{4\pi m r^2 l}{R^4 T^2}. \quad (64)$$

Obecně můžeme jako závaží použít libovolné těleso, to však v praxi může mít poměrně velký odpor vzduchu a právě proto je tedy dobré vybrat si k experimentu např. kouli nebo válec o vysoké hustotě.

### Parametry vlasce a závaží

Délka závěsu byla změřena jako  $l = (1,44 \pm 0,01)$  m, kde směrodatná odchylka byla určena jako kombinace chyby určení krajních bodů (na závaží i na závěsu jsme byli vlivem pružnosti vlasce a tíhy závaží nuceni udělat neforemné uzly) a chyby měřidla  $\pm 1$  mm. Průměr vlasce udávaný výrobcem je  $2R = 0,8$  mm, jeho odchylku odhadneme na 0,01 mm.

Dále parametry kovového válce byly průměr  $2r = (8,2 \pm 0,1)$  cm, výška  $v = (11,9 \pm 0,2)$  cm a hmotnost  $m = 5$  kg (můžeme uvažovat jako přesnou vzhledem k povaze našeho měření).

### Pracovní postup

Nejprve připevníme vlasce k nějaké pevné podložce, v našem případě to byl dřevěný trám u stropu. Na jeho druhý konec jsme dále pověsili závaží s hmotností  $m$  a udělali si na něj značku (pro snadné zjištění, kdy při experimentu toto závaží projde rovnovážnou polohou). Válec poté pootočíme do počáteční polohy, pustíme a patnáctkrát změříme půlperiodu kmitů. Nejdříve mezi časy, kdy se zastaví, poté mezi časy průchodu rovnovážnou polohou.

Měříme při výchylkách v rozsahu  $\varphi_{\min} = \pi$  a  $\varphi_{\max} = 10\pi$ .

Jako systematickou chybu určení času můžeme uvažovat hodnotu  $\pm 0,2$  s, která je poměrně typickou hodnotou odpovídající rychlosti lidských reflexů.

Měření jsme provedli i s lahví kofoly jako závažím. Výsledné hodnoty byly přibližně stejné, ovšem s mnohem menší přesností, protože neumíme dobře určit moment setrvačnosti.

Tab. 15: Délky půlperiod torzního kyvadla.

Měření	mezi body zastavení		mezi rovn. polohami	
	$\frac{T_{1/2}}{s}$	$\frac{T}{s}$	$\frac{T_{1/2}}{s}$	$\frac{T}{s}$
1	29,36	58,72	32,92	65,84
2	28,20	56,40	26,79	53,58
3	29,67	59,34	31,70	63,40
4	30,12	60,24	27,99	55,98
5	28,69	57,38	30,67	61,34
6	28,69	57,38	26,40	52,80
7	29,53	59,06	29,03	58,06
8	30,54	61,08	29,87	59,74
9	28,99	57,98	28,83	57,66
10	30,64	61,28	30,15	60,3
11	28,65	57,30	29,71	59,42
12	32,72	65,44	29,62	59,24
13	26,80	53,60	33,42	66,84
14	29,77	59,54	29,95	59,90
15	27,62	55,24	29,48	58,96

### Výsledky měření

V tab. 15 můžeme vidět naměřená data půlperiod mezi dvěma různými uvažovanými polohami.

Měřená půlperioda během experimentu se mohla změnit v závislosti na tlumení (vyvolaném v důsledku příslušných odporových sil). Tlumení max. výchylky bylo dobře pozorované po několika periodách, nepozorujeme však, že by výrazně ovlivnilo délku jedné půlperiody.

Určíme tedy aritmetický průměr se standardní odchylkou těchto dvou měřených period. Pro kmitání kyvadla mezi body jeho zastavení to je  $\bar{T}_1 = (58,7 \pm 0,8) \text{ s}$  a pro kmitání mezi rovnovážnými polohami  $\bar{T}_2 = (60 \pm 1) \text{ s}$ .

Výsledný modul pružnosti v jednotlivých případech je  $G_1 = 1,72 \text{ GPa}$ ,  $G_2 = 1,65 \text{ GPa}$ .

### Nejistoty měření

Většinu fyzikálních veličin nejsme schopni změřit naprosto přesně, a tudíž je potřeba pracovat s chybami, kterých se během měření dopouštíme. Předně nás zajímá to, jaká je celková směrodatná odchylka měření naší hledané veličiny. Tu musíme určit pomocí metody přenosu chyb jako odmocninu součtu kvadrátů prvních parciálních derivací podle každé z veličin vystupujících ve vztahu (64) vynásobených

jejich vlastními chybami. To zařídíme tímto výpočtem

$$s_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial m} s_m\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial r} s_r\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial l} s_l\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial R} s_R\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T} s_T\right)^2}$$

$$= G \sqrt{\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2s_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{s_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{4s_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{2s_T}{T}\right)^2}.$$

Za chybu měření času považujeme pouze statistickou chybu, systematická je vůči ní zanedbatelná.

Pomocí těchto výpočtů a vztahů odvozených v teorii jsme byli schopni vyčíslit celkovou směrodatnou odchylku  $G$  jako 0,1 GPa pro periodu kmitů měřenou mezi body zastavení kyvadla i pro periodu kmitů měřenou mezi body průchodu rovnovážnou polohou.

### Diskuse

Jako tomu bývá u každého fyzikálního měření, i my jsme se dopustili dokonce celé řady nepřesností a chyb různé povahy. Úspěšnost správného změření modulu  $G$  v našem případě dost záležela na tom, jak přesně jsme byli schopni určit poloměr  $R$  zkoumaného vlasce, neboť ve vztahu, z něž počítáme hledanou veličinu  $G$ , vystupuje dokonce ve čtvrté mocnině. Při měření průměrů tenkých vlasců pomocí posuvného měřítka hrozí velká nejistota v důsledku přílišného stisknutí (deformace) vlasce. Velkou nepřesnost může způsobit především nehomogenita průměru vlasce po jeho délce, neboť ke kroucení bude docházet ve zvýšené míře právě ve zúžených oblastech. Další nepřesnost je do měření pomocí torzního kyvadla zanesena měřením délky závěsu. V našem případě jsme nedokázali zajistit, aby k torzi nedocházelo do určité míry i v části za uzly nebo aby se uzly vlivem tíhy závaží nedeformovali, hodnota  $l$  je proto mírně podhodnocena.

Těžký válec je pro experiment poměrně vhodné těleso. Jediným problémem bylo, že se pod jeho tíhou vlasce elasticky natahoval, a to zhruba o  $1 \text{ cm} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Délku vlasce jsme měřili po zavěšení závaží. Plastické (neboli nevratné) protahování vlasce pak neuvažujeme - při pětikilovém závaží k němu nejspíš dochází, ale zanedbatelně pomalu.

Torzní kyvadlo můžeme považovat za harmonické i pro velké výchylky. Narušují to vedlejší kmity ve svislé rovině či vychýlení závaží. Pak měření ovlivňuje taky nepřesnost určení momentů zastavení a průchodu rovnovážnou polohou.

Běžně by naše měření bylo dále zatíženo ještě chybou měření hmotnosti experimentálních závaží, stanovování parametrů tělesa na závěsu a aproximací jeho tvaru. Tady máme standardní válcové závaží, které nám tuto část zjednodušuje.

Moduly pružnosti v torzi polymerů používaných pro výrobu vlasců se pohybují v jednotkách GPa, pro kovy jde o desítky GPa. Nejběžněji dostupná jsou nylonová vlákna a modul pružnosti v torzi pro nylon je 4,1 GPa,<sup>4</sup> což je hodnota řádově shodná s naším měřením.

<sup>4</sup>[http://www.engineeringtoolbox.com/modulus-rigidity-d\\_946.html](http://www.engineeringtoolbox.com/modulus-rigidity-d_946.html)



My neznáme materiál, ze kterého je náš vlasce vyrobený. Kdyby to byl nylon, možné důvody odchylky od tabulkové hodnoty můžou být výroba silnějšího vlasce, pokud se má víc namáhat (zvyšuje modul pružnosti) nebo degradace/poruchy vlasce (snižuje modul pružnosti).

### Závěr

Proměřili jsme modul pružnosti torzním kyvadlem dvěma podobnými způsoby. Oba dali v rámci chyby měření stejný výsledek  $G = (1,7 \pm 0,1)$  GPa.

### Komentáře k došlým řešením

Měření jsme provedli s jiným vlascem jako posílaným. Stejně tak byly parametry vlasce i výsledné moduly pružnosti mezi došlými řešeními celkem různé – někteří z vás nejspíš použili vlastní vlasce. Cílem experimentální úlohy ovšem není tak dojít k číslu jako udělat experiment.

## Úloha VI.E . . . skladba jako od Cimrmana

Sežeňte si skleničku na víno, ideálně tenkou se zabroušeným okrajem. Nejprve změřte vnitřní průměr skleničky v závislosti na výšce ode dna. Pak ji rozeznívejte, ideálně navlhčeným prstem pohybem po jejím okraji – někdy to chce trochu trpělivosti. Změřte závislost frekvence tónů, které sklenička vydává v závislosti na výšce naplnění vody v ní (alespoň pro 5 hladin vody a dvě frekvence v každé výšce).

Nápověda: Pokud je sklenička tenkostěnná, můžete její vnitřní rozměry považovat za stejné jako vnější a díky tomu závislost jejího průměru na výšce určit z vhodné fotografie s měřítkem. Pro měření zvuku doporučujeme freeware program Audacity (Rozbor → Kreslit spektrum).

### Teorie

Když kroužíme navlhčeným prstem po okraji vinné sklenky (je-li okraj pozlacený, nefunguje to až tak dobře), její stěny se rozechvívají a výsledné vibrace vnímá ucho jako zvuk o určité frekvenci, tedy tón. Je známo, že s rostoucí výškou hladiny ve skleničce se výška tónu snižuje. V tomto experimentu si klademe za cíl přibližně určit závislost tónu na výšce hladiny.

Při matematickém rozboru vycházíme z článku *French, A. P.: In Vino Veritas: A study of wineglass acoustics*<sup>5</sup>, ve kterém je problematika rezonance skleničky důkladně popsána. Veškeré vzorce a netriviální informace mají za zdroj tento článek.

Nejprve si zde uvedeme veličiny a konstanty, které budeme používat.

- Parametry skleničky:
  - výška  $H$
  - poloměr  $R$
  - tloušťka stěny  $a$

<sup>5</sup>Veřejně dostupný je např. na <https://sci-hub.io/10.1119/1.13147>

- Parametry materiálu:
  - hustota skla  $\rho_g$
  - hustota vody  $\rho_l$
  - Youngův modul pružnosti skla  $Y$

Pro základní rezonanční frekvenci prázdné skleničky platí podle článku vzorec

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3Y}{5\rho_g}} \frac{a}{R^2} \sqrt{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{R}{H}\right)^4}. \quad (65)$$

Pro frekvenci částečně naplněné skleničky při výšce hladiny  $h$  platí

$$f_h/f_0 \approx 1/\sqrt{1 + \frac{1}{5}KR\frac{\rho_l}{\rho_g a} \left(\frac{h}{H}\right)^4}, \quad (66)$$

kde  $K$  je konstanta závislá na tvaru skleničky, řádově 1.

Skleničku považujeme za válec; do vzorce by se měla dosazovat *efektivní výška* skleničky, nikoliv skutečná. Ta efektivní je o něco menší, protože sklenička je zaoblená. Počítat s ní by bylo zbytečně složité, přepočít na efektivní výšku zahrneme do konstanty  $K$  a za  $H$  dosadíme skutečnou výšku.

Pro tento experiment potřebujeme následující:

- vinná sklenka
- pravítko
- počítač se zabudovaným mikrofonom a s nainstalovaným softwarem na analýzu záznamu zvuku (Audacity)

Skleničku vyfotíme s přiloženým pravítkem. Na obrázku změříme její šířku v několika bodech. Poté pomocí softwaru Audacity určíme dominantní frekvence tónů vydávaných při určité výšce hladiny a najdeme funkci, na které závisí.

### Měření

Parametry skla jsou přibližně  $\rho_g \approx 3 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ,  $Y \approx 60 \text{ GPa}$ . Hustota vody  $\rho_l = 1,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

Referenční sklenička je tenkostěnná (tloušťka stěny max. jeden milimetr, tedy  $a = 1 \text{ mm}$ ) s čistým okrajem (na obr. 33).

Na obrázku jsme změřili její průměr v několika výškách, měřeno od hrdla. Hloubka skleničky  $H$  je asi 7,2 cm, jako měřítko sloužilo pravítko s milimetrovou stupnicí, tedy s větší přesností než na jedno desetinné místo nemá smysl výsledky uvádět.

Vidíme, že šířka skleničky u hrdla je 6 cm (tedy uvažujme  $R = 3 \text{ cm}$ ) a šířka skleničky v nejširším bodě asi 7,3 cm, tedy vnitřní průměr skleničky v nejširším bodě je přibližně stejný jako její hloubka.

Výšku tónu jsme měřili pro výšku hladiny ode dna skleničky v celých centimetrech. Pro každou výšku hladiny jsme provedli tři nebo čtyři měření a změřili jsme jak dominantní frekvenci (a k ní sdružené frekvence), tak i nečekanou, leč



Obr. 33: Sklenka

Tab. 16: Průměr skleničky

výška od hrdla [cm]	průměr [cm]
0,0	6,0
1,0	6,6
2,0	7,1
3,0	7,2
4,0	7,3
5,0	7,0
6,0	6,2

výraznou boční frekvenci (ta byla tak vysoká, že tón byl uchem špatně slyšitelný, ale objevovala se pravidelně). Naměřené hodnoty i se spočtenými statistickými odchylkami jsou uvedeny v tabulkách 17 a 18.

Systematická odchylka je řádově menší než frekvence i o hodně menší než rozdíl mezi frekvencemi (do 4 Hz na jedno měření).

Dosadíme za proměnné ve vzorcích (zatím se skutečnou výškou). Vidíme, že vzorec počítá zhruba poloviční frekvence, než jaké jsme naměřili, což jsou frekvence sdružené. I bez přepočtu na efektivní výšku tedy vychází rozumné výsledky.

Když zkusíme odhadnout efektivní výšku (třeba pomocí matematického software), pro prázdnou skleničku nejlépe vyjde hodnota přibližně  $H' = 6,3$  cm. Zkusíme to tedy dosadit. Výsledky pro skutečnou i efektivní výšku jsou v tabulce 19.

Tyto hodnoty sedí přesněji, stále sice ne úplně (což by bylo divné, protože v měření máme určitě nějaké nepřesnosti), ale už dost přesně na to, abychom mohli potvrdit funkčnost vzorce.

Vynesli jsme do grafu 34 naměřené frekvence spolu s teoretickou hodnotou  $2f_h$

Tab. 17: Výška tónu

výška hladiny [cm]	dominantní frekvence [Hz]	vedlejší frekvence [Hz]
0,0	1 266	14 734
0,0	1 265	14 735
0,0	1 268	14 739
0,0	1 267	14 732
1,0	1 258	14 743
1,0	1 258	14 742
1,0	1 260	14 740
2,0	1 249	14 750
2,0	1 246	14 754
2,0	1 243	14 757
2,0	1 245	14 755
3,0	1 208	14 790
3,0	1 209	14 791
3,0	1 209	14 792
4,0	1 115	14 884
4,0	1 118	14 884
4,0	1 115	14 885
5,0	977	15 026
5,0	978	15 023
5,0	977	15 022

Tab. 18: Výška tónu, průměr

výška hladiny [cm]	dominantní frekvence [Hz]	vedlejší frekvence [Hz]
0,0	$1\,266,5 \pm 0,7$	$14\,735 \pm 2$
1,0	$1\,258,7 \pm 0,7$	$14\,741,7 \pm 0,9$
2,0	$1\,245,8 \pm 0,9$	$14\,754 \pm 2$
3,0	$1\,208,7 \pm 0,4$	$14\,791,0 \pm 0,6$
4,0	$1\,116 \pm 1$	$14\,884,3 \pm 0,4$
5,0	$977,3 \pm 0,4$	$15\,024 \pm 1$

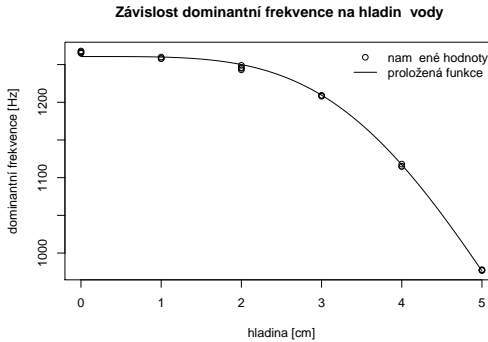
podle vzorců (65) a (66). Také jsme provedli fit funkcí ve tvaru

$$\frac{2F}{\sqrt{1 + Cx^4}}, \quad (67)$$

což je přesně funkce  $2f_h$  (66) s dvěma neznámými parametry zahrnujícími všechny fyzikální veličiny vystupující v teorii, pro šest hodnot  $h$ , které známe, a z toho jsme zjistili hodnoty  $F = (631,5 \pm 0,5)$  Hz a  $C = (1,069 \cdot 10^{-3} \pm 1,1 \cdot 10^{-5})$  cm<sup>-4</sup>.

Tab. 19: Frekvence vypočítané ze vzorců 65 a 66

výška hladiny [cm]	frekvence [Hz]	frekvence s efektivní výškou [Hz]
0,0	624,78	633,24
1,0	624,55	632,84
2,0	621,09	626,91
3,0	606,76	602,99
4,0	572,61	550,12
5,0	516,17	472,84



Obr. 34: Frekvence v grafu

### Diskuze

Podle vzorce 65 vychází  $f_0 = 633,24$  Hz. Parametr  $F$  v (67) odpovídá  $f_0$ , parametr  $C$  výrazu  $\frac{KR\varrho_1}{5\varrho_g a H^{7/4}}$ , jehož teoretická hodnota pro  $K = 1$  je  $1,270 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-4}$ .

Potvrdilo se, že s rostoucí hladinou frekvence klesá. Vidíme, že uvedená teorie velice přesně odpovídá měření, ačkoli některé veličiny umíme pouze odhadnout.

Největší chybou v měření byl lidský faktor (např. nepravidelné kroužení prstem, nepřesné dolévání vody), dále jsme se setkávali s omezenou přesností měřidel. Také mohlo měření ovlivnit to, že sklenička nebyla upevněna v držáku, nýbrž přidržována rukou, a že se pokaždé nacházela trochu jinak daleko od mikrofonu. Další nepřesnosti v měření jsou způsobené např. tvarem skleničky, nehomogenitou skla a různou tloušťkou stěn skleničky.

Není jasné, jakému vlnění odpovídá neslyšitelná frekvence, může jít například o efekt dutinového (Helmholtzova) rezonátoru – řádově to odpovídá, ale teorie pro provázané vlnění ve vodě, vzduchu (a případně skle) je extrémně složitá.

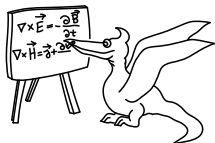
### Závěr

Naměřili jsme dvě výrazné frekvence zvuku. Jedna z nich je uvedená v tabulce 20 a dobře odpovídá teorii kmitů skleničky, druhá není slyšitelná.

Tab. 20: Dominantní frekvence

výška hladiny [cm]	frekvence [Hz]
0,0	1 266,5
1,0	1 258,7
2,0	1 245,8
3,0	1 208,7
4,0	1 116,0
5,0	977,3

Pokud se vám hra na skleničku zalíbila a chcete si poslechnout, jak zní hudební nástroj složený ze skleniček (tzn. glass harp), najdete si na YouTube třeba pána jménem Robert Tiso a užijte si koncert.



# Zpracování dat fyzikálních měření

## Kapitola 1: Zpracování dat fyzikálních měření

### Úvod

Letošní seriál bude věnován statistice a zpracování dat fyzikálních měření. Na první pohled by se mohlo zdát, že toto téma není příliš fyzikální. „K čemu potřebuji statistiku?“, mohli by si někteří fyzikové a fyziky pomyslet. Statistika je velmi důležitá pro experimentální fyziku a nakonec i pro tu teoretickou. Vždyť každý fyzikální zákon musí být potvrzen (přesnějším významem slova „potvrzen“ si rozebereme v tomto seriálu) experimentálními měřeními, bez toho bychom nemohli určit, zda skutečně platí. Na konci tohoto seriálu budeme schopni pomocí matematické statistiky a naměřených dat potvrdit nebo vyvracet různá tvrzení aspirující na fyzikální zákony a osvojíme si i mnoho dalších ve fyzikální praxi užitečných znalostí a dovedností.

V rámci zadávaných příkladů se zaměříme hlavně na praktickou práci s daty, neboť ta je mnohem důležitější než znalost teoretických pouček. V dnešní době si už nelze představit provádění složitých matematických výpočtů tužkou na papíře, proto i my budeme používat matematický software, kterým bude výpočetní prostředí a programovací jazyk *R*. Doufáme, že se vám podaří si ho zdárně nainstalovat ze stránky <https://cran.rstudio.com/> podle návodu distributora. Dále doporučujeme používat editor RStudio (volně ke stažení ze stránky <https://www.rstudio.com/products/rstudio/download2/>). V případě problémů s instalací nás kontaktujte na e-mailové adrese [nozicka@fykos.cz](mailto:nozicka@fykos.cz). Součástí úloh v každé sérii bude také práce s reálnými daty. Syntaxi jazyka *R* se budeme učit z připravených skriptů, které budou doplněny vysvětlujícími komentáři.

Nyní už se zaměříme na samotný obsah seriálu. Začneme vysvětlením základních pojmů, které budeme používat.

### Náhoda

Náhoda je takové často používané slovo, ale když se pořádně zamyslíme, uvědomíme si, že je vlastně velmi těžké definovat, co přesně znamená. Na začátek si proto musíme vyjasnit, co budeme pod pojmem náhoda ve zbytku tohoto seriálu mít na mysli. Je dobré začít z druhé strany, tedy uvědomit si, co je opakem slova náhoda nebo náhodný. Opakem slova náhodný je slovo *deterministický* (česky něco jako „určený“), které říká, že je vývoj popisovaného systému jednoznačně dán jeho aktuálním stavem. Jako *náhodné jevy* tedy označíme ty jevy, u kterých nelze předem určit, jakým způsobem dopadnou. Jako takový typický náhodný jev si můžeme označit výsledek hodu kostkou. Nikdo dopředu neví, jaké číslo padne na kostce.

Kdyby někdo takový existoval, už by jistě byl díky všem možným hazardním hrám velice bohatý. Slovo náhoda tedy pro nás bude mít význam procesu, který zařídí, že při stejných počátečních podmínkách nějakého pokusu, můžeme na konci dostat různé výsledky.

Jak přesně ta náhoda funguje pro nás teď nebude podstatné. Například u zmíněného hodu kostkou můžeme říci, že počáteční podmínky nejsou vždy úplně stejné. Výsledek hodu kostkou závisí na mnoha parametrech, například rychlosti hodu, rotaci kostky, tvaru podložky atd. Kdybychom všechny tyto parametry znali, byli bychom schopni podle fyzikálních zákonů spočítat výsledek hodu. Problém je, že takovýchto parametrů je příliš velké množství na to, abychom je mohli všechny přesně určit. I kdybychom ale znali hodnoty všech těchto parametrů, příslušné výpočty by byly natolik složité, že bychom se rozhodně ani za použití moderní techniky nedopočítali výsledku dříve, než by kostka dopadla. Radši proto řekneme, že výsledek hodu kostkou je náhodný. I tak jsme totiž za pomoci matematické statistiky schopni přesně popsat a formulovat mnoho tvrzení, která budou v těchto případech platit. Například že každé číslo bude padat stejně často nebo že při velkém počtu hodů kostkou bude průměr hozených čísel přibližně 3,5.

## Náhodná veličina

Ústřední pojem prvního dílu seriálu bude *náhodná veličina*. Ze střední školy znáte pojem proměnná, která označuje nějaké číslo. Proměnná může mít známou i neznámou hodnotu, ale vždy je to jen jedna hodnota. Pod pojmem náhodná veličina budeme rozumět něco jako proměnnou, která ovšem nemá jen jednu hodnotu, ale může nabývat různých hodnot s různou pravděpodobností.

Náhodné veličiny se často značí velkými tiskacími písmeny. Jako příklad takové náhodné veličiny můžeme uvést výsledek hodu kostkou. Pokud si jako  $X$  označíme výsledek hodu férovou šestistěnnou kostkou, nemůžeme dopředu (tj. před samotným hodem) mluvit o tom, jakou hodnotu má náhodná veličina  $X$ . Jediné, o čem můžeme s jistotou něco říci, jsou pravděpodobnosti, že náhodná veličina  $X$  nabude určité hodnoty.

Toto nás přivádí k otázce, čím je taková náhodná veličina určena. Podobně jako u klasické proměnné se zajímáme o její hodnotu, u náhodné veličiny se budeme zajímat o tzv. *rozdělení náhodné veličiny*. Rozdělení můžeme představit jako předpis, který nám udává, jakých hodnot a s jakou pravděpodobností náhodná veličina nabývá.

Podle typu rozdělení dělíme náhodné veličiny na dvě hlavní skupiny, kterými jsou *diskrétní* a absolutně *spojité* náhodné veličiny<sup>1</sup>.

### Diskrétní náhodné veličiny

Diskrétní náhodná veličina je taková veličina, která může nabývat jen konečně (nebo spočetně) mnoha hodnot. Typickým příkladem diskrétní náhodné veličiny je

<sup>1</sup>Ve skutečnosti existují ještě i jiné typy náhodných veličin (něco mezi diskrétními a absolutně spojitými), ale těmi se v tomto seriálu zabývat nebudeme. Také místo absolutně *spojitá* náhodná veličina budeme používat zkráceně jen *spojitá* náhodná veličina.



už několikrát zmíněný výsledek hodu kostkou, který může nabývat pouze hodnot z množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Diskrétní náhodné veličiny se popisují velmi snadno, stačí nám určit pravděpodobnosti, že náhodná veličina nabude konkrétních hodnot z množiny možných hodnot. Pro hod kostkou bychom mohli psát

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \dots = P(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

Toto je rozdělení náhodné veličiny  $X$ , která představuje výsledek hodu kostkou.

### *Spojité náhodné veličiny*

Jistě každý hned poznal, že musí existovat i jiný druh náhodných veličin než pouze diskrétní náhodné veličiny. Pokud bychom si za náhodnou veličinu  $Y$  označili například teplotu, která bude zítra v 8:00 na meteorologické stanici v Rudolfinu v Praze (ne tu, kterou naměříme digitálním teploměrem, který zaokrouhluje na několik desetinných míst, ale tu, která skutečně bude), jistě bychom si nevystačili s konečně mnoha možnými hodnotami. Teplota může nabývat libovolné hodnoty od absolutní nuly výše, nejenom celých čísel. Takovýchto hodnot je samozřejmě nekonečně (dokonce nespočetně) mnoho, proto nemůžeme rozdělení takovéto náhodné veličiny určit pouze výčtem pravděpodobností, protože těch pravděpodobností by muselo být nekonečně (nespočetně) mnoho.

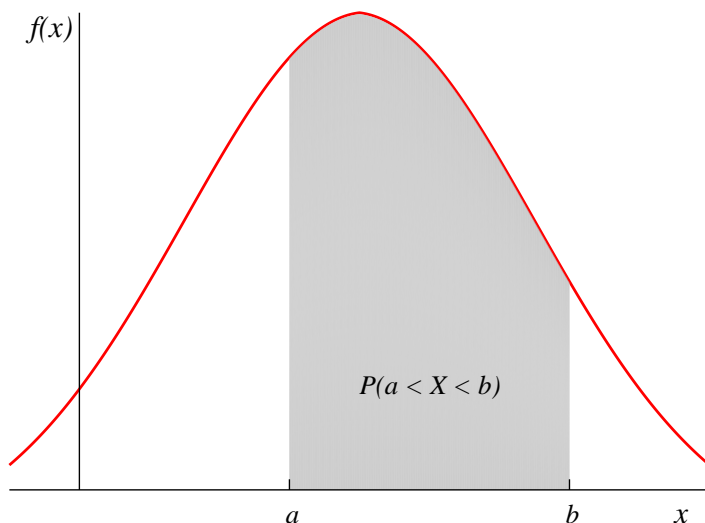
Spojité náhodné veličiny se používají na modelování těchto situací, pro které jsou diskrétní náhodné veličiny nedostačující. Rozdělení spojitých náhodných veličin bude určeno tzv. hustotou pravděpodobnosti. Hustota pravděpodobnosti je funkce, která udává, jak pravděpodobné jsou jednotlivé hodnoty. Přesněji je to funkce s vlastností, že pravděpodobnost nabývání nějaké hodnoty z intervalu  $[a, b]$  náhodnou veličinou je rovna obsahu plochy<sup>2</sup> pod křivkou hustoty mezi body  $a$  a  $b$  (viz obrázek 35). Jistě si už každý sám rozmyslí, že nejvíce pravděpodobné jsou právě ty body, kde hustota pravděpodobnosti nabývá největších hodnot.

### *Náhodné veličiny ve fyzice*

Po malém teoretickém úvodu se nyní zaměříme na praktické využití náhodných veličin ve fyzice. Náhodné veličiny potkáme prakticky při každém měření fyzikálními přístroji. Jelikož jsou všechny měřicí přístroje nedokonalé, nenaměříme vždy skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny, tj. naše měření budou nepřesná.

Jako příklad si můžeme uvést měření doby kyvu kyvadla stopkami. Doba kyvu kyvadla nebude vždy naprosto stejná kvůli vlivu nepatrných pohybů vzduchu, které budou na kyvadlo působit, nedokonalostem závesu, další nepřesnosti vzniknou na straně člověka mačkajícího stopky vlivem jeho reakčního času atd. Číslo, které uvidíme na stopkách, rozhodně nebude přesně doba kyvu kyvadla za ideálních podmínek. V našem modelu budeme hodnoty, které získáváme měřeními, považovat za náhodné veličiny – podobně jako při hodu kostkou.

<sup>2</sup>Pro čtenáře seznámené s integrálním počtem můžeme uvést, že se jedná o určitý integrál z hustoty pravděpodobnosti od  $a$  do  $b$ . Znalost integrálního počtu nicméně není vyžadována, v tomto seriálu si plně vystačíme s grafickou představou.



Obr. 35: Grafický význam hustoty pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny.

### Realizace náhodné veličiny – Měření

Je důležité si uvědomit rozdíl mezi náhodnou veličinou a realizací náhodné veličiny. Náhodnou veličinou budeme rozumět funkci, která nám teoreticky popisuje výsledek nějakého procesu (hod kostkou, fyzikální měření atd.). Realizací náhodné veličiny budeme rozumět výsledek tohoto procesu v konkrétním případě (např. výsledek jednoho konkrétního hodu kostkou).

Zejména je důležité pochopit, že realizace náhodné veličiny už je jen konstanta (je to jedna konkrétní hodnota), není na ní nic náhodného. Rozdělení náhodné veličiny potom popisuje (určuje pravděpodobnosti), jak budou vypadat jednotlivé realizace této náhodné veličiny.

Fyzikální měření potom můžeme chápat tak, že získáváme realizace nějaké náhodné veličiny (o této náhodné veličině typicky nebudeme mít moc informací). Statistické zpracování naměřených dat<sup>3</sup> se potom snaží získat co nejvíce informací o skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny.

<sup>3</sup>Od této chvíle budeme naměřená data chápat jako realizace nějaké náhodné veličiny a nebudeme už to v jednotlivých případech připomínat.

## Zjednodušený popis náhodných veličin

Jak už jsme řekli na začátku, náhodnou veličinu budeme popisovat jejím rozdělením. To je ovšem v některých případech velmi těžké a nešikovné. Představme si například náhodnou veličinu udávající součet čísel, které hodíme na 10 kostkách. Kolika možných hodnot může takováto náhodná veličina nabývat? Jaké je přesné rozdělení takovéto náhodné veličiny (tj. pravděpodobnosti jednotlivých možných výsledků)? Jistě to není nic, čím bychom se chtěli dlouze zabývat, neboť je to poměrně složité a pro účely experimentální fyziky neužitečné. V praxi bychom určitě narazili i na mnohem komplikovanější problémy. Musíme si tedy zavést nějaký zjednodušený popis náhodných veličin.

Pro snazší popis se zavádí pojem *střední hodnoty* a *rozptylu* náhodné veličiny. Je ovšem nutné poznamenat, že střední hodnota a rozptyl nemusí plně určovat rozdělení náhodné veličiny<sup>4</sup>, jen ho zjednodušeně popisují.

### Střední hodnota

Střední hodnota udává, jaké hodnoty náhodná veličina v průměru nabývá (jakou hodnotu bychom měli v průměru očekávat). Matematicky je pro diskrétní náhodné veličiny definována jako

$$EX = \sum_{i=1}^n k_i P(X = k_i),$$

kde  $\{k_1, \dots, k_n\}$  jsou všechny možné hodnoty náhodné veličiny  $X$  (značení střední hodnoty  $E$  pochází z anglického *Expectation*). Střední hodnotu diskrétní náhodné veličiny lze interpretovat jako vážený průměr všech možných hodnot, kterých náhodná veličina může nabývat, kde váhy jsou právě pravděpodobnosti nabývání.

Pro úplnost uvedeme i definici střední hodnoty pro spojitě náhodné veličiny. Poznamenejme ovšem, že pokud neznáte integrální počet, nemusí vás trápit, že této definici nebudete rozumět, dále v seriálu to nebude potřeba. Pro spojitě náhodné veličiny je střední hodnota zadefinována jako

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

kde  $f$  je hustota náhodné veličiny. Opět si tento výraz lze vyložit jako vážený integrální průměr všech hodnot, kterých může náhodná veličina nabývat.

### Rozptyl

Rozptyl udává, jak moc je náhodná veličina rozptýlena okolo své střední hodnoty. Matematicky je pro diskrétní náhodnou veličinu rozptyl definován jako

$$\text{var} X = \sum_{i=1}^n (k_i - EX)^2 P(X = k_i),$$

<sup>4</sup>Tj. existují dvě náhodné veličiny s různými rozděleními, ale obě mají stejnou střední hodnotu i rozptyl.

kde  $\{k_1, \dots, k_n\}$  jsou možné hodnoty náhodné veličiny (značení pochází z anglického *Variance*). Tento výraz nám říká, že při výpočtu rozptylu děláme vážený průměr druhých mocnin vzdálenosti možných hodnot od střední hodnoty. Druhá mocnina je zavedena proto, aby zvyšovala váhu odlehlých pozorování.

Pro úplnost opět uvedeme i definici rozptylu pro spojité náhodné veličiny, která ale nebude dále v textu seriálu vyžadována.

$$\text{var}X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx,$$

kde  $f$  je hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny  $X$ .

### Nejčastěji se vyskytující rozdělení náhodných veličin

Na tomto místě uvedeme čtyři v praxi nejčastěji se vyskytující rozdělení náhodných veličin, které bude každý fyzik pravidelně potkávat. U každého rozdělení uvedeme jeho hustotu v případě, že se bude jednat o spojité rozdělení, nebo uvedeme výčet pravděpodobností v případě, že se bude jednat o diskrétní rozdělení. U každého rozdělení také uvedeme střední hodnotu a rozptyl, správnost těchto údajů si lze ověřit dosazením do příslušných vzorců (výpočty bývají zpravidla velmi náročné, proto je zde nebudeme uvádět). Nakonec také zmíníme, kde v praxi můžeme které rozdělení potkat.

#### Normální (Gaussovo) rozdělení

Jedná se o spojité rozdělení určené dvěma parametry  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$  (značíme ho  $N(\mu, \sigma^2)$ ). Hustota pravděpodobnosti tohoto rozdělení má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Střední hodnota a rozptyl tohoto rozdělení jsou<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} EX &= \mu, \\ \text{var}X &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Normální rozdělení mívají hlavně náhodné veličiny vzniklé měřením nějaké fyzikální veličiny, která může teoreticky nabývat víceméně libovolné hodnoty<sup>6</sup> (například hodnota elektrického proudu v obvodu měřená ampérmetrem, měření teploty teploměrem atd.)

---

<sup>5</sup>Všimněme si, že v případě normálního rozdělení platí, že je jednoznačně určeno střední hodnotou a rozptylem. U ostatních rozdělení to ale platit nemusí!

<sup>6</sup>Ale třeba čas mezi dvěma událostmi nemůže být záporný apod.

### Exponenciální rozdělení

Jedná se o spojité rozdělení určené jedním parametrem  $\lambda > 0$ , značíme ho  $\text{Exp}(\lambda)$ . Hustota pravděpodobnosti tohoto rozdělení má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl tohoto rozdělení jsou

$$\begin{aligned} EX &= \frac{1}{\lambda}, \\ \text{var}X &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Exponenciální rozdělení mívají hlavně náhodné veličiny vyjadřující čas uplynulý mezi dvěma po sobě jdoucími opakujícími se událostmi (například čas mezi jednotlivým radioaktivními rozpady atomů v radioaktivní látce).

### Rovnoměrné rozdělení

Jedná se o další spojité rozdělení určené dvěma parametry  $a < b$ , značíme ho  $R(a, b)$ . Hustota pravděpodobnosti tohoto rozdělení má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a, b) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl tohoto rozdělení jsou

$$\begin{aligned} EX &= \frac{a+b}{2}, \\ \text{var}X &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Rovnoměrné rozdělení se používá na modelování událostí, které mají všechny výsledky stejně pravděpodobné.

### Poissonovo rozdělení

Jedná se o diskrétní rozdělení určené jedním parametrem  $\lambda > 0$  (značíme ho  $\text{Poiss}(\lambda)$ ). Pravděpodobnosti mají následující tvar

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Střední hodnota a rozptyl tohoto rozdělení jsou

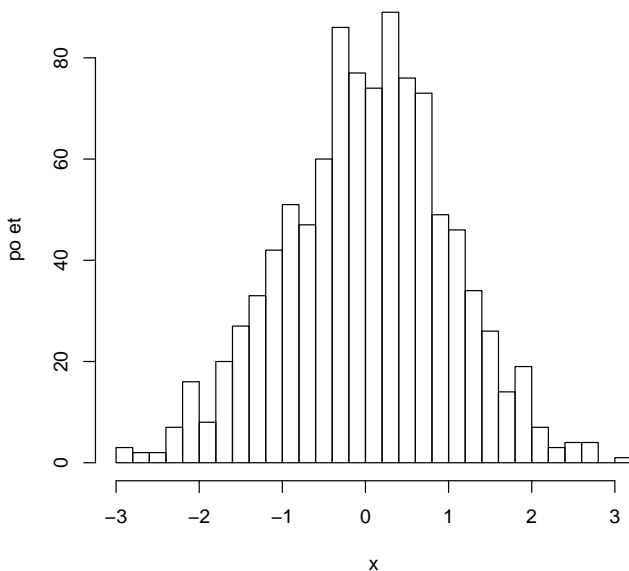
$$\begin{aligned} EX &= \lambda, \\ \text{var}X &= \lambda. \end{aligned}$$

Poissonovo rozdělení mají zejména náhodné veličiny vyjadřující počet opakujících se událostí v nějakém časovém intervalu (například počet rozpadů atomů v radioaktivní látce za určitý časový interval, počet branek ve fotbalovém zápase atd.).

### Odhadování typu rozdělení

Když jsme si nyní popsali, co je to náhodná veličina, realizace náhodné veličiny (pokud nevíte, jaký je rozdíl mezi náhodnou veličinou a její realizací, vraťte se k odstavci *Realizace náhodné veličiny*) a uvedli jsme si seznam nejčastěji se vyskytujících rozdělení náhodných veličin, mohlo by se zdát, že už známe všechno ze základů statistiky. Bohužel, není tomu tak – ve skutečnosti známe jen polovinu toho, co potřebujeme znát. V praxi nám totiž většinou někdo dá naměřená data (tedy vlastně realizace nějaké náhodné veličiny), ale už nám neřekne (protože to ani sám neví) jaké rozdělení tato náhodná veličina měla. Jak se tedy dá poznat, z jakého rozdělení pocházejí naměřená data?

K odhadu typu rozdělení pomáhá histogram. Histogram je vlastně forma grafického znázornění dat, kde si osu  $x$  rozdělíme na několik intervalů a nad každým takovým intervalem zkonstruujeme sloupec takové výšky, která odpovídá tomu, kolik naměřených dat padne do tohoto intervalu. Příklad histogramu můžeme vidět na obrázku.



Obr. 36: Ukázka histogramu – v tomto případě naměřená data pocházejí pravděpodobně z normálního rozdělení.

Intuitivně lze tvrdit, že pro velký počet naměřených dat bude tvar histogramu

velmi podobný, jako je tvar hustoty pravděpodobnosti (případně pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot) rozdělení, ze kterého měřená data pochází. Nikdy však nemůžeme očekávat, že histogram bude mít přesně takový teoretický tvar – bude se jen podobat!

Problém, na který při konstrukci histogramu narazíme, je volba počtu a šířky sloupců. Toto je velmi složité téma, o kterém bylo napsáno spousty knih a článků, my si ovšem vystačíme s následujícími dvěma obecnými poučkami:

- Intervaly volíme všechny stejně široké. Začátek prvního intervalu volíme jako nejmenší naměřenou hodnotu, konec posledního intervalu jako největší naměřenou hodnotu.
- Počet sloupců volíme jako

$$P_n \approx \sqrt{n},$$

kde  $n$  je počet měření.

Prostý pohled na histogram a jeho srovnání s nejběžnějšími typy hustot pravděpodobností (a pravděpodobností nabývání) často odhalí, ze kterého rozdělení naměřená data pochází. Toto si také vyzkoušíte v zadaných úlohách.

## Úloha I.S ... náhodná

10 bodů

- Zkuste vlastními slovy popsat, co je to náhodná veličina a jaké má vlastnosti (postačí vlastními slovy objasnit následující pojmy: náhodná veličina, rozdělení náhodné veličiny, realizace náhodné veličiny, střední hodnota, rozptyl, histogram).
- Výgenerujte grafy hustot pravděpodobnosti (případně pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot) všech v seriálu popsaných rozdělení náhodných veličin pro různé typy parametrů daného rozdělení a popište, jaký má změna parametru/ů vliv na tvar hustoty pravděpodobnosti (případně pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot).
- Vygenerujte z přiložených dat histogramy a pokuste se určit, ze kterého rozdělení tato data pocházejí.
- Definujte si náhodnou veličinu  $X$  jako výsledek hodu „férovou“ šestistěnnou kostkou (všechna čísla padají se stejnou pravděpodobností). Určete rozdělení náhodné veličiny  $X$  a dále spočítejte  $EX$  a  $\text{var}X$ .

*Bonus* Uvedte příklad dvou náhodných veličin, které mají stejnou střední hodnotu i stejný rozptyl, ale mají různá rozdělení.

Pro práci s daty a vykreslování grafů použijte výpočetní prostředí  $R$ . Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka  $R$ . (řešení str. 203)

## Kapitola 2: Zpracování dat fyzikálních měření

V minulém díle seriálu jsme se seznámili s tím, co je to náhodná veličina, hustota pravděpodobnosti a jak se dá v některých případech odhadnout typ rozdělení

náhodné veličiny z naměřených dat pomocí histogramu. V tomto díle se zaměříme na odhadování střední hodnoty a rozptylu z naměřených dat.

Proč je dobré z naměřených dat odhadovat střední hodnotu, případně rozptyl náhodné veličiny, ze které naměřená data pocházejí? Odpověď je jednoduchá: protože to je přesně to, o co fyzikovi při experimentu především jde. Toto potřebuje trochu hlubší vysvětlení.

## Fyzikální interpretace

V tomto odstavci uvedeme základní matematický model, který se při fyzikálních měřeních používá. Představme si, že měříme nějakou fyzikální veličinu (např. dobu kyvu kyvadla) a pro různá měření dostaneme různé hodnoty měřené fyzikální veličiny (v našem příkladě různé hodnoty naměřeného času). Jak toto interpretovat?

Je to naprosto jednoduché, v základním modelu uvažujeme, že ona fyzikální veličina, kterou měříme, je po celou dobu neměnná a při použití dokonalých měřících přístrojů a dokonalého postupu měření bychom vždy naměřili právě tuto jednu neměnnou hodnotu. Vlivem různých nepřesností (nedokonalý měřící přístroj, nedokonalá měřící aparatura, vnější vlivy prostředí, lidský faktor atd.), ale tohoto nejsme schopni dosáhnout a při každém měření naměříme trochu odlišnou hodnotu. V základním modelu můžeme považovat výsledek měření za náhodnou veličinu (protože dopředu nevíme, jakou hodnotu naměříme, podobně jako u hodu kostkou). Při následném statistickém zpracování naměřených dat se potom snažíme pomocí naměřených dat (tedy vlastně realizací náhodné veličiny) zjistit co nejvíce informací o skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny.

Uděláme další důležitý předpoklad o tom, jaké mohou být ty vlivy, které způsobují, že nejsme schopni měřenou fyzikální veličinu měřit přesně. V našem základním modelu budeme uvažovat, že neexistuje žádný systematický posun naměřených hodnot oproti skutečné hodnotě. Jinými slovy měříme sice nepřesné hodnoty, ale tyto hodnoty nejsou systematicky větší nebo menší než skutečná hodnota, kterou chceme měřit. V našem příkladu při měření doby kyvu kyvadla může uvažovat poryvy okolního vzduchu, které způsobí nepřesnosti měření, ale budeme předpokládat, že nefouká vítr jedním směrem ale všemi směry přibližně stejně. Podobně pro ostatní zdroje nepřesností. Je potom odpovědností experimentátora, aby zajistil platnost tohoto předpokladu při samotném měření (pokud toho experimentátor není schopen dosáhnout, což se někdy stává, je potřeba tyto nepřesnosti řešit zvlášť, o tom více na konci tohoto dílu seriálu). Díky tomuto předpokladu můžeme tvrdit, že hodnota fyzikální veličiny, kterou chceme naměřit, se rovná střední hodnotě náhodné veličiny představující výsledek jednoho měření. Jediný problém je, že tuto střední hodnotu neznáme, budeme ji tedy muset odhadovat z naměřených dat. Už dopředu se musíme připravit na to, že z naměřených dat nikdy nebudeme schopni přesně zjistit hodnotu měřené fyzikální veličiny.

Pokud si vzpomeneme, jaký význam má rozptyl náhodné veličiny (míra rozptýlenosti okolo střední hodnoty), uvědomíme si, že rozptyl náhodné veličiny představující výsledek jednoho měření vlastně vypovídá o přesnosti našeho měření (o tom



jak moc jsou naměřené hodnoty rozptýleny kolem skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny).

Další předpoklad, který si zavedeme je, že jednotlivá měření jsou na sobě nezávislá. Intuitivní představa, co to znamená, je, že výsledek jednoho měření nijak neovlivní výsledky ostatních měření. Experimentátor opět musí zajistit, že tento předpoklad bude splněn.

## Odhadování parametrů normálního rozdělení z naměřených dat

V tomto díle seriálu se budeme zabývat pouze případem, kdy náhodná veličina představující výsledek jednoho měření má normální rozdělení. Tento předpoklad je téměř vždy splněn, normální rozdělení se vyskytuje opravdu téměř všude. Jak postupovat v případě, že je tento předpoklad porušen, si rozebereme v příštím díle seriálu.

Na tomto místě jen v rychlosti připomeneme, že normální rozdělení, které značíme  $N(\mu, \sigma^2)$ , je spojité rozdělení určené dvěma parametry  $\mu$ ,  $\sigma^2$ , jehož hustota má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dále platí, že střední hodnota tohoto rozdělení je rovna  $\mu$  a rozptyl tohoto rozdělení je roven  $\sigma^2$ . Často se navíc definuje ještě tzv. směrodatná odchylka jako odmocnina z rozptylu, tedy v případě normálního rozdělení platí, že směrodatná odchylka je rovna  $\sigma$ .

Naším cílem bude z naměřených dat odhadovat skutečné hodnoty střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky. Jak už bylo uvedeno dříve, musíme se smířit s faktem, že nikdy nemůžeme tyto hodnoty z naměřených dat odhadnout přesně (o tom více později). Ve zbytku seriálu budeme skutečné (při měření neznámé) hodnoty značit řeckými písmeny  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma^2$  a z naměřených dat odhadnuté hodnoty budeme značit stejnými písmeny se stříškou a dolním indexem uvádějícím z kolika měření jsme tuto hodnotu odhadli (tedy  $\widehat{\mu}_n$ ,  $\widehat{\sigma}_n$ ,  $\widehat{\sigma}_n^2$ ). Odhadnuté hodnoty budeme nazývat jako výběrová střední hodnota, výběrová směrodatná odchylka a výběrový rozptyl.

### Odhad střední hodnoty

Uvažujme, že máme k dispozici výsledky našeho měření  $x_1, \dots, x_n$ , o kterých budeme předpokládat, že jsou vzájemně nezávislé a že pocházejí z normálního rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$  s neznámými parametry. Odhadem střední hodnoty bude výběrová střední hodnota definovaná jako

$$\widehat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

kde výraz na pravé straně často zkráceně zapisujeme jen jako  $\overline{x}_n$ .

Nyní se zaměříme na analýzu vlastností výběrového průměru. Musíme si uvědomit, že jednotlivá měření jsou náhodné veličiny (není dopředu známe, jakým

výsledkem dopadnou – jakou hodnotu naměříme) a v důsledku toho je i výběrová střední hodnota náhodná veličina (také není dopředu známé, jaké číslo nám vyjde). Při analýze vlastností výběrové střední hodnoty nás bude zajímat zejména její rozdělení. Na výběrovou střední hodnotu se můžeme dívat jako na součet  $n$  nezávislých náhodných veličin vydělených číslem  $n$ . Nyní si musíme odvodit, jaké bude rozdělení součtu dvou nezávislých náhodných veličin. (Poznamenejme, že zde je velice důležité, že náhodné veličiny jsou opravdu nezávislé, jinak by následující odvození nebylo správné.)

Necheť máme náhodnou veličinu  $X$  se známým rozdělením a druhou náhodnou veličinu  $Y$  se známým rozdělením a tyto dvě náhodné veličiny jsou nezávislé. Nyní nás zajímá, jaké bude rozdělení náhodné veličiny  $Z = X + Y$ . Uvažujme nejprve jednodušší případ, kdy mají obě náhodné veličiny diskrétní rozdělení. Například  $X$  představuje výsledek hodu kostkou a  $Y$  představuje výsledek hodu jinou kostkou a nás zajímá, jaké má rozdělení součet hodů na obou kostkách, tedy náhodná veličina  $Z = X + Y$ . V tomto jednoduchém případě stačí rozepsat si pravděpodobnosti, že nastanou všechny možné dvojice výsledků a sečíst pravděpodobnosti těch dvojic, které vedou na stejný součet, a toto bude pravděpodobnost, že náhodná veličina  $X + Y$  nabyde právě této hodnoty. Matematicky zapsáno

$$P(Z = k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n, Y = k - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n)P(Y = k - n),$$

kde v prostředním výrazu  $P(X = n, Y = k - n)$  značí pravděpodobnost, že nastanou oba případy zároveň (tedy že bude platit  $X = n$  a zároveň  $Y = k - n$ ). Tento výraz lze rozepsat na součin dvou dílčích pravděpodobností díky nezávislosti náhodných veličin  $X$  a  $Y$ . Výraz na pravé straně si potom lze představovat jako součet pravděpodobností těch případů, kdy je součet náhodných veličin  $X$  a  $Y$  roven  $k$  (to nastane právě tehdy, když bude pro nějaké  $n$  bude platit  $X = n$  a zároveň  $Y = k - n$ ).

Ač tento vzorec vypadá složitě, je dobré si uvědomit, že je vlastně triviální. V našem příkladě se součtem hodů na dvou kostkách je dosazení do tohoto vzorce velmi jednoduché, neboť pro  $n$  neležící v množině  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  platí  $P(X = n) = 0$  a také víme, že za  $k$  má smysl dosazovat jen čísla z množiny  $\{2, \dots, 12\}$ , neboť jiných hodnot nemůže náhodná veličina  $Z$  nabývat. Když si dosadíme opravdu vyjde správný výsledek.

Pro případ, že  $X$  a  $Y$  jsou spojité náhodné veličiny s hustotami  $f$  a  $g$ , platí obdoba předchozího vzorce, jen je potřeba nahradit sumy pomocí integrálů<sup>7</sup>. Bude tedy platit

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx,$$

kde  $h$  bude hustota náhodné veličiny  $Z$ . Těto operaci se říká konvoluce funkcí  $f$  a  $g$  a značí se  $f \star g$ .

---

<sup>7</sup>Pokud nevíte, co je to integrál, nezoufejte. Stačí pouze přijmout několik zde uvedených faktů, pro pochopení vykládané látky není nutné znát dokonale integrální počet.

Je důležité vědět, že součet dvou nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením (řekněme  $X$  s rozdělením  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  a  $Y$  s rozdělením  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ) má opět normální rozdělení s parametry, které se rovnají součtu původních parametrů (tedy  $Z = X + Y$  má rozdělení  $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ ). Tento fakt plyne z pouhého dosazení do vzorce na konvoluci. Zdatnější čtenáři si mohou platnost tohoto faktu sami ověřit výpočtem, méně zdatní čtenáři mohou pro ověření tohoto faktu využít nějaký matematický software nebo tomu prostě věřit.

Další důležitá věc je uvědomit si, co se stane s rozdělením náhodné veličiny, pokud tuto veličinu vynásobíme konstantou. Ze vzorců na střední hodnotu a rozptyl (viz minulý díl seriálu) ihned plynou následující vztahy (zdatnější čtenáři si opět mohou tento fakt ověřit výpočtem)

$$\begin{aligned} E(aX) &= aE(X), \\ \text{var}(aX) &= a^2\text{var}(X). \end{aligned}$$

Jako poslední si musíme rozmyslet, že pokud náhodnou veličinu s normálním rozdělením vynásobíme konstantou, její rozdělení bude opět normální (samozřejmě s jinými parametry). Toto není úplně jednoduché. Intuitivní představa může být taková, že po vynásobení náhodné veličiny s normálním rozdělením konstantou se pouze natáhne (nebo smrskne) funkce hustoty, ale zůstane zachován typ rozdělení.

Potom, co jsme si uvedli těchto pár tvrzení, můžeme jejich jednoduchým zkombinováním dostat důsledek, že za předpokladu, že naše naměřená data pocházejí z normálního rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ , má výběrová střední hodnota normální rozdělení  $N(\mu, \sigma^2/n)$ . Nyní si musíme uvědomit, co to vlastně znamená. S větším počtem naměřených dat (tedy s větším  $n$ ) se výběrové střední hodnotě snižuje rozptyl, ale střední hodnota zůstává pořád stejná a to sice ta, kterou mají také jednotlivé náhodné veličiny (tedy vlastně hodnota měřené fyzikální veličiny). To znamená, že pro velký počet měření bude výběrová střední hodnota s největší pravděpodobností čím dál blíže ke střední hodnotě, kterou chceme odhadovat (důsledek toho, že rozptyl výběrové střední hodnoty bude čím dál menší, tedy výběrová střední hodnota bude čím dál méně rozptýlena okolo své střední hodnoty  $\mu$ ).

Na závěr tohoto odstavce jen uvedme, že výběrová střední hodnota se někdy také označuje jako výběrový průměr, ale v tomto seriálu se budeme držet označení výběrová střední hodnota.

### Odhad rozptylu

Podobně jako výběrová střední hodnota odhaduje střední hodnotu budeme odhadovat rozptyl pomocí výběrového rozptylu. Výběrový rozptyl je definovaný jako<sup>8</sup>

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2.$$

<sup>8</sup>Na první pohled se může zdát trochu divné, proč dělíme číslem  $(n-1)$  a nikoliv číslem  $n$ . Je to z toho důvodu, aby tento odhad byl nestranný (tzn. aby střední hodnota výběrového rozptylu – opět připomínáme, že výběrový rozptyl je náhodná veličina – byla rovna skutečnému rozptylu). Pokud bychom dělili pouze číslem  $n$ , tento odhad by nebyl nestranný.

Ve fyzice se také často potkáme s výběrovou směrodatnou odchylkou

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2},$$

která odhaduje směrodatnou odchylku.

Je důležité si uvědomit, že výběrový průměr i výběrová směrodatná odchylka jsou opět náhodné veličiny (dopředu neznáme jejich hodnotu). Podobně jako u výběrové střední hodnoty by se dalo ukázat, že výběrový rozptyl (resp. výběrová směrodatná odchylka) má takové rozdělení, že pro velký počet měření je jeho hodnota s největší pravděpodobností čím dál bližší skutečnému rozptylu (resp. skutečné směrodatné odchylce). Ukázat tuto vlastnost už je ovšem v tomto případě o dost složitější, proto to na tomto místě dělat nebudeme, pouze to uvedeme jako fakt.

### Interval spolehlivosti

Nyní jsme si popsali, jak z naměřených dat odhadovat střední hodnotu (o tu nám ve fyzikální aplikaci jde především) a rozptyl náhodné veličiny, ze které naměřená data pocházejí. Odvodili jsme si, že naše odhady (výběrová střední hodnota, výběrová směrodatná odchylka a výběrový rozptyl) mají tu vlastnost, že pro velký počet měření jsou čím dál přesnější (tj. jsou s největší pravděpodobností čím dál blíže skutečným hodnotám střední hodnoty, resp. směrodatné odchylky, resp. rozptylu). Je sice hezké, že víme, že pro velký počet měření bude náš odhad velmi přesný, ale v praxi obvykle nemáme moc měření (velký počet může znamenat třeba 1000 měření nebo i více).

Pokud chceme odhadovat střední hodnotu z relativně malého počtu měření (tato situace nastane prakticky u každého fyzikálního experimentu) budeme postupovat tak, že zkonstruujeme interval spolehlivosti, který nám bude říkat, v jakém intervalu se s největší pravděpodobností nachází skutečná hodnota střední hodnoty.

Vyjdeme z toho, že si určíme, jaké rozdělení má následující transformace našich naměřených dat (opět si uvědomme, že se jedná o náhodnou veličinu, neboť dopředu neznáme její hodnotu)

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n},$$

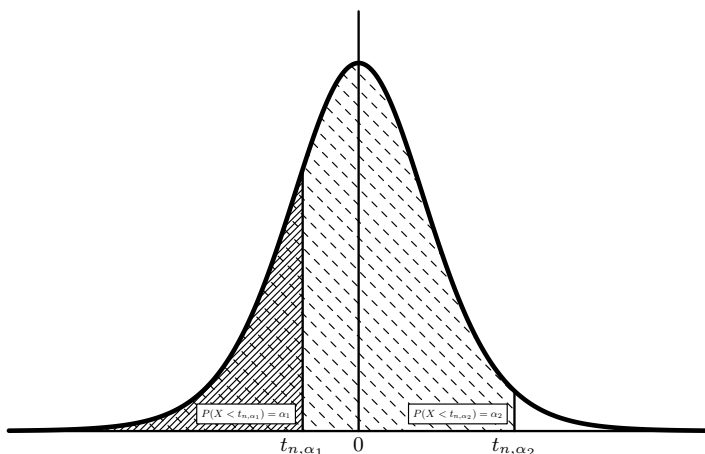
kde  $\mu$  je skutečná (ale pro nás neznámá) hodnota střední hodnoty rozdělení, ze kterého pochází naměřená data (připomínáme předpoklad, že se jedná o normální rozdělení) a  $n$  je počet naměřených dat. Bez důkazu na tomto místě uvedeme, že rozdělení takovéto náhodné veličiny je tzv. Studentovo rozdělení o  $n-1$  stupních volnosti (značíme  $t_{n-1}$ ). Studentovo rozdělení má poměrně složitou hustotu, jejíž přesný předpis je zde zbytečně uvádět (zájemci si mohou tuto hustotu vykreslit v matematickém softwaru). Je dobré si povšimnout, že pro velké  $n$  je studentovo rozdělení o  $n$  stupních volnosti čím dál více podobné rozdělení  $N(0, 1)$  (tohoto faktu

budeme později využívat). Další důležitou vlastností hustoty studentova rozdělení je, že je symetrické okolo nuly.

Když nyní víme, že naše transformovaná data mají Studentovo rozdělení o  $n - 1$  stupních volnosti, můžeme si pro toto rozdělení určit tzv. kvantily. Pokud si zvolíme číslo  $\alpha$  z intervalu  $(0, 1)$ , potom  $\alpha$ -kvantilem Studentova rozdělení o  $n$  stupních volnosti (značíme ho  $t_{n,\alpha}$ ) bude takové číslo, které splňuje podmínku, že pravděpodobnost, že naše náhodná veličina řídící se rozdělením  $t_n$  bude menší než  $t_{n,\alpha}$ , bude rovna  $\alpha$ . Matematicky zapsáno

$$P(X < t_{n,\alpha}) = \alpha.$$

Dobře je význam toho, co znamená kvantil, vidět z obrázku 37.



Obr. 37: Grafický význam kvantilů spojitě náhodné veličiny.

Na tomto místě poznamenejme, že přesné hodnoty kvantilů Studentova rozdělení (pro různé kombinace parametrů  $n$  a  $\alpha$ ) lze najít v každých lepších matematických tabulkách nebo na internetu.

Celý postup konstrukce intervalového odhadu pro střední hodnotu bude následující. Nejprve si zvolíme tzv. hladinu spolehlivosti, která musí ležet v intervalu  $(0, 1)$ . Následně určíme takové číslo  $\alpha \in (0, 1)$ , aby naše hladina spolehlivosti byla rovna  $1 - \alpha$ . Naším cílem bude zkonstruovat interval s vlastností, že pravděpodobnost pokrytí skutečné střední hodnoty intervalem spolehlivosti bude právě  $1 - \alpha$ . Tedy  $\alpha$  lze interpretovat jako pravděpodobnost omylu.

Samotný interval spolehlivosti budeme konstruovat následujícím způsobem. Díky znalosti rozdělení našich transformovaných dat a vlastností kvantilů Studentova  $t_{n-1}$  rozdělení musí platit

$$P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Nyní už jenom ekvivalentními úpravami upravujeme nerovnosti uvnitř pravděpodobnosti<sup>9</sup>.

$$\begin{aligned}
 1 - \alpha &= P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}\right) = \\
 &= P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \bar{x}_n - \mu < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
 &= P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{x}_n < -\mu < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{x}_n\right) = \\
 &= P\left(\bar{x}_n - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
 &= P\left(\bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
 &= P\left(\bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).
 \end{aligned}$$

Všechny úpravy byly víceméně triviální, úprava mezi 4. a 5. řádkem spočívala v nahrazení kvantilu  $t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$  pomocí kvantilu  $-t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}$ , což lze udělat díky symetrii hustoty Studentova rozdělení (rozmyslete si sami).

Nyní si musíme uvědomit, co jsme vlastně dostali.

$$1 - \alpha = P\left(\bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).$$

Tento výraz vlastně říká, že pravděpodobnost, že interval

$$\left(\bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$$

pokrývá skutečnou střední hodnotu náhodné veličiny, ze které pocházejí naměřená data (tedy vlastně měřenou fyzikální veličinu), je přesně  $1 - \alpha$ . Toto je interval spolehlivosti (někdy se také říká intervalový odhad) pro měřenou fyzikální veličinu.

Tento interval se někdy zkráceně zapisuje jako

$$\bar{x}_n \pm t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Protože fyzikové mají rádi co nejkratší zápisy a i tento zápis jim přijde moc dlouhý, většinou píšou jen

$$\bar{x}_n \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}},$$

<sup>9</sup>Uvědomme si, že takto opravdu lze postupovat, neboť pokud neměníme množinu řešení dvojice nerovností uvnitř pravděpodobnosti (což ekvivalentními úpravami neměníme), nemění se ani hodnota samotné pravděpodobnosti.

tedy vynechají v intervalovém odhadu hodnotu kvantilu  $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ , takže to už není zápis intervalového odhadu v obecném tvaru, ale velice snadným způsobem (jen doplněním příslušného kvantilu Studentova rozdělení) ho lze zpětně zrekonstruovat.

Hodnota  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  se často označuje pouze  $s_n$  a říká se jí výběrová směrodatná odchylka průměru (protože odhaduje směrodatnou odchylku výběrového průměru). Toto je to, co se u fyzikálního experimentu vyžaduje, tedy spočítat hodnotu výběrové střední hodnoty  $\bar{x}_n$  a hodnotu výběrové směrodatné odchylky průměru  $s_n$ . Výsledek se zapíše ve tvaru

$$\bar{x}_n \pm s_n$$

a jednoduchým doplněním hodnoty příslušného kvantilu se z tohoto zápisu nechá vyrobit intervalový odhad pro měřenou fyzikální veličinu.

Výběrová směrodatná odchylka průměru se používá jako měřítko toho, jak přesně jsme fyzikální veličinu změřili, neboť udává, jak široké budou příslušné intervaly spolehlivosti. Při fyzikálních experimentech se vždy požaduje, aby byla hodnota výběrové směrodatné odchylky průměru co možná nejmenší. Někdy se také o výběrové směrodatné odchylce průměru mluví jako o nejistotě měření typu A.

### Názvosloví a typy nejistot

Nyní už máme zcela popsaný základní model statistického zpracování naměřených dat a nakonec si ho zasadíme do širšího kontextu. Obecně se definují 2 typy nejistot měření a sice nejistota typu A a nejistota typu B.

Nejistota typu A je nejistota určení měřené fyzikální veličiny, která pramení z náhodnosti naměřených dat. Tuto nejistotu získáme statistickým zpracováním dat, o tom se psalo na předchozích 7–8 stránkách a umíme se s tím vypořádat.

Nejistota typu B je nejistota určení měřené fyzikální veličiny, která pramení z jiných důvodů než nejistota typu A. Zejména se jedná o nějaký systematický posun měřených hodnot vůči skutečné hodnotě (o tomto se psalo na začátku tohoto dílu seriálu v odstavci *Fyzikální interpretace*). S nejistotou typu B se vypořádáme tak, že ji buď připočteme k nejistotě typu A (to se dělá hlavně v případě nejistoty vyplývající z nepřesnosti měřidla<sup>10</sup>) nebo ji pouze zmíníme v diskuzi (to se dělá ve většině ostatních případů).

Pro připočítání nejistoty typu B k nejistotě typu A se používá vzorec

$$s_K = \sqrt{s_A^2 + s_B^2},$$

kde  $s_A$  je nejistota typu A a  $s_B$  je nejistota typu B. Dále se pracuje s kombinovanou nejistotou  $s_K$  stejně jako jsme předtím pracovali s nejistotou typu A. Ve všech intervalových odhadech (i ve finálním zápisu naměřených hodnot) tedy musíme místo hodnoty  $s_n$  uvádět hodnotu  $s_K$ , čímž tyto intervalové odhady rozšíříme, abychom vzali v úvahu také ostatní zdroje nepřesností. Kombinovaná nejistota

<sup>10</sup>Nepřesnost měřidla bývá často uvedena na použitém měřidlu a její význam je takový, že měřidlo může způsobovat systematický posun zobrazovaných hodnot vůči skutečným hodnotám až do uvedené míry. Pokud není na měřidle nic uvedeno, uvažuje se za nepřesnost měřidla obvykle polovina nejmenšího dílku na stunici, na které měřidlo zobrazuje hodnoty.

měření tedy vyjadřuje, jak přesně jsme fyzikální veličinu určili. Ve fyzikálních experimentech je cílem dosáhnout co možná nejmenší kombinované nejistoty měření (tj. určit měřenou fyzikální veličinu co možná nejpresněji).

Na závěr tohoto odstavce uvedeme, že jsme v textu seriálu záměrně používali pouze slovo nejistota a vyhýbali jsme se použití slova chyba. Na tomto místě objasníme proč. Chyba měření je definována jako absolutní hodnota rozdílu odhadnuté hodnoty a skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny, tedy jako

$$e = |\overline{x}_n - \mu|.$$

Chyba měření vyjadřuje o kolik se námi odhadnutá hodnota měřené fyzikální veličiny (tedy  $\overline{x}_n$ ) liší od její skutečné hodnoty (tedy  $\mu$ ). Je ale naprosto nutné si uvědomit, že chybu měření v praxi nikdy znát nebudeme (k tomu bychom totiž potřebovali znát skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny). Naneštěstí se ale často můžeme potkat s tím, že se význam slov nejistota a chyba zaměňuje nebo se považují za ekvivalentní označení. V tomto textu seriálu se ale budeme držet správného značení a stejně to dělejte i vy při řešení úloh.

### *Důležité poznámky na závěr*

Na závěr tohoto dílu seriálu uvedeme několik důležitých poznámek k odhadům měřené fyzikální veličiny za předpokladu normálního rozdělení náhodné veličiny popisující výsledek jednoho měření.

1. V tomto dílu seriálu se vyskytlo značné množství nových pojmů, z nichž některé mají velmi podobná označení. Pro správné pochopení této problematiky je ale nutné mezi těmito pojmy důsledně rozlišovat (např. chyba vs. nejistota, střední hodnota vs. výběrová střední hodnota atd.). Proto bychom na tomto místě chtěli upozornit, abyste v řešení seriálové úlohy (a ve všech budoucích zpracováních experimentů) věnovali zvláštní pozornost jazykovým formulacím, které mohou způsobovat zbytečná nedorozumění.
2. Je naprosto nutné pochopit účel intervalu spolehlivosti a jeho vztah k odhadům parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$ . Účelem odhadů parametrů je odhadnout z naměřených dat skutečnou hodnotu střední hodnoty (případně rozptylu nebo směrodatné odchylky) a je proto sám náhodnou veličinou. Tato náhodná veličina má tu vlastnost, že při velkém počtu pozorování bude její hodnota s velkou pravděpodobností velmi blízká skutečné hodnotě střední hodnoty (resp. rozptylu nebo směrodatné odchylky). Pro opravdu velký počet měření je takovýto odhad dostačující. V praxi ovšem skoro nikdy nemáme velký počet měření, proto konstruujeme intervalové odhady. Intervalový odhad je vlastně množina (interval), kde bude s určitou předem libovolně zvolenou pravděpodobností (s pravděpodobností  $1 - \alpha$ ) skutečná hodnota střední hodnoty ležet.
3. Fyzikové s oblibou říkávají následující:  
„Pravděpodobnost, že skutečná hodnota měřené veličiny leží v intervalu

$$\overline{x}_n \pm t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} s_K,$$



je  $1 - \alpha$ ." Toto je v podstatě pravdivé tvrzení, ale je poněkud nešťastně a zmatečně formulované. Je nutné si uvědomit, že skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny je deterministická (není náhodná), jenom ji většinou neznáme. To, co je náhodné, jsou meze intervalu spolehlivosti (vzpomeňte si, že  $\bar{x}_n$  a  $s_n$  jsou náhodné veličiny). Lepší formulace je proto následující: „Pravděpodobnost, že interval spolehlivosti pokrývá skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny, je  $1 - \alpha$ “. V tomto seriálu se budeme držet této přesnější formulace, stejně to dělejte i vy v řešení úloh.

4. Všimněme si, co ovlivňuje podobu (zejména šířku) intervalu spolehlivosti. Výběrový průměr  $\bar{x}_n$  odhaduje střední hodnotu a výběrový rozptyl  $S_n$  odhaduje rozptyl. Obě tyto náhodné veličiny budou při velkém počtu pozorování velice pravděpodobně nabývat pouze hodnot blízkých skutečným hodnotám střední hodnoty, resp. rozptylu. Jediné, co potom bude ovlivňovat šířku našeho intervalu spolehlivosti (tedy vlastně přesnost, se kterou jsme požadovanou fyzikální veličinu naměřili), bude člen  $\sqrt{n}$  ve jmenovateli zlomku. Tedy pokud chceme mít naměřenou fyzikální veličinu co nejpřesněji, můžeme postupovat dvěma způsoby. Buď co nejvíce snížit rozptyl měřených dat (tedy snížit člen  $S_n$ ), čehož dosáhneme lepším postupem měření (přesnější přístroje, omezení vnějších vlivů prostředí atd.), nebo můžeme provést více měření (tedy zvětšíme  $n$ ).
5. Speciální volbou parametru  $\alpha$  dostaneme poměrně jednoduše zajímavé výsledky.
  - Pokud zvolíme  $\alpha = 0,32$  (tedy budeme mít intervalový odhad o spolehlivosti 0,68) a budeme mít dostatečně velké  $n$  (více než 30), potom budou kvantily  $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$  vycházet velmi blízko 1 (ověřte si v tabulkách). Můžeme tedy říci, že pro dostatečně velký počet měření (více než 30) je interval

$$\bar{x}_n \pm s_K$$

intervalem spolehlivosti o spolehlivosti přibližně 0,68.

- Podobně pro volbu  $\alpha = 0,05$ , tedy pro spolehlivost 0,95 budou kvantily  $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$  pro dostatečně velké  $n$  (více než 30) vycházet blízko 2 (ověřte si v tabulkách). Můžeme tedy říci, že pro dostatečně velký počet pozorování (více než 30) je interval

$$\bar{x}_n \pm 2s_K$$

intervalem spolehlivosti o spolehlivosti přibližně 0,95.

- Podobně pro volbu  $\alpha = 0,003$ , tedy pro spolehlivost 0,997 budou kvantily  $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$  pro dostatečně velké  $n$  (více než 30) vycházet blízko 3 (ověřte si v tabulkách). Můžeme tedy říci, že pro dostatečně velký počet pozorování (více než 30) je interval

$$\bar{x}_n \pm 3s_K$$

intervalem spolehlivosti o spolehlivosti přibližně 0,997.

## Úloha II.S . . . odhadnutelná

10 bodů

- Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu slouží intervalový odhad střední hodnoty v normálním rozdělení a uveďte jeho fyzikální interpretaci (postačí vlastními slovy popsat následující: fyzikální interpretace odhadu střední hodnoty, rozdíl mezi (bodovým) odhadem a intervalovým odhadem, nejdůležitější vlastnost intervalového odhadu, metoda zkráceného zápisu intervalového odhadu, nejistota měření). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- V příloženém datovém souboru *mereni1.csv* najdete naměřené hodnoty určité fyzikální veličiny (uvažujte nejistotu typu B  $s_B = 0,1$ ). Zkonstruuje z těchto dat bodový i intervalový odhad měřené fyzikální veličiny a krátce interpretujte jejich význam.
- Předpokládejme, že měříme určitou fyzikální veličinu a víme, že vlivem použité metody měření budou mít naměřená data rozptýl rovný konstantě  $c$  (nejistotu typu B neuvažujte). Kolik musíme přibližně provést měření, abychom dosáhli nejistoty měření menší než  $s$ ?
- V příloženém datovém souboru *mereni2.csv* najdete data měření stejné fyzikální veličiny dvěma různými způsoby (nejistotu typu B neuvažujte). U které metody byla použita měřicí aparatura přesnější? Který způsob měření dal přesnější výsledek měření? U obou otázek své závěry i stručně zdůvodněte.

*Bonus:* Zkuste odvodit, že v normálním rozdělení je výběrový rozptýl nestranným odhadem skutečného rozptýlu (tj. střední hodnota výběrového rozptýlu je rovna skutečnému rozptýlu). Pro řešení tohoto úkolu můžete použít libovolné zdroje (pokud je budete řádně citovat).

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí *R*. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit příložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka *R*. (řešení str. 211)

### Kapitola 3: Zpracování dat fyzikálních měření

V minulém díle seriálu jsme si rozebrali, jak se matematicky modeluje experimentální měření fyzikálních veličin. Řekli jsme si, že hodnotu, kterou nám ukáže měřicí přístroj, považujeme za náhodnou veličinu se střední hodnotou rovnou skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny – tedy skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny je pevná a neměnná, zatímco naše naměřená data jsou v určitém smyslu náhodná (toto si připomeňte, budeme to potřebovat). Dále jsme si odvodili, jak se v nejjednodušším modelu, kdy uvažujeme, že měřená data mají normální rozdělení, konstruuje odhad měřené fyzikální veličiny a interval spolehlivosti pro měřenou fyzikální veličinu (což fyzikové nazývají nejistota měření).

V tomto díle seriálu se budeme zabývat dvěma věcmi. V první části si rozebereme, jak postupovat v obecnějším případě, kdy naše měřená data nemají normální rozdělení. Uvidíme, že se v takovémto případě postupuje velmi podobně jako v případě normálně rozdělených dat (což už bychom měli umět). Ve druhé části tohoto dílu seriálu se budeme zabývat situací, kdy potřebujeme naměřené fyzikální veličiny

(které jsou naměřeny s určitou nejistotou) dosazovat do dalších fyzikálních vzorců. Odvodíme si, jak v takovémto případě přepočítat nejistotu měření, abychom mohli konstruovat intervaly spolehlivosti pro naše transformovaná data.

### Centrální limitní věta (CLV)

V této kapitole si povíme, jak zpracovávat naměřená data, která se neřídí normálním rozdělením (nebo to o nich nemůžeme s jistotou prohlásit). V případě bodových odhadů střední hodnoty a rozptylu není žádný rozdíl oproti případu, kdy by námi naměřená data měla normální rozdělení. Odhady uvedené v minulém díle, tedy výběrový průměr

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_n,$$

výběrový rozptyl

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

a výběrová směrodatná odchylka

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}$$

budou mít i v tomto obecnějším případě stejné vlastnosti jako v případě normálního rozdělení (tedy, že pro velký počet měření bude jejich hodnota s největší pravděpodobností velmi blízká skutečným hodnotám střední hodnoty resp. rozptylu, resp. směrodatné odchylky).

Problém nastane u konstrukce intervalového odhadu. V minulém díle jsme předpokládali, že pokud mají naše měřená data normální rozdělení (s libovolnými parametry) a my na ně aplikujeme následující transformaci

$$\frac{\sqrt{n} \bar{x}_n - \mu}{S_n}, \quad (68)$$

kde  $\mu$  je skutečná střední hodnota rozdělení našich dat (tedy skutečná hodnota měřených fyzikálních veličin), potom má takto vzniklá náhodná veličina (je důležité si uvědomit, že jde o náhodnou veličinu, neboť dopředu neznáme její hodnotu) studentovo rozdělení o  $n-1$  stupních volnosti. Toto tvrzení neplatí, pokud měřená data nemají normální rozdělení.

V obecnějším případě, kdy nemají měřená data normální rozdělení, budeme vycházet ze stejné transformace našich naměřených dat, akorát musíme zjistit, jaké bude mít tato náhodná veličina v tomto obecnějším případě rozdělení. O tom hovoří centrální limitní věta. Centrální limitní věta říká, že ať mají naše jednotlivá měření jakékoliv rozdělení (ve skutečnosti je tady podmínka na konečný rozptyl,

ale tím se zatěžovat nebudeme), potom bude platit, že takto transformovaná data konvergují v distribuci k normálnímu rozdělení  $N(0, 1)$ . Matematicky zapsáno

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Co je to ta konvergence v distribuci? Intuitivně řečeno to znamená, že pro velký počet měření bude hustota náhodné veličiny (68) čím dále více podobná hustotě rozdělení  $N(0, 1)$ . Podobná v tomto případě znamená, že se v každém bodě bude hustota pravděpodobnosti této náhodné veličiny blížit hustotě pravděpodobnosti rozdělení  $N(0, 1)$ . Pozorného čtenáře by ihned měly napadnout následující dvě otázky:

1. Co je to velký počet měření? Toto je poměrně složitá otázka, ale v základním modelu, který budeme používat, budeme za dostatečně velký počet měření označovat situaci, kdy budeme mít alespoň 30 měření. V takovém případě už bude aproximace pomocí CLV velice přesná. Pokud budeme mít méně měření, musíme vzít v úvahu fakt, že aproximace normálním rozdělením pomocí CLV nemusí být tak přesná (o této problematice více dále).
2. Není znění centrální limitní věty ve sporu s tím, co jsme probírali v minulém díle seriálu? V minulém díle seriálu jsme uvažovali, že naše pozorování mají normální rozdělení (což spadá do kolonky „jakékoli rozdělení“), takže by rozdělení transformace námi naměřených dat (68) podle CLV mělo konvergovat k rozdělení  $N(0, 1)$ , ale v minulém dílu seriálu se tvrdilo, že tato transformace dat má rozdělení  $t_{n-1}$ . Vysvětlení je jednoduché, studentovo rozdělení  $t_n$  pro velká  $n$  konverguje v distribuci k rozdělení  $N(0, 1)$ , což si můžete ověřit pomocí vykreslení grafů hustot pravděpodobnosti obou rozdělení.

Velice podobným způsobem jako v minulém díle seriálu můžeme potom pracovat s pravděpodobnostmi a odvodit tak intervalový odhad. Jediný rozdíl je, že místo kvantilů studentova  $t_{n-1}$  rozdělení budeme muset používat kvantily normálního rozdělení  $N(0, 1)$ , které budeme značit  $u$  (tedy  $\alpha$ -kvantil normálního rozdělení  $N(0, 1)$  zapíšeme jako  $u_\alpha$ ). Pro jistotu ještě připomeneme, co jsou to kvantily rozdělení. Pokud si zvolíme číslo  $\alpha$  z intervalu  $(0, 1)$ , potom  $\alpha$ -kvantilem normálního rozdělení (značíme ho  $u_\alpha$ ) bude takové číslo, které splňuje podmínku, že pravděpodobnost, že naše náhodná veličina řídící se rozdělením  $N(0, 1)$  bude menší než  $u_\alpha$ , bude rovna  $\alpha$ . Matematicky zapsáno

$$P(X < u_\alpha) = \alpha.$$

Pro jistotu stručně zopakujeme postup odvození podoby intervalového odhadu pro střední hodnotu (tedy měřenou fyzikální veličinu) v případě obecného rozdělení měřených dat za použití CLV (postup je naprosto stejný jako v minulém díle seriálu).

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &\simeq P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \\
&= P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \bar{x}_n - \mu < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{x}_n < -\mu < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{x}_n\right) = \\
&= P\left(\bar{x}_n - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(\bar{x}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(\bar{x}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Všechny prováděné úpravy byly víceméně triviální, jen je nutné si uvědomit, že můžeme upravovat obě nerovnosti naráz. Mezi čtvrtým a pátým řádkem jsme využili vztahu

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

což plyne ze symetrie hustoty rozdělení  $N(0, 1)$  kolem osy  $y$ .

Tímto jsme podobně jako v minulém díle seriálu zkonstruovali intervalový odhad (v tomto případě však pouze asymptotický) pro střední hodnotu náhodné veličiny, tedy vlastně pro měřenou fyzikální veličinu ve tvaru

$$1 - \alpha \simeq P\left(\bar{x}_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).$$

Tento intervalový odhad lze interpretovat tak, že pravděpodobnost pokrytí skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny tímto intervalem je pro velký počet měření přibližně  $1 - \alpha$  (uvědomme si, že náhodné jsou meze intervalu, nikoliv hodnota měřené fyzikální veličiny). Tento intervalový odhad lze zapsat jako

$$\bar{x}_n \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Fyzikové většinou zapisují ještě více zkráceně a vynechají i kvantil  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ , tedy intervalový odhad zapíší jako

$$\bar{x}_n \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}},$$

kde se člen  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  nazývá výběrová směrodatná odchylka průměru (odhaduje to směrodatnou odchylku výběrového průměru) a značí se  $s_n$ . Někdy se tomuto členu také říká standardní odchylka.

Tento nejvíce zjednodušený zápis má dvě možné interpretace

- Bud se tím myslí, že uvažujeme hladinu spolehlivosti  $\alpha \simeq 0,32$  (tedy pravděpodobnost pokrytí je přibližně 0,68), potom totiž platí

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.$$

- Pokud čtenář chce uvažovat jinou hladinu spolehlivosti, může si podle tabulek doplnit příslušný kvantil a tím intervalový odhad ze zkráceného zápisu zrekonstruovat.

### *Několik poznámek k intervalovým odhadům založeným na CLV*

Zde uvedeme několik důležitých poznámek.

- Jak jsme psali výše, pro velké hodnoty počtu měření  $n$ , je studentovo  $t_n$  rozdělení téměř identické s rozdělením  $N(0, 1)$ . Pro velký počet měření je tedy v podstatě jedno, jestli používáme kvantily rozdělení  $N(0, 1)$  nebo kvantily studentova  $t_n$  rozdělení. To je v souladu s intuitivní představou, že by obě metody (ta uvedená v minulém díle seriálu a ta uvedená dnes) měly pro velký počet měření dávat stejné (nebo alespoň podobné) výsledky.
- Někdy se postupuje tak, že se místo kvantilů normálního  $N(0, 1)$  rozdělení uvažují kvantily studentova  $t_n$  rozdělení. Tedy zpracováváme naměřená data jakoby měřené hodnoty měli normální rozdělení (viz minulý díl seriálu), ačkoliv víme, že tomu tak není nebo být nemusí. Toto není nutně chybný postup, neboť studentovo  $t_n$  rozdělení (pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ ) je více zploštělé než rozdělení  $N(0, 1)$  (ověřte si sami vykreslením grafů hustot pravděpodobnosti), tedy jeho kvantily budou vždy v absolutní hodnotě větší než příslušné kvantily (tj. kvantily pro stejnou hladinu spolehlivosti  $\alpha$ ) normálního rozdělení  $N(0, 1)$ , tedy budeme tímto způsobem vždy dostávat širší intervaly spolehlivosti. Budeme se tedy chovat více konzervativně tj. výslednou nejistotu měření si tímto způsobem vždy zvětšíme, nikdy si ji nemůžeme zmenšit. Jak už bylo zmíněno v předchozí poznámce, pro velký počet měření tento postup dává téměř identické výsledky jako postup založený na kvantilech  $N(0, 1)$  rozdělení. V řešení úloh ovšem používejte klasický postup (tedy ten založený na kvantilech  $N(0, 1)$  rozdělení).
- Centrální limitní větu lze použít jen pro dostatečně velký počet měření. Pokud máme alespoň 30 měření, můžeme CLV bez obav použít, aproximace bude už velmi přesná. Pokud máme alespoň 10 měření, můžeme CLV použít, ale musíme mít na paměti, že aproximace normálním rozdělením nebude dokonalá a příslušné intervalové odhady budou jen přibližné. Pokud máme méně než 10 měření, aproximace normálním rozdělením může být už značně nepřesná. Zároveň ale platí, že nic lepšího zkonstruovat nelze. Proto se výsledek většinou uvádí stejný, ale je nutné do diskuze přidat upozornění, že může jít o značně nepřesný výsledek, neboť je založen na malém počtu měření <sup>11</sup>!

<sup>11</sup>Pokud jsme si jisti, že námi měřená data mají normální rozdělení – což prakticky nikdy nejsme – potom je intervalový odhad založený na studentově  $t_n$  rozdělení (tj. bez použití CLV) přesný pro libovolný počet měření (viz minulý díl seriálu).

- V minulém dílu seriálu jsme popisovali nejistoty typu A (pocházející z náhodnosti měřených dat) a nejistoty typu B (pocházející z ostatních příčin, typicky nepřesnosti použitého měřidla). Nyní uvedeme, že výběrová směrodatná odchylka průměru (neboli standardní odchylka) představuje nejistotu typu A a pokud pracujeme ještě s nejistotou typu B, potom ji k nejistotě typu A přičteme pomocí stejného vzorce

$$s_K = \sqrt{s_A^2 + s_B^2},$$

čímž získáme kombinovanou nejistotu měření. Intervalové odhady potom konstruujeme za použití této kombinované nejistoty měření.

- Cílem fyzikálního experimentu je mít co nejmenší kombinovanou nejistotu měření (tj. naměřit fyzikální veličinu co možná nejpřesněji). Podobně jako v případě normálně rozdělených dat toho lze dosáhnout buď větším počtem měření (tj. zvětšit člen  $\sqrt{n}$  ve jmenovateli zlomku, tedy zmenšit nejistotu typu A vyjádřenou pomocí  $s_n$ ), nebo přesnější měřící aparaturou (tj. snížit rozptyl měřených dat, tedy snížit člen  $S_n$ , který představuje odhad rozptylu).

### Vícerozměrný případ

Nyní se zaměříme na případ, kdy chceme změřit více fyzikálních veličin (které budou samozřejmě zatíženy nejistotou) a tyto změřené veličiny následně dosadit do určitého vzorce. Náš úkol bude zkoumat vlastnosti výsledku dosažení (zejména budeme chtít umět vyjádřit nejistoty určení a konstruovat intervalové odhady).

Uvažujme, že cílem našeho experimentu je změřit fyzikální veličiny  $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$  a následně je dosadit do vzorce

$$v = f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}),$$

čímž získáme výslednou fyzikální veličinu  $v$ . Odvodíme si nyní, jaká bude nejistota určení veličiny  $v$  a jak pro ni konstruovat intervalové odhady.

Na tomto místě si musíme uvědomit, že v případě měření více fyzikálních veličin najednou nastává problém se závislostí jednotlivých měření. V úplně nejjednodušším modelu můžeme uvažovat, že jsou všechna prováděná měření na sobě nezávislá, což bude obvykle opodstatněný předpoklad. V nějakých případech ovšem takto jednoduchý model použít nelze a budeme muset do určování výsledné nejistoty a konstrukce intervalových odhadů také zahrnout možnou závislost našich měření. Nyní se budeme věnovat odvození složitějšího modelu se závislými měřeními a jednodušší model pro nezávislá měření dostaneme jako jeho speciální případ. Jako první si musíme zadefinovat, jak budeme matematicky popisovat závislost našich měření (jelikož výsledek jednoho měření modelujeme jako náhodnou veličinu, budeme vlastně popisovat závislosti náhodných veličin).

### Kovariance a korelace

Za účelem měření míry závislosti dvou náhodných veličin se zavádí kovariance (též koeficient kovariance, kovarianční koeficient), která je pro dvě náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  definována jako

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] ,$$

kde  $E$  značí střední hodnotu. Koeficient kovariance může obecně nabývat libovolné reálné hodnoty. Intuitivně si lze kovarianci představovat tak, že vyjadřuje střední hodnotu výrazu

$$(X - EX)(Y - EY) ,$$

který bude nabývat nejčastěji kladných hodnot (potom jeho střední hodnota potom bude kladné číslo), pokud na sobě budou náhodné veličiny závislé takovým způsobem, že pokud jedna náhodná veličina nabývá vysoké hodnoty (tj. vyšší než je její střední hodnota), potom i druhá náhodná veličina bude s největší pravděpodobností nabývat vysoké hodnoty (tj. vyšší než její střední hodnota). Podobně bude tento výraz nabývat nejčastěji záporných hodnot (potom jeho střední hodnota bude záporné číslo), pokud bude závislost našich náhodných veličin taková, že vysoké hodnoty jedné veličiny (tj. vyšší než její střední hodnota), se budou s největší pravděpodobností vyskytovat právě v případech, že druhá náhodná veličina bude nabývat nízkých hodnot (tj. nižších než její střední hodnota). Také musíme uvést fakt, že pokud budou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé, potom bude hodnota jejich kovariančního koeficientu vždy 0. To lze odvodit přímo z definice následovně

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E[(X - EX)(Y - EY)] = E[X - EX] \cdot E[Y - EY] = \\ &= (EX - EX) \cdot (EY - EY) = 0 . \end{aligned}$$

Úpravy, které jsme prováděli, můžeme provést jen za předpokladu, že náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé, jinak takto postupovat nemůžeme.

Pro lepší popis závislosti náhodných veličin se zavádí ještě korelace (též koeficient korelace, korelační koeficient), která je definovaná jako

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}} .$$

Díky tomu, že koeficient korelace je definován jako vhodně normovaný koeficient kovariance, může nabývat pouze hodnot od  $-1$  do  $1$ . Pro ideálně lineárně závislé veličiny (tj. pokud platí  $X = aY + b$ , pro nějaké konstanty  $a, b$ ) bude korelační koeficient nabývat hodnot  $\pm 1$  (bude mít stejné znaménko jako konstanta  $a$ ). Pokud budou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé, potom bude jejich korelační koeficient nulový (triviální důsledek definice korelačního koeficientu a vlastnosti kovariance, kterou jsme odvodili dříve). Hodnoty korelačního koeficientu blízko nuly ukazují na malou závislost náhodných veličin a hodnoty korelačního koeficientu blízko  $1$  nebo  $-1$  ukazují na vysokou míru závislosti náhodných veličin.

Kovarianční a korelační koeficient našich naměřených dat v praxi většinou není dopředu znám (podobně jako střední hodnota nebo rozptyl). Pokud si můžeme



být jisti, že jsou všechna naše měření fyzikálních veličin nezávislá, potom můžeme tvrdit, že je příslušný kovarianční a korelační koeficient nulový. Tuto jistotu získáme jen díky znalosti toho, jak jsme naše data měřili. V některých případech se stane, že si nemůžeme být jistí nezávislostí našich měření a musíme tedy z naměřených dat odhadovat míry závislosti.

Pokud máme k dispozici měření dvou fyzikálních veličin (vlastně realizace dvou náhodných veličin), můžeme odhadovat jejich kovarianční a korelační koeficienty. Potřebujeme k tomu vždy dvojice měření  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , kde  $x_i$  je  $i$ -té měření první fyzikální veličiny a  $y_i$  je  $i$ -té měření druhé fyzikální veličiny. Zde je nutné poznamenat, že nelze postupovat tak, že si naměřené hodnoty libovolně spárujeme, dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$  musí vždy pocházet z odpovídajících si měření! Pokud máme takovéto dvojice odpovídajících si měření, můžeme kovarianční koeficient odhadnout pomocí tzv. výběrového kovariančního koeficientu definovaného jako

$$\widehat{\text{cov}}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) (y_i - \bar{y}_n),$$

kde  $\bar{x}_n, \bar{y}_n$  mají význam výběrových průměrů. Podobně lze odhadovat korelační koeficient pomocí výběrového korelačního koeficientu definovaného jako

$$\widehat{\text{corr}}(X, Y) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) (y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{S_{X,n}^2 \cdot S_{Y,n}^2}},$$

kde  $S_{X,n}^2$  je výběrový rozptyl zkonstruovaný z realizací náhodné veličiny  $X$ ,  $S_{Y,n}^2$  je výběrový rozptyl zkonstruovaný z realizací náhodné veličiny  $Y$  a členy  $\bar{x}_n$  a  $\bar{y}_n$  mají význam výběrových průměrů.

Na tomto místě si opět musíme rozdíl mezi odhadem kovariančního (resp. korelačního) koeficientu a jeho skutečnou hodnotou (kterou většinou neznáme). Skutečná hodnota kovariančního (resp. korelačního) koeficientu je konstanta (není na ní nic náhodného), zatímco odhad kovariančního (resp. korelačního) koeficientu (tj. výběrový kovarianční a korelační koeficient) je náhodná veličina (protože je zkonstruován na základě naměřených dat, která jsou náhodná, nemůžeme dopředu určit jeho hodnotu). Pro velký počet měření bude mít výběrový kovarianční (resp. korelační) koeficient podobně jako předchozí odhady tu vlastnost, že bude s největší pravděpodobností velice blízko skutečným hodnotám kovariančního (resp. korelačního) koeficientu. Nyní už víme, jak matematicky měřit závislosti dvou náhodných veličin a můžeme přistoupit k formulaci vícerozměrné centrální limitní věty.

### Vícerozměrná verze CLV

Nyní už můžeme uvést znění vícerozměrné centrální limitní věty<sup>12</sup>. Uvažujme tedy situaci jako výše, tedy že měříme  $k$  různých fyzikálních veličin  $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ , které

<sup>12</sup>Uvedeme ji zde v trochu neobvyklém tvaru, který je ale velice užitečný pro výpočty. Pokud byste si o tomto tématu četli i v jiné literatuře, je pravděpodobné, že tam bude CLV pro vícerozměrný případ formulována jinak, nicméně tyto dvě formulace jsou ekvivalentní.

naměříme s určitou nejistotou. Máme tedy naměřeno

$$\left(\overline{v^{(1)}} \pm s_{n_1}^{(1)}\right), \dots, \left(\overline{v^{(k)}} \pm s_{n_k}^{(k)}\right),$$

kde  $\overline{v^{(i)}}$  je výběrový průměr  $i$ -té fyzikální veličiny a  $s_{n_i}^{(i)}$  je standardní odchylka  $i$ -té fyzikální veličiny tak, jak byly definovány výše (uvažujeme tedy, že každá fyzikální veličina mohla být měřena různým počtem měření, a uvažujeme také, že rozdělení měřených dat nemusí být normální a ani měření různých fyzikálních veličin nemusí být vzájemně nezávislé). Tyto naměřené veličiny následně chceme dosadit do vzorce

$$v = f\left(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}\right) \tag{69}$$

a určit výslednou nejistotu a zkonstruovat intervalové odhady.

V tomto případě využijeme vícerozměrnou verzi centrální limitní věty, která tvrdí, že platí

$$\frac{f\left(\overline{v_n^{(1)}}, \dots, \overline{v_n^{(k)}}\right) - f\left(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}\right)}{\sqrt{S^2}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

kde  $v^{(i)}$  je skutečná hodnota  $i$ -té fyzikální veličiny a  $S^2$  je v tomto případě odhad rozptylu náhodné veličiny představující celkový výsledek měření<sup>13</sup>, který se spočte podle vzorce<sup>14</sup>

$$S^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v^{(1)}}(\bar{v}) & \dots & \frac{\partial f}{\partial v^{(k)}}(\bar{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{n_1}^2 & \dots & \widehat{\text{cov}}(v^{(1)}, v^{(k)}) \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(2)}, v^{(1)})}{\sqrt{n_2 n_1}} & \dots & \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(2)}, v^{(k)})}{\sqrt{n_2 n_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(k)}, v^{(1)})}{\sqrt{n_k n_1}} & \dots & s_{n_k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v^{(1)}}(\bar{v}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial v^{(k)}}(\bar{v}) \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Poznamenejme na tomto místě, že výrazem

$$\frac{\partial f}{\partial v^{(i)}}(\bar{v})$$

se myslí hodnota parciální derivace funkce  $f$  podle  $i$ -té proměnné vyčíslená v bodě

$$\bar{v} = \left(\overline{v_{n_1}^{(1)}}, \dots, \overline{v_{n_k}^{(k)}}\right),$$

tedy jde o číslo.

<sup>13</sup>Tj. dosažení odhadů našich fyzikálních veličin do vzorce (69).

<sup>14</sup>Tento vzorec využívá parciální derivace a maticové násobení. Pokud toto neumíte, můžete se podívat na poslední kapitolu tohoto dílu seriálu, kde je vše stručně vysvětleno, nebo můžete pokračovat dále, neboť jak uvidíme, v praxi nejčastěji používaných případech se tento vzorec značně zjednoduší.

Klasickým způsobem, který jsme zde už několikrát viděli, můžeme zkonstruovat asymptotický intervalový odhad pro

$$v = f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}).$$

Uvedeme zde jen hlavní kroky odvození<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\simeq \mathbb{P} \left( u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{f(\overline{v_n^{(1)}} , \dots , \overline{v_n^{(k)}}) - f(v^{(1)} , \dots , v^{(k)})}{\sqrt{S^2}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \\ &= \mathbb{P} \left( -f(\overline{v_n^{(1)}} , \dots , \overline{v_n^{(k)}}) + u_{\frac{\alpha}{2}} S < \right. \\ &< -f(v^{(1)} , \dots , v^{(k)}) < -f(\overline{v_n^{(1)}} , \dots , \overline{v_n^{(k)}}) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} S \left. \right) = \\ &= \mathbb{P} \left( f(\overline{v_n^{(1)}} , \dots , \overline{v_n^{(k)}}) - u_{1-\frac{\alpha}{2}} S < \right. \\ &< f(v^{(1)} , \dots , v^{(k)}) < f(\overline{v_n^{(1)}} , \dots , \overline{v_n^{(k)}}) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} S \left. \right). \end{aligned}$$

V nejvíce zkrácené podobě se tento intervalový odhad bude zapisovat stejně jako v předchozích případech pouze jako

$$f(\overline{v_n^{(1)}} , \dots , \overline{v_n^{(k)}}) \pm S,$$

kde  $S$  se označuje jako standardní odchylka.

### Několik poznámek k intervalovým odhadům založeným na vícerozměrné CLV

Zde uvedeme několik důležitých poznámek.

- V odvození jsme uvažovali vícerozměrný případ, tedy obecné  $k \in \mathbb{N}$ . Celou odvozenou teorii lze samozřejmě aplikovat i na speciální případ, kdy zvolíme  $k = 1$  (tedy jen jednorozměrný případ). Toto se při zpracování fyzikálních experimentů vyskytuje poměrně často (měříme jen jednu veličinu a chceme ji dosadit do určitého fyzikálního vzorce).
- Vícerozměrnou centrální limitní větu lze použít jen pro dostatečně velký počet měření. Pokud jsme provedli více než 30 měření každé fyzikální veličiny, potom už bude aproximace pomocí vícerozměrné CLV velmi přesná. Pokud jsme provedli alespoň 10 měření každé fyzikální veličiny aproximace pomocí vícerozměrné CLV nebude tolik spolehlivá, ale stále bude poměrně přesná. Pro menší počet měření nějaké veličiny než 10 platí, že použití vícerozměrné CLV už může dávat značně nepřesné výsledky. Zároveň ale platí, že žádný lepší postup než výše uvedený neexistuje. Proto se i pro malý počet měření (menší než 10) výsledek většinou uvádí stejný, ale je nutné přidat upozornění, že může jít o značně nepřesný výsledek<sup>16</sup>!

<sup>15</sup>Používají se jen algebraické úpravy nerovností a nahrazení  $u_{\frac{\alpha}{2}}$  pomocí  $-u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ .

<sup>16</sup>Pokud bychom věděli, že námi měřená data mají normální rozdělení, lze odvodit přesný postup (tj. bez jakékoliv aproximace) analogický jednorozměrnému případu. Tento postup je ovšem příliš složitý a nebudeme ho zde uvádět (v praxi se stejně téměř nepoužívá).

- V rámci typů nejistot měření můžeme standardní odchylku  $S$  považovat za kombinovanou nejistotu měření, pokud jsme jako  $s_{n_i}^{(i)}$  používali kombinované nejistoty měření, nebo ji můžeme považovat pouze za nejistotu typu A, pokud jsme jako  $s_{n_i}^{(i)}$  používali pouze nejistoty typu A.

### Zákon šíření nejistot

V nejobecnějším modelu (kdy uvažujeme závislá měření různých fyzikálních veličin) nemůžeme vzorec (70) nijak zjednodušit a musíme opravdu provést celý takto složitý výpočet. V určitých speciálních případech se ovšem tento vzorec značně zjednoduší.

Ve speciálním případě, kdy budeme uvažovat, že jsou všechna měření na sobě nezávislá (tj. nebudeme ani odhadovat kovariance měření různých fyzikálních veličin, ale rovnou budeme předpokládat, že jsou nulové), se nám vzorec (70) zjednoduší na tvar

$$S = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\bar{v})}{\partial v^{(1)}}\right)^2 s_{n_1}^{(1)2} + \dots + \left(\frac{\partial f(\bar{v})}{\partial v^{(k)}}\right)^2 s_{n_k}^{(k)2}}.$$

Tomuto vzorci se také někdy říká zákon šíření nejistot (případně zákon propagace nejistot).

V praxi se vyplatí znát přesnou podobu zákona šíření nejistot pro nejčastěji se vyskytující funkce, které můžeme vidět v tabulce 21. Pilný čtenář si může platnost všech uvedených vzorců ověřit dosazením příslušných funkcí do zákona šíření nejistot.

Občas se lze v praxi setkat také s pojmem relativní nejistota měření, která je definována jako

$$\delta_x = \frac{\bar{x}_n}{s_n}.$$

Je důležité poznamenat, že relativní nejistota měření je bezrozměrná veličina (na rozdíl od klasické nejistoty). Přejít od relativní nejistoty měření ke klasické nejistotě měření si jistě už každý čtenář dokáže odvodit sám. Celá teorie by se dala podobným způsobem vybudovat, pokud bychom používali relativní nejistoty měření, ale až na výjimečné příklady<sup>17</sup> by to nevedlo k jednodušším výsledkům. V dalším pokračování seriálu i v řešení seriálových úloh se nebudeme relativními nejistotami měření dále zabývat, zde je uvádíme jen jako drobné rozšíření vykládané látky.

### Parciální derivace a násobení matic (vektorů)

Jelikož se ve vzorci (70) vyskytly parciální derivace a násobení matic, což možná není všem úplně známé, uvedeme zde stručné objasnění použitých pojmů.

V tomto díle seriálu bohužel nemůžeme podrobně vysvětlit, jak je definována derivace (resp. parciální derivace) a jaké má vlastnosti. Proto pouze uvedeme,

<sup>17</sup>Pokud bychom formulovali zákon šíření nejistot v řeči relativních nejistot, potom by například pro volbu funkce  $f(u, v) = u \cdot v$  výsledná relativní nejistota měření byla jen kvadratickým součtem relativních nejistot měření veličin  $u$  a  $v$ . Ve většině ostatních případů by ale používání relativních nejistot vedlo spíše ke složitějším výsledkům.

Tab. 21: Nejdůležitější příklady použití zákona šíření nejstot.

Použitá funkce	Vzorec na výslednou nejstotu měření
$f(v^{(1)}, v^{(2)}) = v^{(1)} + v^{(2)}$	$S = \sqrt{s_{n_1}^{(1)2} + s_{n_2}^{(2)2}}$
$f(v^{(1)}, v^{(2)}) = v^{(1)} - v^{(2)}$	$S = \sqrt{s_{n_1}^{(1)2} + s_{n_2}^{(2)2}}$
$f(v^{(1)}, v^{(2)}) = v^{(1)} \cdot v^{(2)}$	$S = \sqrt{v_{n_2}^{(2)2} s_{n_1}^{(1)2} + v_{n_1}^{(1)2} s_{n_2}^{(2)2}}$
$f(v^{(1)}, v^{(2)}) = \frac{v^{(1)}}{v^{(2)}}$	$S = \sqrt{\frac{1}{v_{n_2}^{(2)2}} s_{n_1}^{(1)2} + \frac{v_{n_1}^{(1)2}}{v_{n_2}^{(2)4}} s_{n_2}^{(2)2}}$
$f(v) = v^a, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$	$S = a \cdot \bar{v}_n^{a-1} s_n$

že parciální derivace funkce  $k$  proměnných podle  $i$ -té proměnné se spočítá jako normální derivace funkce, když budeme na všechny proměnné kromě  $i$ -té pohlížet jako na konstanty.

Matice jsou v podstatě jen tabulky čísel, nic více. U matice rozlišujeme její rozměry (tj. kolik má řádků a sloupců), říkáme, že matice  $A$  je typu  $k$  krát  $n$  (píšeme  $A_{k \times n}$  – první číslo udává počet řádků, druhé počet sloupců). Matice typu  $1 \times 1$  je pouze číslo a matici typu  $1 \times n$  (resp.  $n \times 1$ ) se říká řádkový (resp. sloupcový) vektor.

Násobení matic je definováno poněkud složitěji. Uvažujme, že máme matice  $A_{k \times n}$  a  $B_{n \times l}$  (aby byl součin těchto matic definován musí být počet sloupců první matice roven počtu řádků druhé matice), potom součin  $AB$  je definován následovně<sup>18</sup>

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,l} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,l} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \langle a_{1,\bullet}, b_{\bullet,1} \rangle & \langle a_{1,\bullet}, b_{\bullet,2} \rangle & \cdots & \langle a_{1,\bullet}, b_{\bullet,l} \rangle \\ \langle a_{2,\bullet}, b_{\bullet,1} \rangle & \langle a_{2,\bullet}, b_{\bullet,2} \rangle & \cdots & \langle a_{2,\bullet}, b_{\bullet,l} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_{k,\bullet}, b_{\bullet,1} \rangle & \langle a_{k,\bullet}, b_{\bullet,2} \rangle & \cdots & \langle a_{k,\bullet}, b_{\bullet,l} \rangle \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

kde  $a_{i,\bullet}$  označuje  $i$ -tý řádek matice  $A$ ,  $b_{\bullet,j}$  označuje  $j$ -tý sloupec matice  $B$  a výraz  $\langle a_{i,\bullet}, b_{\bullet,j} \rangle$  označuje skalární součin vektorů  $a_{i,\bullet}$  a  $b_{\bullet,j}$  definovaný jako

$$\langle a_{i,\bullet}, b_{\bullet,j} \rangle = \sum_{g=1}^n a_{i,g} \cdot b_{g,j}.$$

<sup>18</sup>Je důležité poznamenat, že maticové násobení není komutativní, tedy obecně platí  $A \cdot B \neq B \cdot A$ , ale je asociativní, tedy platí  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$  pro libovolné matice  $A, B, C$ , pro které je takovýto součin definován.

Výsledkem součinu matic  $A_{k \times n}$  a  $B_{n \times l}$  je tedy matice tvaru  $C_{k \times l}$ . Pokud chceme násobit vektor s maticí (nebo 2 vektory spolu) stačí na vektory pohlížet jako na speciální případ matice a řídit se pravidly pro maticové násobení.

### Úloha III.S ... limitní

10 bodů

- a) Zkuste vlastními slovy popsat postup konstrukce intervalových odhadů střední hodnoty v případě obecného rozdělení měřených dat (postačí vlastními slovy popsat následující: centrální limitní věta a předpoklady jejího použití, kovariance a korelace (a jejich odhady), vícerozměrná centrální limitní věta a předpoklady jejího použití, zákon šíření nejistot a kdy ho lze použít). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- b) V přiloženém datovém souboru *mereni3-1.csv* najdete výsledky měření určité fyzikální veličiny  $v$ . Předpokládejme, že si nemůžeme být jisti, zda mají měřená data normální rozdělení. Vyjádřete nejistotu měření této fyzikální veličiny (nejistotu typu B neuvažujte), zkonstruujte intervalové odhady na základě CLV a stručně interpretujte jeho význam. Jak by se změnilы výsledky a interpretace, pokud bychom měli k dispozici jen čtvrtinu měření (řekněme první čtvrtinu dat z datového souboru)?
- c) Předpokládejme, že naším cílem je naměřit fyzikální veličiny  $x$  a  $y$ , které budeme chtít využít pro dosažení do vzorce

$$v = \frac{1}{2}xy^2.$$

Předpokládejme, že díky znalosti způsobu měření jsme si jisti, že jsou všechna měření na sobě nezávislá a ze zpracování naměřených dat měření máme následující výsledky, které jsou založeny na velkém počtu měření (více než 30 měření každé fyzikální veličiny)

$$x = (5,2 \pm 0,1),$$

$$y = (12,84 \pm 0,06).$$

Určete odhad fyzikální veličiny  $v$  a nejistotu měření fyzikální veličiny  $v$ .

*Nápověda:* Mohly by se vám hodit následující vztahy:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}xy^2 \right) = \frac{1}{2}y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}xy^2 \right) = xy.$$

- d) Pomocí simulace ve výpočetním prostředí  $R$  demonstřujte platnost centrální limitní věty. Tj. generujte  $n$ -tice nezávislých realizací náhodné veličiny, která nemá normální rozdělení (pro tento případ použijte exponenciální, rovnoměrné a Poissonovo rozdělení s libovolně zvolenými parametry) a na histogramu ukažte, že pokud na data provedeme následující transformaci

$$\sqrt{n} \frac{x_n - \mu}{S_n},$$

takto transformovaná data už budou rozdělena přibližně podle normálního rozdělení  $N(0, 1)$ . (Součástí hodnocení bude i hodnocení vzhledu grafů – zejména vhodně zvolené popisky os a legenda.)

*Bonus:* Předpokládejme, že naším cílem je naměřit fyzikální veličiny  $x$  a  $y$ , které budeme chtít dosadit do vzorce

$$v = x^2 \sin y.$$

Uvažujme nejobecnější model měření (tj. měřená data nemají normální rozdělení a měření různých fyzikálních veličin na sobě mohou být závislá). V datovém souboru *mereni3-2.csv* máme výsledky měření fyzikálních veličin  $x$  a  $y$ , určete nejistotu určení veličiny  $v$  a zkonstruujte pro ni intervalový odhad. (řešení str. 216)

## Kapitola 4: Zpracování dat fyzikálních měření

V tomto díle seriálu se budeme věnovat statistickému testování hypotéz. Tento díl bude výrazným způsobem navazovat na všechny 3 předchozí díly seriálu, proto doporučujeme si nejprve zběžně připomenout obsah minulých dílů. Nyní už k samotnému tématu tohoto dílu seriálu: co to je statistické testování hypotéz?

Jistě se každý mnohokrát setkal se situací, kdy si potřeboval na základě naměřených dat ověřit nějakou domněnku, hypotézu. Jako fyzikální příklad můžeme uvést třeba porovnávání rychlostí zvuku v různých prostředích (chceme například testovat domněnku, že se zvuk v železe šíří rychleji než ve vzduchu) nebo můžeme chtít zjistit, jestli má například namokření povrchu vliv na koeficient tření a podobně.

Naše závěry musí být vždy založeny na naměřených datech. Kdybychom uměli fyzikální veličiny měřit přesně, tak by odpověď na položenou otázku byla velice jednoduchá, stačilo by příslušné fyzikální veličiny změřit a rozhodnout o platnosti hypotézy. V praxi to ovšem tak jednoduše udělat nemůžeme, neboť nikdy nebudeme mít naprosto přesná měření. Jak si jistě z minulých dílů pamatujete, naměřená data v našem matematickém modelu považujeme za realizace náhodné veličiny. Problém tedy spočívá v tom, že teoreticky můžeme naměřit jakákoliv data (i když třeba s velice malou pravděpodobností). Následně je potřeba se rozhodovat na základě takovýchto „náhodných“ dat, což není jednoduchý úkol. Představme si například, že měříme dvě fyzikální veličiny a následně je chceme porovnat (tj. zjistit, která je větší). Naměřená data mohou vypadat například jako data v tabulce 22.

Na první pohled je vidět, že data naměřená ve 2. vzorku mají mírně vyšší hodnoty (alespoň tedy v průměru). Jak ale poznat, že je to opravdu způsobeno vyšší hodnotou měřené fyzikální veličiny a ne pouze tím, že jsme zrovna náhodně naměřili takováto data (vzpomeňte si na to, že naměřenou hodnotu považujeme za náhodnou veličinu, proto při každém měření můžeme naměřit jinou hodnotu)? Tomuto procesu se říká testování hypotéz.

### Základní idea testování hypotéz

Nyní už si budeme postup statistického testování hypotéz popisovat matematicky přesněji, než jsme to udělali v úvodu, kde jsme jenom nastínili obecný problém.

Tab. 22: Hypotetická naměřená data.

1. vzorek	8	7	9	8	8	6	10	7	8	7
2. vzorek	9	8	9	7	10	8	8	7	9	7

Naše otázka bude vždy formulovaná tak, že budeme mít nějaký výrok, který budeme označovat za hypotézu (například výrok „Namokření podložky nemá žádný vliv na třecí koeficient.“), kterou budeme zkráceně značit  $H$ . K hypotéze si musíme zkonstruovat opačný výrok, který budeme označovat jako alternativu (v našem případě by to byl výrok „Namokření podložky má vliv na třecí koeficient.“), kterou budeme označovat jako  $A$ . Je důležité dát si pozor na to, aby alternativa byla opravdu opačný výrok k hypotéze <sup>19</sup>. V našem případě by například výrok „Namokření podložky snižuje třecí koeficient“ nemohl být považován za alternativu (může totiž platit ještě něco jiného než hypotéza a alternativa, tj. výrok „Namokření podložky zvyšuje třecí koeficient.“).

Testování hypotéz bude vlastně proces, jak budeme na základě naměřených dat (tedy realizací náhodných veličin) rozhodovat o platnosti hypotézy nebo alternativy. V případě, že budeme mít vyhovujícím způsobem zformulovanou hypotézu a alternativu, budeme postupovat tak, že budeme zamítat nebo nezamítat <sup>20</sup> platnost hypotézy. Musíme se smířit s tím, že nikdy nebudeme schopni s určitostí říci, jestli hypotéza platí nebo ne. Je to způsobeno tím, že považujeme výsledky měření za náhodnou veličinu, a proto můžeme naměřit (i když s velice malou pravděpodobností) v podstatě jakákoliv data. Následně nemáme žádné prostředky na to, jak posoudit, zda tato data jsou skutečně reprezentativní, nebo zda jde jen o velkou anomálii.

Když se budeme rozhodovat, jak při rozhodování o platnosti hypotézy postupovat, musíme si nejprve uvědomit, jaké všechny možnosti mohou nastat a zanalyzovat si, jaké chyby můžeme případně udělat. Na základě této analýzy budeme potom navrhnout postup testování hypotéz.

Jak je z tabulky 23 vidět, můžeme při našem rozhodování udělat 2 druhy chyb, které jsme si označili jako chyba 1. a 2. druhu. Nyní se zaměříme na to, jak těmto chybám čelit a zvolíme takový postup, kdy se budeme s největší pravděpodobností rozhodovat správně.

naše rozhodnutí / skutečný stav	platí hypotéza	platí alternativa
zamítáme hypotézu	chyba 1. druhu	správně
nezamítáme hypotézu	správně	chyba 2. druhu

Tab. 23: Tabulka možných rozhodnutí a chyb

Základní ideou testování hypotéz je zvolit takový postup rozhodování o plat-

<sup>19</sup>Tj. aby se nemohlo stát, že bude ve skutečnosti platit ještě něco úplně jiného, ani že budou platit hypotéza i alternativa zároveň.

<sup>20</sup>Nezamítnout neznamená to samé co potvrdit platnost!



nosti hypotézy, aby byla pravděpodobnost chyby 1. druhu rovna nějaké předem zvolené konstantě  $\alpha$  (většinou se v praxi volí hodnota  $\alpha = 0,05$ ) a pravděpodobnost chyby 2. druhu byla co možná nejmenší. Na první pohled se takovýto postup může zdát komplikovaný a neoptimální, ale je to opravdu to nejlepší, co můžeme udělat<sup>21</sup>.

### Základní postup při odvozování testů

Nyní už podrobněji k samotnému postupu rozhodování o (ne)zamítnutí hypotézy. Nejprve zde poskytneme základní postup odvozování statistických testů a následně si odvodíme nejčastěji používané testy.

První věc, kterou musíme při odvozování statistických testů udělat, je vhodně zapsat testovanou hypotézu a alternativu. Vhodným zápisem se rozumí zápis pomocí rovností nebo nerovností určitých parametrů našeho modelu.

Následně musíme zvolit testovou statistiku. Testová statistika bude určitá transformace našich naměřených dat (tím pádem to bude náhodná veličina, neboť naše měřená data považujeme za náhodné veličiny), o které budeme vědět, jak se chová za platnosti hypotézy i alternativy. Tím se zejména myslí, že budeme v obou případech znát její rozdělení. Testová statistika je ve většině případů pouze jednorozměrná náhodná veličina, tedy použitá transformace z  $n$  naměřených dat určitým způsobem (určitým vzorečkem) vyrobí pouze jedno číslo (realizaci testové statistiky).

Posledním krokem bude volba tzv. kritického oboru testu. Když víme, jaké rozdělení by měla mít testová statistika za platnosti hypotézy a za platnosti alternativy, můžeme se rozhodnout, zda realizovaná hodnota testové statistiky odpovídá spíše hypotéze či alternativě. To provedeme tak, že si pro předem zvolenou hladinu testu  $\alpha$  určíme interval, ve kterém bude za platnosti hypotézy s pravděpodobností  $1 - \alpha$  ležet realizovaná hodnota testové statistiky. Takovýto intervalů samozřejmě bude existovat nekonečně mnoho, my se ale budeme zajímat o takový interval, aby za platnosti alternativy ležela realizovaná hodnota testové statistiky v tomto intervalu s co nejmenší pravděpodobností. Doplněk tohoto intervalu budeme označovat jako kritický obor testu. Konečné rozhodnutí je potom jednoduché, pokud leží realizovaná hodnota testové statistiky v kritickém oboru, zamítneme hypotézu ve prospěch alternativy, pokud realizovaná hodnota testové statistiky neleží v kritickém oboru, nebudeme zamítat testovanou hypotézu.

Každý statistický test je tedy určen čtveřicí hypotéza, alternativa, testová statistika a kritický obor.

Je nutné si uvědomit, že testování hypotéz nedává jednoznačné odpovědi a kvůli náhodnosti měřených dat ani dávat nemůže. Vždy budeme pracovat na určité hladině spolehlivosti  $\alpha$  (obvykle se volí hladina  $\alpha = 0,05$ ) a všechny naše závěry tedy bude nutné interpretovat tak, že je pravděpodobnost  $\alpha$ , že jsme udělali chybu 1. druhu. O volbě hladiny spolehlivosti testů v konkrétních případech budeme mluvit

<sup>21</sup> Zejména je nutné si uvědomit, že opravdu nemáme žádný nástroj na přímé ověření, zda hypotéza platí. Jediné, co můžeme dělat, je otestovat tuto hypotézu oproti vhodné alternativě.

ještě v další části tohoto textu, nyní už si můžeme odvodit několik nejzákladnějších statistických testů.

### Jednovýběrový $t$ -test

Při jednovýběrovém  $t$ -testu předpokládáme, že měřená data mají normální rozdělení (s libovolnými parametry) a že jsou jednotlivá měření na sobě nezávislá. Jednovýběrový  $t$ -test testuje hypotézu, že měřená fyzikální veličina (tedy střední hodnota měřených dat) je rovna nějaké předem zvolené konstantě, oproti alternativně, že střední hodnota měřené náhodné veličiny této konstantě rovna není. Zkráceně se často píše

$$\begin{aligned} H : \mu_x &= \mu_0, \\ A : \mu_x &\neq \mu_0, \end{aligned}$$

kde  $\mu_x$  označuje skutečnou hodnotu střední hodnoty měřené náhodné veličiny (tuto hodnotu v praxi téměř nikdy neznáme),  $\mu_0$  označuje hypotetickou hodnotu střední hodnoty měřené náhodné veličiny (tuto hodnotu dopředu známe) a písmena  $H$ ,  $A$  označují hypotézu a alternativu.

Nyní si můžeme podrobně popsat odvození testové statistiky jednovýběrového  $t$ -testu. Vyjdeme z předpokladu, že za platnosti hypotézy bude mít transformace naměřených dat

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{S_n}, \quad (71)$$

kde  $\bar{x}_n$ , resp.  $S_n$ , označují výběrový průměr, resp. výběrovou směrodatnou odchylku, Studentovo rozdělení o  $n - 1$  stupních volnosti  $t_{n-1}$ . Tento fakt byl podrobně popsán v druhém dílu seriálu.

Nyní si stačí uvědomit, že za platnosti hypotézy bude pravděpodobnost, že testová statistika  $T_n$  nabyde hodnoty z intervalu

$$(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}, t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}), \quad (72)$$

rovna přesně  $1 - \alpha$ . Toto tvrzení vychází přímo z definice kvantilu Studentova rozdělení (podobný koncept už se používal v minulých dílech seriálu). Zároveň bude platit, že za platnosti alternativy bude s největší pravděpodobností hodnota testové statistiky výrazně odlišná od nuly. Toto je způsobeno tím, že  $\bar{x}_n$  bude pro velká  $n$  s největší pravděpodobností velice blízká skutečné střední hodnotě  $\mu_x$  a tím pádem bude čítec zlomku (71) s největší pravděpodobností velice blízký hodnotě

$$\Delta = \mu_x - \mu_0.$$

Jmenovatel zlomku (71) bude pro velká  $n$  s největší pravděpodobností velice blízký skutečné směrodatné odchylce. Tedy hodnota celého zlomku (71) bude pro velká  $n$  s největší pravděpodobností velice blízká hodnotě

$$\frac{\Delta}{\sigma} \neq 0.$$

Po přenásobení této hodnoty číslem  $\sqrt{n}$  potom bude hodnota testové statistiky  $T_n$  buď hodně velká, nebo hodně malá (hodně velké záporné číslo), každopádně bude s největší pravděpodobností výrazně odlišné od nuly. Tento poznatek nás opravňuje ke stanovení kritického oboru  $C$  jako doplňku intervalu (72), tedy jako sjednocení intervalů

$$C = (-\infty, t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty).$$

Na závěr k tomuto testu jen uvedme, že pokud nebude splněna podmínka na normální rozdělení měřených dat, bude tento test fungovat asymptoticky (tj. pro velký počet měření, cca víc než 30). Toto vychází z platnosti centrální limitní věty (viz minulý díl seriálu), díky níž bude mít testová statistika  $T_n$  pro velký počet měření přibližně rozdělení  $N(0, 1)$  a kvantily Studentova  $t_{n-1}$  rozdělení a rozdělení  $N(0, 1)$  budou pro takto velké  $n$  prakticky shodné.

Jen drobnou úpravou by se dal tento test upravit na testování dvojice hypotéza a alternativa v následujícím tvaru

$$H : \mu_x \geq \mu_0,$$

$$A : \mu_x < \mu_0.$$

V tomto případě bychom použili stejnou testovou statistiku  $T_n$ , ale volba kritického oboru by se mírně lišila. Podobným způsobem jako v případě klasického  $t$ -testu bude za předpokladu, že platí  $\mu_x > \mu_0$  (tj. za platnosti hypotézy<sup>22</sup>), hodnota testové statistiky pro velká  $n$  velmi velká (neboť hodnota zlomku bude s největší pravděpodobností kladná a po přenásobení členem  $\sqrt{n}$  bude hodnota testové statistiky velmi velká). Naopak za platnosti alternativy (tj. v případě, že platí  $\mu_x < \mu_0$ ) bude hodnota testové statistiky s největší pravděpodobností velké záporné číslo, což lze odvodit podobnou úvahou. Je tedy jasné, že pro velké hodnoty realizace testové statistiky hypotézu zamítat nebudeme a naopak pro velmi malé hodnoty (tj. velké záporné hodnoty) testové statistiky budeme zamítat hypotézu. Co jsou to ale ty „velmi malé hodnoty“? To lze odvodit na základě toho, jak se testová statistika (resp. její rozdělení) chová v hraničním případě, kdy platí  $\mu_x = \mu_0$ . Jak už bylo dříve odvozeno, testová statistika má v tomto případě Studentovo rozdělení o  $n - 1$  stupních volnosti  $t_{n-1}$ . Kritický obor tohoto testu tedy musíme zvolit tak, aby v tomto hraničním případě byla pravděpodobnost, že realizovaná hodnota testové statistiky bude ležet v kritickém oboru, rovna hladině testu  $\alpha$ . Kritický obor tedy bude mít tvar

$$C = (-\infty, t_{n-1, \alpha}),$$

čímž bude tato podmínka splněna a zároveň bude platit, že za platnosti alternativy pro velká  $n$  bude realizovaná hodnota testové statistiky s největší pravděpodobností ležet v kritickém oboru.

Opět platí, že tento test lze použít v případě, kdy měřená data nemají normální rozdělení, ale musíme se smířit s tím, že bude fungovat pouze asymptoticky. Je

<sup>22</sup>Ve skutečnosti se do platnosti hypotézy ještě vejde případ, kdy  $\mu_x = \mu_0$ , ale to budeme řešit ještě později.

vhodné ho použít jen v případě, kdy máme k dispozici alespoň 30 měření, jinak mohou jeho výsledky být nepřesné.

Analogickým způsobem by se dal tento test upravit pro testování hypotézy s opačnými znaménky nerovností (použili bychom stejnou testovou statistiku a hypotézu bychom zamítali pouze pro hodnoty realizované testové statistiky větší než  $t_{n-1,1-\alpha}$ ).

Na závěr jen uvedeme, že v praxi můžeme potkat tzv. pravidlo  $n\sigma$  (za  $n$  dosadíme čísla 1, 2, 3, ...). Toto pravidlo je vlastně jakýmsi ekvivalentním vyjádřením toho, co dělá  $t$ -test, a sice říká, že bychom měli hypotézu zamítat, pokud rozdíl hypotetické hodnoty a hodnoty odhadnuté z naměřených dat (tj. výběrového průměru) bude větší než  $s_n$ , případně  $2s_n, 3s_n \dots$ . Rozmyslete si sami, že rozhodování na základě tohoto pravidla je ekvivalentní  $t$ -testu pro speciální volby  $\alpha = 0,32$ , případně  $\alpha = 0,05$  atd.

### Dvouvýběrový $z$ -test

Dvouvýběrový  $z$ -test se použije v případech, kdy chceme porovnat hodnotu dvou měřených fyzikálních veličin<sup>23</sup>. Předpokládáme, že naměřená data budou mít tedy následující podobu:  $x_1, \dots, x_n$  je měření první veličiny a  $y_1, \dots, y_m$  je měření druhé veličiny. Předpokládáme, že jsou všechna měření na sobě nezávislá a neděláme žádné předpoklady o rozdělení měřených dat<sup>24</sup>.

Na základě těchto měření budeme chtít porovnat skutečné hodnoty těchto dvou fyzikálních veličin (které se rovnají středním hodnotám dvou měřených náhodných veličin, jak bylo ukázáno v předchozích dílech seriálu). Budeme chtít testovat hypotézu

$$H : \mu_x - \mu_y = \vartheta,$$

$$A : \mu_x - \mu_y \neq \vartheta,$$

kde  $\mu_x$  je skutečná střední hodnota 1. měřené náhodné veličiny (tedy hodnota první fyzikální veličiny) a  $\mu_y$  je skutečná hodnota 2. měřené náhodné veličiny (tedy hodnota druhé fyzikální veličiny).  $\vartheta$  představuje předem zvolenou konstantu, jejímž vhodným zvolením můžeme upravovat testovanou hypotézu (nejčastěji volíme  $\vartheta = 0$ , což odpovídá shodným hodnotám měřených fyzikálních veličin).

Nyní potřebujeme odvodit podobu testové statistiky. V minulém dílu seriálu jsme se zabývali vícerozměrnou verzí centrální limitní věty, kterou nyní použijeme (pokud jste zapomněli, co vícerozměrná CLV je, bylo by dobré si to připomenout). Nebudeme zde úplně podrobně popisovat dosazení do vícerozměrné centrální věty, pouze uvedeme, že pokud zvolíme funkci  $f$  jako

$$f(x, y) = x - y,$$

<sup>23</sup>Rozdíl oproti  $t$ -testu je ten, že v tomto případě obě fyzikální veličiny měříme, zatímco v případě  $t$ -testu jsme měřili jen jednu fyzikální veličinu a porovnávali ji s předem známou konstantou.

<sup>24</sup>Ve skutečnosti potřebujeme, aby měřená data měla konečný rozptyl. Tento předpoklad se ovšem v praxi nikdy neověřuje a pokládá se za splněný, proto se jím v tomto textu nebudeme dále zabývat.

dostaneme<sup>25</sup>, že za platnosti hypotézy platí

$$Z_{n,m} = \frac{\bar{x}_n - \bar{y}_m - \vartheta}{\sqrt{\frac{S_{n_x}^2}{n} + \frac{S_{m_y}^2}{m}}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

kde  $S_{n_x}^2$  označuje výběrový rozptyl měření odpovídající první fyzikální veličině,  $S_{m_y}^2$  označuje výběrový rozptyl měření odpovídající druhé fyzikální veličině a  $\bar{x}_n$ ,  $\bar{y}_m$  označují příslušné výběrové průměry.

Naprostou stejnou úvahou jako v případě  $t$ -testu dojdeme k závěru, že za platnosti alternativy bude testová statistika s největší pravděpodobností nabývat velmi velkých kladných nebo záporných hodnot. Kritický obor  $z$ -testu je tedy optimální zvolit jako

$$C = (-\infty, u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty),$$

kde  $u$  označuje kvantil normálního rozdělení  $N(0, 1)$ . Takováto volba kritického oboru zajistí, že za platnosti hypotézy bude pravděpodobnost, že realizovaná hodnota testové statistiky bude ležet v kritickém oboru, právě  $\alpha$  (tj. pravděpodobnost chyby 1. druhu bude za platnosti hypotézy rovna  $\alpha$ ). Zároveň bude pro velký počet měření (myšleno pro velké  $m$  i  $n$ ) pravděpodobnost, že za platnosti alternativy padne realizovaná hodnota testové statistiky do kritického oboru, velká. Kritický obor je tedy zvolen optimálně.

Velice jednoduše by šel  $z$ -test upravit pro jednostrannou hypotézu a alternativu, tedy pro testování hypotézy a alternativy ve tvaru

$$H : \mu_x - \mu_y \geq \vartheta,$$

$$A : \mu_x - \mu_y < \vartheta.$$

Stačilo by použít stejný princip jako v případě  $t$ -testu. Pokud by byla znaménka nerovností opačná, také by nebyl problém  $z$ -test příslušně modifikovat.

### $\chi^2$ test rozptylu<sup>26</sup>

$\chi^2$  test rozptylu použijeme ve chvíli, kdy chceme otestovat, že rozptyl měřených dat je roven nějaké předem známé konstantě  $\sigma_0^2$ . Hypotéza a alternativa budou tedy vypadat následovně

$$H : \sigma_x^2 = \sigma_0^2,$$

$$A : \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2,$$

kde  $\sigma_x^2$  představuje skutečnou hodnotu rozptylu našich měřených dat.

Pro tento test je důležitý předpoklad toho, že naše měřená data mají normální rozdělení (s libovolnými parametry  $\mu$  a  $\sigma^2$ ). Bez tohoto předpokladu tento test nefunguje<sup>27</sup> (ani asymptoticky) a nemůžeme ho tedy používat.

<sup>25</sup>Pozorný čtenář by si měl toto tvrzení detailně rozmyslet (sám odvodit). Je potřeba použít předpoklad o nezávislosti měřených dat.

<sup>26</sup>Toto řecké písmeno se vyslovuje [chi:], a název testu se obvykle vyslovuje jako  $\chi$  kvadrát test.

<sup>27</sup>Ve většině případů v praxi je předpoklad o normalitě měřených dat oprávněný.

Jako testovou statistiku zvolíme následující transformaci měřených dat

$$CH_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2},$$

kde  $S_n^2$  je výběrový rozptyl a  $n$  je počet měření. Vzhledem k rozsahu tohoto textu není v našich silách podrobně vysvětlit, proč je zrovna tato volba testové statistiky nejhodnější, ani nezvládneme podrobně odvodit, jaké má za platnosti hypotézy rozdělení. Na tomto místě proto jen uvedeme fakt, že testová statistika  $CH_n$  má za platnosti hypotézy rozdělení  $\chi_{n-1}^2$  (čti  $\chi$  kvadrát o  $n-1$  stupních volnosti).

Rozdělení  $\chi_k^2$  je dalším často se vyskytujícím absolutně spojitým rozdělením. Jeho hustota pravděpodobnosti má příliš komplikovaný tvar na to, abychom ji zde uváděli, také by to nemělo příliš smysl. Pro naše účely se spokojíme s tím, že si v tabulkách můžeme najít kvantily tohoto rozdělení, které budeme značit  $\chi_k^2(\alpha)$ , kde  $\alpha$  značí hladinu ( $\in (0, 1)$ ) a  $k$  značí počet stupňů volnosti rozdělení. Doporučujeme každému čtenáři, aby si v matematickém softwaru vykreslil graf hustoty pravděpodobnosti rozdělení  $\chi_k^2$  pro různé hodnoty stupňů volnosti  $k$ , aby získal představu o tom, jak takováto hustota vypadá a jak se mění v závislosti na počtu stupňů volnosti.

Nyní už k volbě kritického oboru. Lze snadno nahlédnout, že za platnosti hypotézy bude realizovaná hodnota testové statistiky s největší pravděpodobností blízká hodnotě  $n-1$ . To plyne z faktu, že výběrový rozptyl  $S_n^2$  bude s největší pravděpodobností pro velký počet měření nabývat hodnot blízkých skutečnému rozptylu  $\sigma_0^2$ . Zlomek  $\frac{S_n^2}{\sigma_0^2}$  tedy bude s největší pravděpodobností pro velký počet měření nabývat hodnot blízkých 1. Pokud bude platit alternativa, bude testová statistika nabývat buď výrazně menších hodnot než  $n-1$  (v případě, že  $\sigma^2 < \sigma_0^2$ ), nebo výrazně větších hodnot než  $n-1$  (v případě, že  $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ). Kritický obor bude proto zvolen následovně<sup>28</sup>

$$C = \left(0, \chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(\chi_{n-1}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \infty\right).$$

Takto zvolený kritický obor bude mít opět všechny požadované vlastnosti.

Tento test by se opět dal velice jednoduše upravit pro případ jednostranné hypotézy a alternativy.

### *Několik poznámek ke konstrukci a interpretaci výsledků testů*

Na konec uvedme několik krátkých poznámek.

- Pokud nějaký test zamítá hypotézu, můžeme tvrdit, že hypotéza nejspíš neplatí (z konstrukce testu víme, že pokud proneseme takovýto výrok, budeme se mýlit jen v  $\alpha$  procentech případů). Musíme ale mít stále na paměti možnost, že jsme mohli udělat chybu 1. druhu, tedy nemůžeme nic najisto tvrdit!

---

<sup>28</sup>Testová statistika může z definice nabývat jen kladných hodnot, proto nemá smysl do kritického oboru zařazovat záporné hodnoty.

- Pokud test nezamítá hypotézu, je interpretace výsledku ještě složitější. Bud to znamená, že hypotéza skutečně platí, nebo to znamená, že sice platí alternativa, ale naměřili jsme data, pro která hypotézu nezamítáme (udělali jsme tedy chybu 2. druhu). S chybou druhého druhu je to poněkud složitější, neboť nemáme pod kontrolou, jaká je pravděpodobnost chyby 2. druhu za platnosti alternativy. Správnou volbou kritického oboru můžeme zajistit, že za platnosti alternativy bude pravděpodobnost chyby 2. druhu co možná nejmenší a pro velký počet měření bude konvergovat k nule, ale jaká tato pravděpodobnost v konkrétním případě bude, nevíme<sup>29</sup>.

Představme si například, že chceme  $t$ -testem otestovat hypotézu

$$H : \mu_x = 0,$$

$$A : \mu_x \neq 0,$$

ale skutečná střední hodnota měřených dat je například  $\mu_x = 0,000\,000\,01$ . Technicky bychom mohli říci, že platí alternativa, ale nemůžeme očekávat, že pokud nebudeme mít opravdu hodně měření, že nám  $t$ -test vyjde ve prospěch alternativy. Proto je nutné být velice opatrný při interpretaci výsledků statistických testů, zejména v případech, že výsledkem je nezamítnutí hypotézy.

- Postavení hypotézy a alternativy není rovnocenné. Pokud je to možné, je vždy lepší volit za alternativu to tvrzení, které bychom chtěli potvrdit. Jak je psáno výše, kde je rozebírána interpretace výsledků testů, v případě zamítnutí hypotézy potom máme větší právo tvrdit, že jsme opravdu potvrdili správnost našeho tvrzení (neboť jsme přesvědčivě vyvrátili opačné tvrzení). Je nutné poznamenat, že vzhledem ke konstrukci testů nelze takovéto možnosti vždy dosáhnout, potom se musíme spokojit s opačnou volbou hypotézy a alternativy.
- Volba hladiny testu  $\alpha$  je velice důležitá a je nutné ji provést před provedením každého testu. Její volba závisí na tom, jak chceme mít vyváženou pravděpodobnost chyby 1. a 2. druhu. Hladina spolehlivosti testu  $\alpha$  je přímo rovna pravděpodobnosti chyby 1. druhu. Pokud hladinu testu zvolíme malou, budeme mít malou pravděpodobnost chyby 1. druhu, ale naopak větší pravděpodobnost chyby 2. druhu. To souvisí s tím, že pro malé hodnoty  $\alpha$  bude kritický obor každého testu menší než pro velké hodnoty  $\alpha$  (rozmyslete si sami). Obvykle se volí hladina spolehlivosti rovna  $\alpha = 0,05$ . Pokud děláme nějaký důležitý experiment, kde opravdu záleží na správnosti závěrů, snažíme se pravděpodobnost chyby 1. druhu co nejvíce omezit, volíme tedy menší hladinu spolehlivosti (typicky  $\alpha = 0,01$  nebo  $\alpha = 0,005$ ). Při řešení seriálové úlohy pracujte s hladinou spolehlivosti  $\alpha = 0,05$ .

<sup>29</sup>Ve skutečnosti ve většině případů je možné pravděpodobnost chyby 2. druhu vyčíslit, ale je to příliš náročné na to, abychom se tím podrobněji zabírali.

### Zamítání hypotézy na základě $p$ -hodnoty

Doteď jsme rozhodovali o zamítání hypotézy na základě realizované hodnoty testové statistiky a kritického oboru (pokud realizovaná hodnota testové statistiky ležela v kritickém oboru, zamítali jsme hypotézu). Tento postup je velice intuitivní a snadno představitelný, ale jeho nevýhoda je, že máme jen malou informaci o tom, zda jsme hypotézu (ne)zamítali s rezervou, nebo zda se pohybujeme na hranici mezi zamítáním a nezamítáním hypotézy. Proto se pro každý statistický test a konkrétní naměřená data definuje tzv.  $p$ -hodnota, která slouží jako alternativa k rozhodování o (ne)zamítání hypotézy.  $p$ -hodnotu testu pro konkrétní naměřená data definujeme jako takové  $p$ , že realizovaná hodnota testové statistiky leží právě na hranici kritického oboru pro hladinu  $p$ .  $p$ -hodnotu lze také interpretovat jako pravděpodobnost, že bychom za platnosti hypotézy naměřili data, která protirečí hypotéze ještě více než ta data, která máme naměřená. Rozmyslete si sami, že definice  $p$ -hodnoty a její interpretace dávají smysl.

Rozhodování o zamítnutí hypotézy na základě  $p$ -hodnoty je jednoduché, stačí porovnat  $p$ -hodnotu se zvolenou hladinou testu  $\alpha$ . Pokud je  $p$ -hodnota menší než hladina testu  $\alpha$ , zamítáme hypotézu, neboť to znamená, že jsme naměřili (za platnosti hypotézy) opravdu extrémní data.

Většina moderních matematických programů (včetně  $R$ , které používáme) preferuje rozhodování na základě  $p$ -hodnoty, kterou poskytuje jako výstup. Naopak kritický obor většinou nebývá ve standardním výstupu matematických programů uváděn.

### Další statistické testy

V tomto díle seriálu jsme uvedli jen několik základních typů statistických testů, ve skutečnosti jich existuje mnohem více. Pokud během fyzikálních experimentů narazíte na nějakou hypotézu, kterou potřebujete pomocí naměřených dat otestovat, je velice pravděpodobné, že na to bude existovat speciální statistický test. Stačí si ho vyhledat na internetu. Pro použití statistického testu v praxi ani není nutné znát přesnou podobu testové statistiky, kritického oboru ani přesně vědět, jak tento test funguje, neboť tyto věci za nás většinou spočte matematický software. Jediné, čemu je opravdu potřeba rozumět, je hlavní idea testování hypotéz, správně pochopit předpoklady tohoto testu a umět interpretovat výsledky (zejména na základě  $p$ -hodnoty). Pro informaci zde ještě uvedeme několik statistických testů včetně jejich předpokladů. Pokud byste některý chtěli v praxi použít, stačí si ohlídat splnění všech jeho předpokladů a umět interpretovat jeho výsledky na základě  $p$ -hodnoty.

#### $\chi^2$ test dobré shody rozdělení

Tento test se použije v případě, že chceme otestovat, zda měřená data pocházejí z určitého diskrétního rozdělení se známými parametry (je důležité, aby toto rozdělení bylo diskrétní, v případě spojitého rozdělení by se použil Kolmogorovův-Smirnovův test, který popíšeme později). Předpokládejme, že máme nějaké známé



diskrétní rozdělení  $R$ . Pomocí  $\chi^2$  testu dobré shody rozdělení můžeme otestovat následující hypotézu a alternativu

$$\begin{aligned} H &: \text{měřená data mají rozdělení } R, \\ A &: \text{měřená data nemají rozdělení } R. \end{aligned}$$

Pokud bychom neznali všechny parametry rozdělení  $R$  (například bychom věděli, že se jedná o Poissonovo rozdělení, ale neznali bychom parametr  $\lambda$ ), můžeme si tyto neznámé parametry odhadnout z naměřených dat a použít je v našem testu, který bude fungovat i po této drobné modifikaci.

#### *Kolmogorovův-Smirnovův test*

Tento test se použije v případě, že chceme otestovat, zda měřená data pocházejí z určitého spojitého rozdělení se známými parametry (je důležité, aby toto rozdělení bylo spojitě, v opačném případě musíme použít  $\chi^2$  test dobré shody rozdělení). Předpokládejme, že máme nějaké známé spojitě rozdělení  $S$ . Pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu můžeme otestovat následující hypotézu a alternativu

$$\begin{aligned} H &: \text{měřená data mají rozdělení } S, \\ A &: \text{měřená data nemají rozdělení } S. \end{aligned}$$

Opět platí, že pokud neznáme všechny parametry rozdělení  $S$ , můžeme je odhadnout z naměřených dat a tento test bude stále fungovat.

#### *Dvouvýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test*

Tento test předpokládá, že máme 2 nezávislé sady měření, které obě pocházejí z nějakých spojitých rozdělení, a chceme otestovat hypotézu, že obě tyto sady měření mají stejné rozdělení. Pokud označíme teoretické rozdělení první sady měřených dat jako  $X$  a teoretické rozdělení druhé sady dat jako  $Y$ , potom dvouvýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test testuje následující hypotézu a alternativu

$$\begin{aligned} H &: X \text{ a } Y \text{ mají stejná rozdělení,} \\ A &: X \text{ a } Y \text{ nemají stejná rozdělení.} \end{aligned}$$

#### *Test korelačního koeficientu*

Tento test použijeme ve chvíli, kdy máme 2 nezávislé sady měření, které mají obě normální rozdělení, a chceme otestovat, zda korelace mezi nimi je nulová nebo nikoliv. Pokud označíme jako  $X$  teoretické rozdělení první sady měření, jako  $Y$  teoretické rozdělení druhé sady měření a jako  $\rho$  označíme jejich korelační koeficient, tedy

$$\rho = \text{corr}(X, Y),$$

potom test korelačního koeficientu testuje následující hypotézu oproti alternativě

$$\begin{aligned} H &: \rho = 0, \\ A &: \rho \neq 0. \end{aligned}$$

Jen poznamenejme, že pro tento test je opravdu podstatný předpoklad o normálním rozdělení a nezávislosti měřených dat.

## Úloha IV.S ... testovací

10 bodů

- Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu a jak se používá testování hypotéz (postačí vlastními slovy popsat následující: hypotéza a alternativa, chyba 1. a 2. druhu, hladina testu, testová statistika, kritický obor testu,  $p$ -hodnota testu pro konkrétní naměřená data). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- V přiloženém datovém souboru *testovani1.csv* najdete naměřené hodnoty určité fyzikální veličiny. Pomocí jednovýběrového  $t$ -testu otestujte, zda je skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny rovna 20. Dále předpokládejme, že je naším cílem ukázat, že hodnota měřené fyzikální veličiny je větší než 20. Použijte vhodnou jednostrannou modifikaci  $t$ -testu k tomu, abyste toto tvrzení ověřili (dejte si pozor na správné zvolení hypotézy a alternativy).
- V přiloženém datovém souboru *testovani2.csv* najdete naměřené hodnoty 2 různých fyzikálních veličin. Představujme si, že se jedná o měření stejné fyzikální charakteristiky ale za různých vnějších podmínek (teplota, tlak atd.). Pomocí dvouvýběrového  $z$ -testu otestujte hypotézu, že hodnota této fyzikální charakteristiky je pro obě volby vnějších podmínek stejná.
- Použijte stejná data jako v seriálové úloze z první série a pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu určete, který ze 4 vzorků dat pochází z normálního rozdělení a který vzorek pochází z exponenciálního rozdělení.

*Bonus* Předpokládejte, že máte k dispozici měření 2 fyzikálních veličin (tedy 2 sady naměřených hodnot), kde jsou všechna měření na sobě nezávislá. Odvoďte upravený dvouvýběrový  $z$ -test, který by testoval hypotézu, že skutečná hodnota první měřené fyzikální veličiny je dvojnásobek skutečné hodnoty druhé měřené fyzikální veličiny. Pro udělení bodů je nutné a postačuje odvodit podobu testové statistiky a kritického oboru. (*Nápověda:* Použijte vícerozměrnou verzi CLV, kde vhodně zvolíte funkci  $f$ , a dále postupujte analogicky jako u odvození klasického dvouvýběrového  $z$ -testu)

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí  $R$ . Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka  $R$ . (řešení str. 228)

## Kapitola 5: Seriál - Zpracování dat 5. díl

V tomto díle seriálu se budeme věnovat nepřímému měření fyzikálních veličin a prokládání naměřených dat teoretickou závislostí, čili, jak by řekl matematik, regresi (v tomto díle zatím jen lineární regresi), případně, jak by řekl fyzik, fitování.

Základní problém, kterým se budeme v tomto díle (vlastně i v tom příštím) seriálu zabývat je takový problém, kdy máme naměřená dvojrozměrná data, tedy dvojice  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  a chceme mezi nimi najít nějakou funkční závislost  $f$  (jak závisí  $y$  na  $x$ ). Můžeme rozlišovat mezi dvěma hlavními cíli hledání funkční

závislosti. Buď chceme pomocí nalezení funkční závislosti nepřímou změřit určitou fyzikální veličinu nebo chceme naměřenými daty v grafu pro názornost proložit teoretickou závislost. V obou těchto případech budeme potřebovat nějaký matematický model pro naše data.

### Základní model - Lineární regrese

V našem základním modelu budeme uvažovat prokládanou funkci  $f$  pouze ve tvaru

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 f_1(x) + \dots + \beta_k f_k(x),$$

kde  $f_1, \dots, f_k$  jsou známé zvolené funkce a  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  jsou neznámé regresní koeficienty, které budeme chtít odhadovat. Na začátku statistického zpracování dat vždy musíme zvolit prokládanou funkci (pomocí volby funkcí  $f_1, \dots, f_k$ ), o tom, jak ji správně zvolit, bude ještě řeč.

Nyní si musíme popsat model, kterým budeme popisovat naše naměřená data. Budeme si představovat, že naše data byla vygenerována podle následujícího vztahu

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 f_1(x_i) + \dots + \beta_k f_k(x_i) + \varepsilon_i,$$

kde  $f_1, \dots, f_k$  jsou známé prokládané funkce,  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  jsou neznámé regresní koeficienty, které budeme chtít odhadovat, a  $\varepsilon_i$  představuje náhodné nepřesnosti měření (tedy  $\varepsilon_i$  je realizace náhodné veličiny a ostatní členy jsou deterministické, i když z části neznámé). V základním modelu budeme uvažovat, že  $\varepsilon_i$  mají rozdělení  $N(0, \sigma^2)$  a že jsou pro různá měření nezávislá. Ve vztahu k teorii vyložené v prvních 4 dílech seriálu si můžeme představovat, že klasicky měříme fyzikální veličinu, jejíž hodnota je ovšem závislá na proměnné  $x$ .

Tento základní model se nazývá lineární regresní model<sup>30</sup>. V tomto díle seriálu budeme pracovat pouze s tímto modelem, který se také nejčastěji v praxi použije, nelineární regresní modely si popíšeme v příštím díle seriálu.

V tomto základním modelu budeme uvažovat, že hodnoty proměnné  $x$  jsou nám známé přesně, tedy bez nepřesností měření. Toto není vždy úplně oprávněný předpoklad, v praxi bývá někdy porušen, jak postupovat v tomto složitějším případě si ale popíšeme až v příštím díle seriálu.

### Volba prokládané funkce

Většinou jsme v situaci, kdy máme naměřená nějaká data (tedy dvojice  $(x_i, y_i)$ ) a potřebujeme jimi proložit nějakou funkci, ale nevíme jakou. Volba správné prokládané funkce je velmi důležitá a proto zde v krátkosti popíšeme, jak by se mělo správně postupovat.

Každá prokládaná funkce by měla mít jasnou fyzikální interpretaci a fyzikální opodstatnění. Měli bychom se vždy zamyslet, jaký teoretický vztah by měla naše

<sup>30</sup>Na tomto místě musíme vyvrátit jeden rozšířený mýtus, a sice že lineární regrese znamená pouze prokládání přímkou naměřenými daty. Je vidět, že prokládání přímkou lze dosáhnout speciální volbou parametrů v popsaném lineárním regresním modelu (zvolit  $k = 1$  a  $f_1(x) = x$ ), ale je nutné si uvědomit, že název lineární regrese odkazuje k linearitě vzhledem k neznámým koeficientům  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ , nikoliv k linearitě prokládané funkce (funkce  $f_i$  mohou být a často jsou nelineární, např. sin, cos, exponenciála, logaritmus, polynom atd.).

naměřená data splňovat a takovou funkci jimi prokládat. Pokud budeme postupovat jinak, je veliké nebezpečí, že zvolíme špatnou prokládanou funkci (o tom, jak poznat, že jsme zvolili špatnou funkci, si povíme později) a budeme muset začít od znova, neboť by všechny naše výsledky byly nesprávné.

### Odhadování parametrů

Když jsme si popsali základní model, který budeme používat, můžeme začít odvozovat, jak bude odhad neznámých parametrů  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  vypadat. K odhadu parametrů použijeme metodu nejmenších čtverců.

#### Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců určí odhad parametrů  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  (odhady značíme tak, že přidáme stříšku např.  $\hat{\beta}_i$ ) tak, že za odhady těchto parametrů vezme taková čísla, aby byl součet čtverců odchylek naměřených hodnot od odhadnuté hodnoty prokládané funkce co možná nejmenší. Matematicky zapsáno, metoda nejmenších čtverců se snaží odhadnout regresní parametry tak, aby výraz

$$\sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 f_1(x_i) - \dots - \hat{\beta}_k f_k(x_i) \right)^2$$

byl co možná nejmenší. Intuitivní vysvětlení, proč postupujeme právě takto je, že se snažíme, aby proložená funkce procházela co nejlíže naměřeným hodnotám (vzdálenost v tomto případě měříme jako druhou mocninou rozdílu naměřené hodnoty a proložené funkce). Výraz uvnitř závorky se označuje jako reziduum a značí se  $U_i$ . Residuum je rozdíl mezi naměřenou hodnotou a proloženou závislostí.

Není úplně zřejmé, proč chceme minimalizovat právě druhou mocninu residuů, mohli bychom minimalizovat třeba absolutní hodnotu residuů nebo absolutní hodnotu ze třetí mocniny nebo zvolit nějakou jinou váhovou funkci. Vysvětlení není úplně triviální, trochu zjednodušené vysvětlení může být takové, že druhá mocnina zvýrazní velmi odlehlá měření, ale zároveň příliš neupozadí neodlehlá měření (tj. chceme odhadnout regresní koeficienty tak, abychom neměli žádné měření příliš odlehlé od proložené závislosti). Toto vysvětlení je trochu nepřesné, existuje i lepší vysvětlení, které zde uvedeme.

#### Metoda maximální věrohodnosti<sup>31</sup>

Odhady parametrů metodou maximální věrohodnosti na základě naměřených dat fungují na tom principu, že za odhad parametrů vždy vezmeme takové hodnoty parametrů, které maximalizují pravděpodobnost naměření takových dat, které jsme zrovna v našem případě naměřili. Když budeme uvažovat všechny výše popsané předpoklady (tedy navzájem nezávislé nepřesnosti měření  $\varepsilon_i$  s rozdělením  $N(0, \sigma^2)$ ), můžeme si napsat, jak vypadá hustota pravděpodobnosti v závislosti na

<sup>31</sup>Toto už je opravdu pokročilé téma, pokud chcete (nebo pokud se vám tento odstavec nepodaří pochopit) můžete tento odstavec bez obav přeskočit, na pochopení dalších částí to nebude mít vliv.

neznámých parametrech. Jelikož jsou jednotlivá měření na sobě nezávislá, výsledná sdružená ("vícerozměrná") hustota pravděpodobnosti bude součin jednotlivých hustot pravděpodobnosti. Matematicky zapsáno sdružená hustota pravděpodobnosti  $L$  ( $L$  z anglického likelihood, česky věrohodnost) vypadá následovně

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \sigma^2, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) &= \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\beta_0 + \beta_1 f_1(x_i) + \dots + \beta_k f_k(x_i) - y_i)^2}{\sigma^2}}, \end{aligned}$$

neboť náhodná veličina  $Y_i$  představující výsledek jednoho měření příslušný hodnotě nezávisle proměnné  $x_i$  má rozdělení  $N(\beta_0 + \beta_1 f_1(x_i) + \dots + \beta_k f_k(x_i), \sigma^2)$ . Chceme najít takové hodnoty parametrů  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ , které tuto věrohodnost maximalizují. Abychom lépe viděli, jak tyto parametry zvolit, je výhodné si tento výraz upravit<sup>32</sup>, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \sigma^2, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) &= \\ &= \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\beta_0 + \beta_1 f_1(x_i) + \dots + \beta_k f_k(x_i) - y_i)^2}{\sigma^2}}, \end{aligned}$$

Nyní se musíme pokusit odvodit, jak zvolit parametry  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ , aby byla hodnota věrohodnosti  $L$  co možná největší. Na začátek si můžeme všimnout, že tyto parametry vystupují pouze v exponentu, nikde jinde, tudíž nám stačí zabývat se jen členem s exponentem. Chceme tedy maximalizovat hodnotu exponentu (protože exponenciála je rostoucí funkce, tedy čím větší exponent tím větší hodnota exponenciály), tedy chceme mít co největší hodnotu členu

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 f_1(x_i) + \dots + \beta_k f_k(x_i) - y_i)^2.$$

Nyní si musíme všimnout, že člen  $-\frac{1}{2\sigma^2}$  je nezávislý na našich koeficientech, stačí nám tedy zabývat se pouze sumou. Nakonec si musíme všimnout, že celý tento člen bude mít vždy záporné znaménko, takže bude maximální právě, když bude suma minimální. Chceme tedy, aby výraz

$$\sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 f_1(x_i) + \dots + \beta_k f_k(x_i) - y_i)^2$$

byl co možná nejmenší. Toto nás ale vede na minimalizaci součtu druhých mocnin residuí, tedy na metodu nejmenších čtverců (pokud vnitřek závorky vynásobíme  $-1$  nic to nezmění díky druhým mocnině).

Ukázali jsme tedy, že odhad metodou maximální věrohodnosti, který má jasnou intuitivní interpretaci, se v tomto případě shoduje s odhadem metodou nejmenších čtverců, čímž jsme získali hlubší pochopení toho, proč odhadovat parametry metodou nejmenších čtverců.

<sup>32</sup>Používáme známého vzorce  $e^a e^b = e^{a+b}$ .

### Výpočetní aspekty odhadu parametrů

Nyní jsme si popsali, jakým způsobem budeme chtít parametry  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  odhadovat, ale slušelo by se i stručně zmínit postup výpočtu, který k tomu povede. V praxi budeme všechny tyto odhady počítat za použití počítače, nicméně nikdy neuškodí vědět, jak přesně to počítač počítá. Jak později (a v zadání úloh) poznáme, v praxi se tato znalost občas také hodí. Existuje mnoho způsobů, jak se lze dobrat hodnot koeficientů  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ , my zde uvedeme dva nejběžnější. Je zcela evidentní, ale mnohdy se na to zapomíná a je důležité si to uvědomovat, že odhady regresních parametrů závisí na zformulovaném modelu (tedy na volbě prokládané funkce) a na naměřených datech (v určitých chvílích bude výhodné chápat odhad regresních parametrů jako transformaci naměřených dat).

Prvním možným postupem je použití diferenciálního počtu<sup>33</sup>, kdy parciálně zderivujeme sumu čtverců podle všech proměnných  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ , tyto parciální derivace položíme rovny nule a snažíme se vyřešit vzniklou soustavu rovnic (obecný postup hledání extrémů funkcí), která má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 f_1(x_i) + \dots + \beta_k f_k(x_i) - y_i)^2 &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_k} \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 f_1(x_i) + \dots + \beta_k f_k(x_i) - y_i)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava rovnic se v obecném případě neřeší úplně lehce, proto je lepší použít druhou metodu výpočtu odhadů koeficientů.

Druhá metoda, která je asi výpočetně schůdnější, je založena na lineární algebře<sup>34</sup>. Pokud si sestavíme následující matici (někdy se jí říká matice modelu) a vektor naměřených dat

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & f_1(x_1) & \dots & f_k(x_1) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & \dots & f_k(x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

potom je odhad koeficientů  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k)^T$  určen následující identitou<sup>35</sup>

$$\hat{\beta} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y},$$

kde  $T$  značí transpozici matice a  $^{-1}$  značí inverzní matici.

<sup>33</sup>Pokud neznáte diferenciální počet nezuoufejte, pokud tuto pasáž přeskočíte, nepřijdete o nic podstatného.

<sup>34</sup>Pokud nejste v lineární algebře (transponování, násobení a invertování matic) příliš zběhlí, nevádí, můžete tuto část textu přeskočit, pro další pochopení to nebude vadit.

<sup>35</sup>V extrémním případě by se mohlo stát, že inverzní matice nebude existovat (pokud by matice  $\mathbb{X}^T \mathbb{X}$  nebyla regulární, což se ale v praxi nestává), potom bychom tuto metodu použít nemohli.

### Vlastnosti odhadů

Výše jsme si odvodili, jak odhadovat regresní parametry  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ . Použitím metody nejmenších čtverců za pomoci počítače jsme schopni najít odhady těchto parametrů, které budeme dále značit  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$ , nyní si povíme něco o jejich vlastnostech.

Dopředu upozorňujeme, že všechna odvození v této kapitole budou pouze naznačená a že není nutné snažit se je detailně pochopit (i když pilnosti se meze nekladou). Pro fyzika je spíše důležité a plně postačující mít obecné povědomí o teoretických odvozeních a současně vědět, jak se tyto metody aplikují na konkrétní řešené problémy.

### Intervalové odhady pro jednotlivé parametry

Podobně jako jsme konstruovali intervalové odhady v případě, kdy jsme měřili jen jednu fyzikální veličinu (viz 2. a 3. díl seriálu), můžeme i nyní zkonstruovat intervalové odhady pro jednotlivé regresní koeficienty. Vyjdeme z tvrzení<sup>36</sup>, že pro následující vhodnou transformaci naměřených dat platí

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{S^2 v_{j,j}}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

kde  $\hat{\beta}_j$  je odhad regresního koeficientu metodou nejmenších čtverců,  $\beta_j$  je skutečná (pro nás v praxi neznámá) hodnota regresního koeficientu,  $v_{j,j}$  je prvek na místě  $(j, j)$  v matici  $(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}$  a člen  $S^2$  je určen vztahem

$$S^2 = \frac{1}{n - k - 1} \sum_{i=1}^n U_i^2,$$

kde  $U_i$  jsou residua v našem lineárním regresním modelu. Tento vztah nám velmi připomíná vztah, ze kterého jsme odvozovali intervalové odhady v případě měření jedné fyzikální veličiny (odlišné jsou jen členy ve jmenovateli zlomku), můžeme tedy naprosto stejným způsobem odvodit intervalový odhad i pro skutečnou hodnotu regresních koeficientů. Vyjdeme ze vztahu, že asymptoticky (tj. pro velký počet měření, později bude upřesněno, co to znamená velký počet měření) platí pro libovolnou hladinu spolehlivosti  $\alpha \in (0, 1)$

$$P \left( u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{S^2 v_{j,j}}} < u_{1 - \frac{\alpha}{2}} \right) \doteq 1 - \alpha.$$

Z tohoto vztahu algebraickými úpravami (analogicky jako v případě intervalových odhadů pro jednu měřenou fyzikální veličinu) dostaneme, že platí

$$P \left( \beta_j \in \left( \hat{\beta}_j \pm u_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sqrt{S^2 v_{j,j}} \right) \right) \doteq 1 - \alpha.$$

<sup>36</sup>Odvození tohoto tvrzení je dosti náročné, proto ho zde nebudeme uvádět.

Toto je intervalový odhad pro skutečnou hodnotu regresního koeficientu  $\beta_j$ , tento intervalový odhad se zkráceně zapisuje jako

$$\widehat{\beta}_j \pm \sqrt{S^2 v_{j,j}}$$

a člen  $\sqrt{S^2 v_{j,j}}$  se nazývá nejistota měření regresního koeficientu<sup>37</sup> (neplést s chybou měření regresního koeficientu<sup>38</sup>).

Na konec tohoto odstavce jen poznamenejme, že člen  $S^2$  je odhadem rozptylu našich měření  $\sigma^2$  (tj. pro velký počet měření bude hodnota členu  $S^2$  s největší pravděpodobností velice blízka skutečné hodnotě rozptylu  $\sigma^2$ ) a je označován jako střední čtvercová chyba<sup>39</sup>. Dále je dobré poznamenat, že čím více měření provedeme, tím menší bude hodnota členu  $v_{j,j}$  a tím pádem budeme mít užší intervalový odhad, tedy budeme mít regresní koeficient určen přesněji (odvození tohoto tvrzení už je ale nad možností tohoto seriálu).

### Bodový odhad prokládané funkce

Nyní jsme si odvodili, jak vypadají intervalové odhady pro jednotlivé parametry  $\beta_j$ . Na začátku jsme popsali, že někdy je naším cílem také proložit naměřenými daty odhadnutou závislost, čemuž se budeme teď věnovat. Jako bodový odhad funkční závislosti (což lze chápat jako nejpravděpodobnější tvar prokládané funkce) vezmeme jednoduše funkci  $\widehat{f}$  ve tvaru

$$\widehat{f}(x) = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 f_1(x) + \dots + \widehat{\beta}_k f_k(x),$$

kde  $\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \dots, \widehat{\beta}_k$  představují odhady regresních koeficientů získané metodou nejmenších čtverců. Tento odhad má opět tu vlastnost, že pro velký počet měření bude tato funkce s největší pravděpodobností velmi podobná skutečné funkční závislosti měřených dat (ve smyslu, že proložená křivka a skutečná teoretická křivka budou téměř identické).

Tento odhad se obvykle zakresluje do grafu jako proložená křivka. Je sice pěkné, že víme, jak bodově odhadovat prokládanou funkci, ale musíme si uvědomit, že to je poměrně málo. Musíme si ještě ukázat, jak vypadá intervalový odhad pro funkční hodnoty v jednotlivých bodech, abychom měli představu s jakou nejistotou jsme prokládanou funkci určili.

### Intervalový odhad prokládané funkce

Podobně jako můžeme konstruovat intervalové odhady pro měření jedné fyzikální veličiny a pro regresní koeficienty, můžeme také konstruovat intervalové odhady pro hodnotu prokládané funkce. Při konstrukci intervalového odhadu pro hodnotu prokládané funkce v bodě  $x$  vyjdeme z toho, že platí

$$\frac{\widehat{f}(x) - f(x)}{\sqrt{S_n^2 \mathbf{x}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{x}}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

<sup>37</sup> Anglicky standard error (zkráceně S.E.).

<sup>38</sup> Význam stejný jako u měření jedné fyzikální veličiny (viz 2. díl seriálu).

<sup>39</sup> Anglicky mean square error (zkráceně MSE).



kde  $f(x)$  je skutečná hodnota teoretické funkční závislosti v bodě  $x$ , vektor  $\mathbf{x}$  je definován jako  $\mathbf{x} = (1, f_1(x), \dots, f_k(x))^T$  a ostatní členy jsou stejné jako v předchozím textu. Analogickým způsobem jako v předchozích případech můžeme potom dojít k výsledku

$$P\left(f(x) \in \left(\widehat{f}(x) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{S^2 \mathbf{x}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{x}}\right)\right) \doteq 1 - \alpha.$$

Toto je intervalový odhad pro hodnotu prokládané funkce v bodě  $x$  o spolehlivosti  $1 - \alpha$ , který se obvykle zkráceně zapisuje jako

$$\widehat{f}(x) \pm \sqrt{S^2 \mathbf{x}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{x}}.$$

Tento intervalový odhad můžeme zkonstruovat pro libovolný bod  $x$ , tedy i pro takový bod  $x$ , který leží mimo všechna naše měření (tomu se potom říká extrapolace<sup>40</sup>). Jak uvidíte při procházení vzorového skriptu, šířka tohoto intervalu spolehlivosti také závisí na tom, jak daleko je bod  $x$  od námi naměřených hodnot. Je vcelku opodstatněné předpokládat, že v místě, kde máme změřeno hodně hodnot bude interval spolehlivosti užší než v místě, kde máme hodnot změřeno méně. Tento efekt je způsoben vlastnostmi vektorového a maticového součinu ve výrazu  $\mathbf{x}^T (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbf{x}$ , jeho podrobné vysvětlení je ale nad rámec tohoto seriálu.

Nakonec poznamenejme, že vůbec není nutné si tento výraz pamatovat ani ho umět vyčíslit, udělá to za nás matematický software (v našem případě *R*) po použití jednoduchého příkazu.

### Regresní diagnostika

V tomto odstavci se budeme věnovat ověřování, zda jsou splněny všechny předpoklady pro použití lineárního regresního modelu, které jsme uvedli na začátku tohoto dílu seriálu. Pokud bychom aplikovali lineární regresní model a nebyly by splněny předpoklady pro jeho použití, obdržené výsledky by nebyly správné. Je proto vždy důležité ověřit, zda jsou tyto předpoklady splněny. Pro jistotu zde všechny tyto předpoklady ještě zopakujeme, jedná se o (uvedeno od nejdůležitějšího předpokladu po nejméně důležitý)

- Správná volba prokládané funkce.
- Stejný rozptyl pro všechna měření.
- Nezávislost jednotlivých měření.
- Normální rozdělení našich měření.

Na začátek uveďme, že předpoklad o normálním rozdělení našich měření se v praxi velice těžko ověřuje<sup>41</sup> a jelikož byly všechny uvedené tvrzení formulovány

<sup>40</sup>Musíme si ale uvědomit, že při extrapolování mlčky předpokládáme, že proložená závislost platí i mimo námi naměřená data (tedy, že prokládaná funkce lze „protáhnout“), což nemusí být vždy správný předpoklad

<sup>41</sup>Pro správné ověření tohoto předpokladu je potřeba velké množství měření, ale pokud máme velké množství měření, můžeme se už spolehnout na asymptotické vlastnosti všech našich odhadů a ani nepotřebujeme normální rozdělení našich měření.

tak, že platí i bez tohoto předpokladu (se splněním tohoto předpokladu platí pro libovolný počet měření, bez splnění platí asymptoticky pro velký počet měření) nebudeme se jím dále zabývat. Tento předpoklad se téměř nikdy v praxi neověřuje.

Ostatní předpoklady už jsou ovšem velice důležité a pokud by nebyly splněné a my bychom přesto aplikovali lineární regresní model, naše výsledky by byly nesprávné. Naštěstí existují poměrně spolehlivé způsoby, jak ověřit, zda jsou tyto předpoklady splněny. Všechny tyto postupy jsou založeny na myšlence, že zkusíme aplikovat lineární regresní model a až následně (většinou na základě residuí našeho modelu) zkoumáme, zda byly všechny předpoklady splněny. Pokud zjistíme, že splněny nebyly, nemůžeme takovýto model používat k vyhodnocování našeho experimentu a musíme přijít s lepším modelem (většinou změním prokládanou funkci) nebo se smíříme s tím, že obdržené výsledky nejsou tolik přesné.

Nyní už k jednotlivým metodám ověřování předpokladů.

### *Grafická kontrola správnosti prokládané funkce*

Tato metoda je velice jednoduchá a nevyžaduje pochopení žádné matematické teorie, její nevýhoda ovšem je, že není tolik přesná. Jejím základem je, že na vykresleném grafu zkontrolujeme, zda proložená funkce odpovídá naměřeným datům. Pokud bychom v grafu našli, že např.

- V některé části grafu je proložená funkce výrazně pod nebo nad naměřenými daty.
- Tvar proložené funkce neodpovídá naměřeným datům.

potom bychom museli prohlásit, že jsme prokládali špatnou funkci a pokusit se najít vhodnější funkci.

Zejména v případě, že naměřené hodnoty jsou velice blízko proložené křivce, může být tato metoda značně komplikovaná (nejde jednoznačně odlišit data pod a nad proloženou křivkou). V tomto případě je výhodnější místo na graf naměřených hodnot s proloženou závislostí koukat na graf residuí (graf kde jsou vynesena residua a příslušné hodnoty nezávisle proměnné). Na tomto grafu bychom měli vidět náhodně rozesté body kolem osy  $x$ , pokud tam vidíme cokoliv jiného (např. že v nějaké části grafu jsou residua výrazně nad nebo pod osou  $x$ ), znamená to, že jsme pravděpodobně zvolili špatně prokládanou funkci a měli bychom se pokusit najít vhodnější funkci.

Obě tyto metody potřebují trochu cviku a příklady, co je ještě akceptovatelné a co už nikoliv. Několik takovýchto příkladů proto najdete v příloženém vzorovém skriptu.

### *Statistický test správnosti prokládané funkce (lack of fit test)*

Ve speciálním případě můžeme provést také statistický test správnosti prokládané funkce, což je přesnější metoda než výše popsaná grafická metoda. Tím speciálním případem se myslí případ, kdy pro jednu hodnotu nezávisle proměnné  $x$  máme naměřeno vždy více měření závisle proměnné (většinou se uvažuje alespoň 5 měření pro každou hodnotu nezávisle proměnné).

Jak jsme si popsali v minulém díle seriálu, k určení statistického testu potřebujeme formulovat hypotézu a alternativu, testovou statistiku a kritický obor testu. Nebudeme zde vše podrobně odvozovat, protože je to nad rámec tohoto dílu seriálu. Tomuto testu se také někdy říká  $\chi^2$  test kvality fitu a testuje následující dvojici hypotéza a alternativa

$H$  : Prokládaná funkce  $f$  je správně zvolená.

$A$  : Prokládaná funkce  $f$  není správně zvolená.

Testová statistika má následující tvar

$$CH = \frac{\sum_{i=1}^n n_i (\bar{y}_{i,\bullet} - \hat{f}(x_i))^2}{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (y_{i,j} - \bar{y}_{i,\bullet})^2}{N-n}},$$

kde  $x_i$  je hodnota nezávisle proměnné,  $y_{i,j}$  je hodnota  $j$ -tého měření příslušícího  $i$ -té nezávisle proměnné,  $\bar{y}_{i,\bullet}$  je průměr naměřených hodnot odpovídající hodnotě nezávisle proměnné  $x_i$ ,  $N$  je celkový počet měření,  $n$  je počet různých hodnot nezávisle proměnné a  $p$  je počet regresních parametrů. Za platnosti nulové hypotézy má tato statistika Fisherovo  $F$ -rozdělení o  $(n-p)$  a  $(N-n)$  stupních volnosti. Když si zkusíme uvědomit, co testová statistika vyjadřuje, zjistíme, že čítecitel je vážený průměr druhých mocnin vzdáleností průměrů naměřených hodnot od proložené křivky a jmenovatel je průměrná druhá mocnina vzdálenosti naměřených hodnot od průměrů naměřených hodnot. Uvědomme si, že za platnosti hypotézy by měla testová statistika nabývat malých hodnot (neboť  $\bar{y}_{i,\bullet}$  by měly být velmi podobné  $\hat{f}(x_i)$ ), proto kritický obor zvolíme na základě Fisherova  $F$ -rozdělení následovně

$$C = (F_{n-p, N-n}(1 - \alpha), \infty),$$

kde  $F_{n-p, N-n}(1 - \alpha)$  je příslušný kvantil Fisherova rozdělení a  $\alpha$  je hladina testu.

V praktickém případě budeme tento test provádět pomocí jednoduchého příkazu v matematickém softwaru, není tedy nutné si pamatovat všechny tyto odvozené vzorce. Matematický software jako výstup nabídne také numericky spočítanou  $p$ -hodnotu testu.

Poznamenejme, že pokud bychom naměřenými daty prokládali špatnou funkci, bude to mít na správnost našich výsledků velice negativní vliv (prakticky se dá říct, že budou všechny závěry špatné). Je proto naprosto nutné vždy provést alespoň grafickou kontrolu správnosti prokládané funkce.

### Grafická kontrola homoscedasticity

Homoscedasticita je označení pro konstantní hodnotu rozptylu. V praxi se občas stane, že rozptyl našich měření není konstantní, ale závisí buď na hodnotě nezávisle proměnné nebo na hodnotě měřené veličiny. Proto bychom měli pokaždé vykreslit grafy, ve kterých budou vynesena

- Residua oproti nezávisle proměnné.
- Residua oproti hodnotě proložené funkce.

Oba tyto grafy by měly vypadat jako náhodně rozestěté body kolem osy  $x$ , zejména by se nemělo stávat, že bude v určitých místech větší variability residuí (tj. že budou residua více rozestety do prostoru).

Opět platí, že obě tyto grafické metody vyžadují trochu cviku. Ve vzorovém skriptu naleznete několik příkladů, jak by residua měla a neměla správně vypadat.

Poznamenejme, že porušení předpokladu homoscedasticity nevádí, pokud není velké, což se prakticky nestává. V případě malého porušení předpokladu homoscedasticity se tento fakt zmíní v diskuzi a přidá se varování, že výsledky odvozené z takového modelu mohou být mírně nepřesné. Co dělat, když budeme pracovat s daty, kde rozptyl měření silně závisí na hodnotách nezávislé proměnné nebo měřené veličiny si povíme v příštím díle seriálu.

Jen pro doplnění uvedeme, že existuje i statistický test, který testuje homoscedasticitu residuí. Nicméně podrobné odvození tohoto testu je nad rámec tohoto seriálu, proto zde jen uvedeme, že jeho název je Breusch-Paganův test<sup>42</sup>.

### Grafická kontrola nezávislosti měření

Jestli jsou naše měření na sobě nezávislá se kontroluje velmi těžko, splnění tohoto předpokladu si musí pohlídat experimentátor při měření. Existuje jedna metoda, jak se dá odhalit, zda jsou naše měření na sobě nezávislá a sice vykreslení grafu residuí oproti posunutým residuům. Zjednodušeně řečeno, pokud jsou naše měření na sobě nezávislá, neměla by hodnota jednoho residua ovlivňovat hodnotu ostatních residuí. Naopak typickým typem závislosti měřených dat je, že jsou na sobě residua sériově závislá (jsou tzv. autokorelovaná), tedy, že hodnota jednoho residua ovlivňuje hodnotu toho následujícího. Toto si lze představovat tak, že pokud jsme v jednom měření dostali hodnotu vyšší než skutečnou, potom v dalším měření pravděpodobně také dostaneme hodnotu vyšší než skutečnou a naopak. Toto nám pomůže odhalit graf residuí oproti posunutým residuům, což je jen graf kde jsou vykresleny body

$$(U_1, U_2), (U_2, U_3), \dots, (U_{n-1}, U_n).$$

V případě, že jsou naše měření na sobě nezávislá, měl by takovýto graf vypadat jako náhodně rozestěté body kolem počátku soustavy souřadné. Pokud jsou na sobě residua závislá, budou typicky body koncentrovány hlavně v 1. a 3. kvadrantu.

Porušení předpokladu nezávislosti měřených dat je poměrně závažné a neexistuje jednoduchý způsob, jak takovýto problém spravit. Je potřeba na toto myslet už při měření experimentálních dat a dát si na pozor. Pokud při zpracování dat zjistím, že jsou naměřená data na sobě silně závislá, je potřeba buď data změřit znova nebo v diskuzi uvést, že obdržené výsledky mohou být kvůli závislým datům značně nepřesné.

<sup>42</sup>Více informací o tomto testu například zde: [https://en.wikipedia.org/wiki/Breusch-Pagan\\_test](https://en.wikipedia.org/wiki/Breusch-Pagan_test)

Opět platí, že tato grafická metoda vyžaduje trochu cviku, proto je ve vzorovém skriptu uvedeno několik příkladů použití této metody.

Jen pro doplnění uvedeme, že také existuje statistický test, který testuje nezávislost měřených dat. Podrobné odvození tohoto testu je nad rámec tohoto seriálu a proto jen uvedeme, že jeho název je Durbin- Watsonův test<sup>43</sup>.

### Koeficient determinace

Pokud chceme zhodnotit, jak dobře proložená funkce vysvětluje opravdovou závislost měřené hodnoty  $y$  na hodnotě vysvětlující proměnné  $x$ , zdefinujeme si k tomu tzv. koeficient determinace, který budeme značit  $R^2$ , pomocí vztahu

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_n)^2},$$

kde  $\bar{y}_n$  představuje výběrový průměr všech naměřených hodnot (bez prokládání nějaké funkce, nezávisle na hodnotách vysvětlující proměnné  $x$ ).

Koeficient determinace<sup>44</sup> vyjadřuje, jak velký podíl celkové variability (součtu druhých mocnin vzdáleností měření od výběrového průměru) naměřených dat se nám povedlo vysvětlit tím, že jsme daty proložili funkcí  $f$ . Je to vlastně podíl variability okolo proložené funkce ku variabilitě okolo výběrového průměru. Koeficient determinace slouží jako pomocný nástroj pro hodnocení toho, jak dobrý máme pro naše naměřená data model. Čím je  $R^2$  vyšší, tím více je chování naměřených dat  $y$  vysvětleno vysvětlujícími proměnnými  $x$  (poznamenejme, že  $R^2$  vždy nabývá hodnot z intervalu  $(0, 1)$ ).

Je nutné si uvědomit, čím je způsobena variabilita naměřených dat kolem proložené funkce. Tato variabilita může být způsobena zaprvé nepřesností měření nebo špatně zvolenou prokládanou funkcí (prokládáme naměřenými daty jinou funkcí, než jaká je opravdová závislost naměřených dat). Je nutné si uvědomit, že tyto dva zdroje od sebe nedokážeme použitím pouze  $R^2$  odlišit, proto není dobré používat  $R^2$  jako jediný ukazatel toho, jak je náš model dobrý.

I naprosto správný model může mít malé  $R^2$  (pokud máme velkou nepřesnost měření) a na druhou stranu i špatný model (špatně zvolená prokládaná funkce) může mít vysoký  $R^2$ . Proto je nutné  $R^2$  vždy používat současně s metodami regresní diagnostiky, zejména těmi metodami, které zkoumají správnost proložené funkce.

<sup>43</sup>Více informací o tomto testu například zde: [https://en.wikipedia.org/wiki/Durbin-Watson\\_statistic](https://en.wikipedia.org/wiki/Durbin-Watson_statistic)

<sup>44</sup>Někdy se zavádí ještě tzv. upravený koeficient determinace vztahem  $R^2_{\text{adj}} = R^2 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k}$ , kde  $k$  vyjadřuje počet neznámých regresních parametrů. Význam  $R^2_{\text{adj}}$  je stejný jako význam  $R^2$ , jediný rozdíl je, že se snaží zohlednit počet neznámých regresních parametrů.

*Několik poznámek na závěr*

Nakonec uvedeme opět několik důležitých poznámek.

- Několikrát jsme se odvolávali na nutnost použít dostatečný počet měření a nikde jsme přesně nespécifikovali, kolik měření už je dostatečné. Nyní to napravíme. Obecně se dá říci, že pokud máme alespoň 10 krát více měření než odhadovaných regresních parametrů, všechny popsané metody už budou spolehlivě fungovat. Pokud budeme mít alespoň 5 krát více měření než regresních parametrů, popsané metody budou pořád poměrně spolehlivé, ale méně měření už bychom mít neměli. Pokud jsme v situaci, že je velmi těžké nebo nemožné získat dostatek měření, můžeme použít metody lineární regrese i pro menší počet měření, ale musíme si být vědomi, že použité metody nemusí být úplně spolehlivé (je dobré to na závěr zmínit v diskuzi). Vždy je ale naprosto nutné mít alespoň o 1 měření více, než kolik máme regresních parametrů, jinak dojde k tomu, že prokládaná funkce projde přesně naměřenými body a nebude nám nic říkat o obecné závislosti<sup>45</sup>.
- Rozhodně není nutné znát zpaměti umět ani dopodrobna rozumět konstrukci bodových ani intervalových odhadů, které jsme výše uvedli. Důležitá věc je znát a chápat rozdíl mezi bodovým a intervalovým a mít detailně rozmyšlené, co přesně vyjadřují intervalové odhady. V praxi za nás bude všechny výpočty provádět matematický software. Jediné důležité je umět tyto výsledky správně interpretovat.
- Opravdu silně doporučujeme projít si (třeba i několikrát) přiložený vzorový skript a rozmyslet si všechny uvedené příklady. Na praktických příkladech se toho člověk nejvíce naučí.
- Když v praxi používáme lineární regresi ke zpracování naměřených dat, je nutné do protokolu uvést alespoň tolik informací, aby čtenář zjistil, co přesně jsme dělali a mohl tento postup sám reprodukovat (když chce například hledat chyby v použitém postupu a výpočtech). Jako minimální výčet věcí, které by měly být vždy uvedeny, můžeme považovat
  - Tvar prokládané funkce (tedy vzorec  $f(x) = \dots$ )
  - Bodový odhad a nejistota měření všech regresních koeficientů.
  - Alespoň stručný komentář, zda jsou splněny všechny předpoklady použití regresního modelu (případně upozornění na možné nepřesnosti způsobené nesplněním předpokladů). Není nutné přikládat všechny popsané grafy.
  - Pokud se rozhodnete vykreslit graf s naměřenými daty a proloženou funkcí, měl by být v legendě uveden tvar prokládané funkce a odhadnuté hodnoty regresních koeficientů včetně nejistoty měření. Je také

<sup>45</sup>Takovému problému se říká přefitování a vzniká vždy, když pracujeme s málo měřeními v porovnání s počtem regresních koeficientů.

dobré (i když ne úplně nutné) do grafu vykreslit interval spolehlivosti pro prokládanou funkci. Ve vzorovém skriptu najdete podrobný návod a ukázkou, jak by toto mělo správně vypadat.

- Ačkoliv se v praxi lineární regrese používá nejčastěji, je nutné si uvědomit, že není aplikovatelná na všechny případy. Existují i případy, kdy je potřeba daty proložit funkcí nelineární v regresních parametrech. V těchto případech je nutné využít nelineární regresi, které se budeme věnovat v příštím díle seriálu.

## Úloha V.S ... lineární

10 bodů

- a) Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu a jak se používá lineární regrese (postačí vlastními slovy popsat následující: dva hlavní případy aplikace lineární regrese, používaný model, předpoklady modelu, postup volby prokládané funkce, způsob vyjádření nejistot měření, základní grafické metody regresní diagnostiky). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- b) V příloženém datovém souboru *linreg1.csv* naleznete výsledky určitého fyzikálního experimentu, ve kterém jsme měřili dvojice dat  $(x_i, y_i)$ . Naměřenými daty chceme proložit teoretickou funkci, kterou je v tomto případě parabola, tedy funkce tvaru

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Hlavním cílem experimentu je určit hodnotu koeficientu  $a$  (tedy koeficient u  $x^2$ ). Určete hodnotu tohoto koeficientu včetně nejistoty měření. Není potřeba provádět regresní diagnostiku.

- c) V příloženém datovém souboru *linreg2.csv* naleznete výsledky určitého fyzikálního experimentu, ve kterém jsme měřili dvojice dat  $(x_i, y_i)$ . Naměřenými daty chceme proložit teoretickou funkci, kterou je v tomto případě logaritmická funkce, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + b \cdot \log(x).$$

Hlavním cílem zpracování dat je vykreslit graf naměřených dat spolu s proloženou teoretickou závislostí. Vykreslete takovýto graf (včetně intervalového odhadu pro prokládanou funkci) a stručně ho okomentujte (takovýto graf musí mít všechny náležitosti). Není potřeba provádět regresní diagnostiku.

- d) Předpokládejme, že máme naměřeny dvojice dat  $(x_i, y_i)$  a chceme jimi proložit lineární funkční závislost, tedy funkci tvaru

$$f(x) = a + bx.$$

Odvodte přesnou podobu vzorce na výpočet hodnoty odhadů regresních koeficientů. Můžete použít libovolnou ze dvou metod představených v seriálu a také libovolné jiné zdroje, pokud je budete řádně citovat. Vzorec chceme opravdu odvodit (tj. uvést výpočet), nikoliv pouze napsat.

*Bonus:* V úlohách *b*) a *c*) proveďte regresní diagnostiku a diskutujte, zda jsou splněny všechny potřebné předpoklady (pokud to jde, proveďte také test vhodnosti prokládané funkce a diskutujte jeho výsledky).

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí *R*. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka *R*. (řešení str. 234)

## Kapitola 6: Seriál - Zpracování dat 6. díl

V tomto posledním díle seriálu se budeme věnovat pokročilejším partiím regresní analýzy. Nejprve si popíšeme, jak vyřešit případy, kdy není zřejmé, jakou máme zvolit prokládanou funkci, což vyřešíme lokální aproximací polynomy. Dále si popíšeme případy, ve kterých potřebujeme naměřenými daty proložit funkční závislost, která není lineární v neznámých regresních parametrech. Poznáme, že z hlediska zpracování dat a práce s matematickým softwarem je nelineární regrese prakticky stejná jako regrese lineární (liší se jen v matematických modelech v pozadí, jejichž znalost ale není pro praxi nutná). Dále se naučíme zahrnovat do naší analýzy i nejistoty měření našich hodnot (zejména nejistoty typu A způsobované použitým postupem měření). Nakonec stručně zmíníme, jak postupovat při testech hypotéz o hodnotách regresních koeficientů.

### Nelineární regrese

Až do teď jsme se zabývali pouze případem, kdy prokládaná funkce byla lineární v neznámých regresních koeficientech, prokládaná funkce tedy měla vždy podobu

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 f_1(x) + \dots + \beta_k f_k(x).$$

Toto byla tzv. lineární regrese. Nyní se budeme zabývat případem, kdy potřebujeme naměřenými daty proložit funkci, která není lineární v neznámých regresních koeficientech. Budeme tedy prokládat funkci tvaru

$$f(x, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k),$$

kde  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  jsou neznámé regresní koeficienty, v nichž není tato funkce lineární. Takovému typu regrese se říká nelineární regrese. Naším cílem nadále bude stejně jako v případě regrese lineární odhadnout z naměřených dat hodnoty neznámých regresních koeficientů a vykreslit do grafu proloženou funkci.

Nelineární regrese se od lineární regrese liší jen v několika detailech. Na odhadování neznámých parametrů v nelineární regresi použijeme stejně jako v případě regrese lineární metodu maximální věrohodnosti, která za předpokladu normálního rozdělení chyb měření bude ekvivalentní metodě nejmenších čtverců. Výpočetní aspekt odhadu parametrů v nelineární regresi je značně komplikovanější a musí proto používat numerické algoritmy (na rozdíl od lineární regrese, kde existoval explicitní vzorec). Vlastnosti odhadů budou v případě nelineární regrese velice podobné regresi lineární. Všechny tyto odlišnosti si nyní popíšeme podrobněji.



### Metoda maximální věrohodnosti

O principu fungování metody maximální věrohodnosti už jsme psali v minulém dílu seriálu, ale pro jistotu ji zde ještě stručně zopakujeme. Při metodě maximální věrohodnosti předpokládáme, že naměřená data (tedy dvojice  $(x_i, y_i)$ ) byla vygenerována pomocí následujícího schématu. Pro každou hodnotu nezávisle proměnné  $x_i$  jsme naměřili určitou hodnotu  $y_i$  podle vztahu

$$y_i = f(x_i, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) + \varepsilon_i,$$

kde  $\varepsilon_i$  představuje náhodnou nepřesnost měření, o které předpokládáme, že má rozdělení  $N(0, \sigma^2)$ , pro nějakou neznámou hodnotu  $\sigma^2$ . Věrohodnost pro určitou volbu hodnot regresních koeficientů  $\beta_0, \dots, \beta_k$  je definována jako pravděpodobnost, že při takovéto volbě regresních koeficientů naměříme právě taková data, která jsme naměřili. Metoda maximální věrohodnosti říká, že za odhady regresních koeficientů vezmeme takové hodnoty  $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k$ , které maximalizují věrohodnost pro naše naměřená data. Věrohodnost pro naše naměřená data je tvaru

$$L(\beta_0, \dots, \beta_k, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y_i - f(x_i, \beta_0, \dots, \beta_k))^2}{\sigma^2}}.$$

Tento výraz se dá pomocí algebraických úprav přepsat na výraz

$$\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \beta_0, \dots, \beta_k))^2}.$$

Podobně jako v minulém díle seriálu můžeme odvodit, že tento výraz je maximalizován, právě když je minimalizována hodnota výrazu

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \beta_0, \dots, \beta_k))^2.$$

Chceme tedy za odhady regresních koeficientů zvolit takové hodnoty  $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k$ , aby byl minimalizován součet čtverců vzdáleností naměřených hodnot od proložené funkce. Používáme tedy metodu nejmenších čtverců.

### Výpočetní aspekty odhadů parametrů

Jak už jsme naznačili, počítání odhadů regresních koeficientů v nelineární regresním modelu je značně komplikované. V praxi se pro tento výpočet musejí používat numerické metody. Nejčastěji používanou metodou je tzv. gradient descent metoda, kterou si zde stručně popíšeme.

Tato metoda se snaží najít extrém funkce tím způsobem, že začne v nějakém námi zadaném bodě (později bude upřesněno, jak zvolit počáteční bod), následně určí směr, ve kterém minimalizovaná funkce co nejvíce klesá<sup>46</sup> a posune se v tomto

<sup>46</sup>Toto se provede pomocí gradientu funkce (odtud název gradient descent), což je něco jako zobecněná derivace pro funkce více proměnných.

směru o předem zvolený krok. Tento postup se pořád opakuje, čímž se postupně posouváme k hledanému minimu funkce. Pokud se dostaneme k hledanému minimu funkce, začne se tato metoda většinou cyklit na místě (už se nikam systematicky neposouvá). Když se toto stane, je to signál, že můžeme skončit a prohlásit poslední bod za aproximaci hledaného minima.

Tato metoda požaduje, aby uživatel na začátku zadal hodnotu počátečního bodu. Ve většině případů na volbě počátečního bodu nezáleží (tj. můžeme zadat libovolný počáteční bod), ale dobrá volba počátečního bodu dokáže zejména u složitějších úloh značně urychlit výpočet. Jako počáteční bod by se měl volit bod, o kterém si myslíme, že je blízko hledanému řešení (aby nebyla cesta k hledanému minimu příliš dlouhá). Jak už bylo řečeno dříve, špatná volba počátečního bodu obvykle nemá fatální důsledky (kromě delší doby výpočtu), ale může se stát, že kvůli špatné volbě počátečního bodu metoda nebude vracet požadované výsledky. Toto je nejčastěji způsobeno tím, že metoda nenajde globální minimum, ale pouze nějaké lokální minimum. Je proto dobré věnovat pozornost vhodné volbě startovacího bodu a potom také zkontrolovat, zda výstup programu odpovídá intuitivní představě o správném výsledku. V opačném případě bychom měli zkusit jinou volbu počátečního bodu. V příloženém vzorovém skriptu je opět uvedena ukázka toho, jak správně volit hodnoty počátečních bodů, abychom se vyhnuli nesprávným závěrům.

Pokud budeme chtít v programu  $R$  odhadovat regresní koeficienty v nelineární regresi, po zavolání příslušného příkazu na pozadí proběhne podobný algoritmus, jaký byl popsán výše. Z tohoto důvodu je tedy potřeba společně s ostatními vstupními parametry modelu zadat i počáteční bod pro metodu gradient descent. Nyní máme alespoň základní představu, proč se po nás něco takového chce.

### Vlastnosti odhadů

V případě lineární regrese jsme odvodili poměrně dost vlastností, které mají odhady regresních koeficientů, a naučili jsme se konstruovat intervalové odhady pro hodnoty regresních koeficientů i prokládané funkce (viz minulý díl seriálu). Nyní bychom chtěli něco podobného odvodit i pro případ nelineární regrese.

Dobrá zpráva je, že v případě nelineární regrese mají naše odhady úplně analogické vlastnosti jako odhady v případě lineární regrese a dají se konstruovat také intervalové odhady pro regresní koeficienty i pro prokládanou funkci. Špatná zpráva je, že matematická teorie, která všechno toto dovoluje, je v případě nelineární regrese o dost složitější. Na tomto místě tedy tuto teorii nebudeme uvádět a jen napíšeme, že se dají zkonstruovat asymptotické intervalové odhady, které mají pro dostatečně velký počet měření (bude upřesněno dále) vlastnosti

$$P\left(\beta_i \in \left(\hat{\beta}_i \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} s_n^{K_i}\right)\right) \doteq 1 - \alpha,$$

$$P\left(f(x, \beta_0, \dots, \beta_k) \in \left(f(x, \hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} s_n^f(x)\right)\right) \doteq 1 - \alpha,$$

kde  $s_n^{K_i}$  je nejistota měření regresního koeficientu a  $s_n^f(x)$  je nejistota měření funkční hodnoty prokládané funkce v bodě  $x$ . Obě tyto hodnoty poskytuje matematický software jako standardní výstup. Jak už bylo zmíněno dříve, na výpočet těchto nejistot sice existují explicitní vzorce, my je zde ale nebudeme uvádět.

### Regresní diagnostika

I v případě nelineární regrese je potřeba, aby byly splněny všechny předpoklady modelu, jinak obdržené výsledky nebudou správné. Předpoklady jsou v podstatě stejné jako v případě lineární regrese, pro jistotu je zde ale zopakujeme. Předpoklady nelineární regrese jsou

- Správná volba prokládané funkce.
- Stejný rozptyl chyb měření.
- Nezávislost jednotlivých měření.
- Normalita chyb měření.

Stejně jako v lineární regresi platí, že čtvrtý předpoklad není nijak zásadní, pokud pracujeme s dostatečným počtem měření. Splnění ostatních předpokladů je ale poměrně zásadní. Je proto nutné pokaždé provést alespoň základní regresní diagnostiku, abychom ověřili, že byly všechny předpoklady splněny (nebo že alespoň nebyly porušeny zásadním způsobem).

V zásadě platí, že na ověření platnosti předpokladů můžeme použít stejné metody, které používáme na ověření předpokladů v lineární regresi. Nemělo by smysl všechny tyto metody zde znovu opakovat, proto jen odkážeme na kapitulu Regresní diagnostika v minulém dílu seriálu.

### Statistické testy o hodnotách regresních koeficientů

Metody popsané v tomto odstavci jsou aplikovatelné na lineární i nelineární regresi. Poslední věc, kterou bychom chtěli v souvislosti s regresní analýzou pokrýt, je testování hypotéz o hodnotách regresních parametrů. Je to tedy situace, kdy chceme pomocí naměřených dat otestovat hypotézu proti alternativě tvaru

$$\begin{aligned} H : \beta_j &= \vartheta, \\ A : \beta_j &\neq \vartheta, \end{aligned}$$

kde  $\vartheta$  je nějaká předem zvolená konstanta.

Jak bylo popsáno ve čtvrtém dílu seriálu, k odvození testu potřebujeme odvodit podobu testové statistiky a kritického oboru. Jako testovou statistiku v tomto případě zvolíme

$$T = \frac{\hat{\beta}_j - \vartheta}{s_n^{K_j}},$$

kde  $s_n^{K_j}$  je nejistota měření regresního koeficientu. Z předchozího dílu seriálu víme, že v případě lineární regrese je tato nejistota rovna prvku na pozici  $(j, j)$  v matici

$\hat{\sigma}^2(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}$ , kde  $\mathbb{X}$  je matice modelu. V případě nelineární regrese jsme si explicitní vzorec neuvedli a spoléháme se v tomto na matematický software. Takto zvolená testová statistika bude za platnosti hypotézy konvergovat v distribuci k rozdělení  $N(0, 1)$ . Kritický obor tedy zvolíme jako

$$C = (-\infty, u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty).$$

Zdůvodnění je stejné jako ve čtvrtém dílu seriálu u klasického  $t$ -testu.

Jednoduchou modifikací by se dal takovýto test upravit, aby testoval mírně pozměněnou hypotézu proti alternativě

$$H : \beta_j < \vartheta,$$

$$A : \beta_j \geq \vartheta.$$

Testová statistika by se zvolila stejně, jen volba kritického oboru by se lišila. Kritický obor testu by v tomto případě byl

$$C = (u_{1-\alpha}, \infty).$$

Zdůvodnění je opět zcela analogické jako v případě  $t$ -testu. V případě opačných znamének nerovností v definici testované hypotézy a alternativy bychom dostali stejným způsobem kritický obor tvaru

$$C = (-\infty, u_{\alpha}).$$

#### *Několik poznámek k nelineární regresi*

- Stejně jako v případě lineární regrese platí, že v každém případě musíme mít alespoň takový počet měření, jako máme neznámých regresních koeficientů (jinak nemůžeme nelineární regresi ani použít). Dále platí, že aby byly intervalové odhady pro regresní koeficienty a hodnoty prokládané funkce, které jsme popsali v předchozích kapitolách, přesné, potřebujeme mít alespoň 4-5 krát více měření než regresních koeficientů.
- Stejně jako v případě lineární regrese platí, že čím více naměřených hodnot použijeme pro odhad regresních koeficientů, tím přesnější výsledky dostaneme (dostaneme menší nejistotu měření regresních parametrů).
- Stejně jako v případě lineární regrese platí, že bychom měli naměřenými daty prokládat jen takové funkce, které mají určité fyzikální opodstatnění. Z opačném případě se vystavujeme velkému riziku, že zvolíme prokládanou funkci špatně, což by mělo na závěry naší analýzy fatální důsledek.
- Další věc, na kterou si musíme dát v případě nelineární regrese pozor, je identifikovatelnost regresních parametrů v našem modelu (v lineární regresi jsme toto řešit nemuseli). Identifikovatelnost regresních parametrů znamená, že se nesmí stát, že bychom pro různé hodnoty regresních koeficientů dostali stejnou prokládanou funkci.

Pro lepší pochopení uvedeme příklad. Pokud bychom zvolili prokládanou funkci ve tvaru

$$f(x) = a + \frac{b}{cx + d},$$

stalo by se, že by regresní parametry nebyly identifikovatelné. Například pro volby parametrů

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) &= (1, 1, 1, 1), \\ (a', b', c', d') &= (1, 2, 2, 2)\end{aligned}$$

bychom dostali naprosto stejnou prokládanou funkci (po krácení ve zlomku). Tento problém se dá vždy odstranit vhodnější parametrizací (s méně regresními koeficienty). V tomto případě bychom si museli prokládanou funkci přepsat do tvaru

$$f(x) = a + \frac{1}{\frac{c}{b}x + \frac{d}{b}} = \beta_0 + \frac{1}{\beta_1 x + \beta_2},$$

kde máme jen 3 regresní koeficienty  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ .

- Pokud používáme pro zpracování měření určitého experimentu nelineární regresi, měli bychom do závěrečného protokolu uvést dostatečně mnoho informací, aby čtenář byl schopen přesně zrekonstruovat náš postup, poskytnout i grafické výstupy a dbát přitom na přehlednost. Stejně jako v případě aplikace lineární regrese platí, že bychom jako výstup měli uvést minimálně
  - Tvar prokládané funkce (tedy vzorec  $f(x) = \dots$ )
  - Bodový odhad a nejistota měření všech regresních koeficientů.
  - Alespoň stručný komentář, zda jsou splněny všechny předpoklady použití regresního modelu (případně upozornění na možné nepřesnosti způsobené nesplněním předpokladů). Není nutné přikládat všechny popsané grafy.
  - Pokud se rozhodnete vykreslit graf s naměřenými daty a proloženou funkcí, měl by být v legendě uveden tvar prokládané funkce. Je také dobré (i když ne úplně nutné) do grafu vykreslit interval spolehlivosti pro prokládanou funkci. Ve vzorovém skriptu najdete podrobný návod a ukázkou, jak by toto mělo správně vypadat.
- Pozorného čtenáře jistě napadne, že nelineární regrese je univerzálnější než lineární regrese a že bychom mohli používat pouze nelineární regresi (tedy aplikovat ji i na problémy řešitelné lineární regresí). Toto je do určité míry pravda, ale stále existuje mnoho důvodů, proč je dobré používat lineární regresi v případech, kdy to jde. Mezi hlavní patří, že lineární bude poskytovat přesnější výsledky (díky jednodušší formulovaným modelům a jednodušší matematické teorii). Jako druhý hlavní důvod můžeme uvést snadnější výpočet koeficientů. V problémech, které v tomto seriálu řešíme, a při uvážení

výpočetní síly dnešních počítačů se toto nezdá být jako nevýhoda nelineární regrese, ale ocenili bychom to v případě zpracovávání opravdu velkých objemů měřených dat.

### *Pokročilé partie regresní analýzy*

V této poslední kapitole se budeme věnovat několika problémům pokročilé regresní analýzy. Uvádíme je zde spíše pro zajímavost, neboť na ně v praxi moc často nenarazíme a dá se říci, že je v určitém přiblížení můžeme řešit už známými metodami nebo tyto problémy ignorovat a nedopustili bychom se velkých nepřesností (alespoň tedy ve velké většině případů).

#### *Omezení na regresní koeficienty*

Někdy v praxi potkáme případ, kdy předem víme, že regresní koeficienty musí nabývat jen určitých hodnot. Například mohou nabývat jen kladných hodnot nebo jen "malých hodnot" (řekněme menší než 100). V takovémto případě je možno numerickému algoritmu tuto informaci poskytnout a ten bude hledat regresní koeficienty tak, aby tyto naše podmínky splňovaly. V příloženém vzorovém skriptu najdete příklad, kdy je toto potřeba udělat, a také, jak to správně udělat.

Toto se nejčastěji stane, když prokládáme naměřenými daty periodické funkce (jako např. funkce  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  atd.). Představme si, že chceme naměřenými daty proložit funkci

$$f(x) = a + b \sin(cx + d).$$

Pokud bychom si nestanovili žádnou dodatečnou podmínkou na hodnoty regresních koeficientů, velmi pravděpodobně by nám software na výstupu poskytl velice vysokou hodnotu odhadu regresního koeficientu  $c$ . Pokud bychom si následně nakreslili graf proložené funkce, dostali bychom sinusoidu s velikou frekvencí, která by sice skoro dokonale prošla naměřenými daty (tedy součet čtverců residuí by byl velice malý), ale velice špatně by aproximovala pozorovanou závislost. Řešením by v tomto případě bylo omezit možné hodnoty regresního koeficientu  $c$ . Příklad správného použití omezujících podmínek najdete ve vzorovém skriptu.

#### *Problematická volba prokládané funkce - splíny*

V praxi se může někdy stát, že závislost, kterou chceme naměřenými daty proložit, je příliš komplikovaná na to, abychom ji mohli vyjádřit pomocí jedné prokládané funkce s regresními koeficienty. Pokud bychom chtěli i v této situaci vykreslit graf, ve kterém bude kromě naměřených dat i proložená teoretická křivka, můžeme k tomu použít lokální aproximaci polynomy.

Lokální aproximace funkce polynomy zjednodušeně znamená, že definiční obor funkce rozdělíme na menší intervaly a na každém takovémto intervalu budeme chtít najít polynom, který bude co nejvíce podobný aproximované funkci (podobný ve smyslu, že vzdálenost mezi aproximovanou funkcí a polynomem bude co nejmenší).

Jistě někteří z vás už slyšeli o Taylorových polynomech. Taylorovy polynomy jsou jedním ze způsobů, jak lokálně aproximovat funkci pomocí polynomů<sup>47</sup>.

Idea, jak budeme chtít postupovat, je taková, že si naměřená data rozdělíme do několika intervalů podle hodnot nezávisle proměnné (dělicí body budeme v tomto kontextu nazývat uzly) a na každém z těchto intervalů budeme chtít naměřenými daty prokládat polynomiální funkci určitého stupně  $p$ . Jednotlivým polynomům se v tomto kontextu říká regresní spliny<sup>48</sup>. V praxi stačí zvolit  $p$  rovno dvěma nebo třem, větší stupně prokládaných polynomů už obvykle nevedou k výrazně lepším výsledkům.

K proložení polynomů na jednotlivých intervalech můžeme použít lineární regresi, která byla popsána v minulém dílu seriálu. Regresní koeficienty budeme tedy odhadovat pomocí metody nejmenších čtverců. Pokud bychom vše provedli jen tak, jak jsme dosud popsali, velice pravděpodobně bychom dostali nespojitou proloženou funkci, což není úplně to, co by odpovídalo intuitivním požadavkům na prokládanou funkci. Proto si navíc přidáme podmínku na to, aby bylo napojení proložených polynomů na krajích našich intervalů spojitě. Takovouto podmínku přidáme jednoduše tím, že při počítání odhadů regresních koeficientů budeme uvažovat jen taková řešení, která zároveň splňují podmínku na spojitost na krajích intervalů. Pokud si nejste jistí, jak by se taková soustava řešila, nevádí, v praxi toto vždy bude obstarávat matematický software. Tento odstavec slouží jen na získání základní představy, co se v počítači po spuštění příkazu děje.

Poslední problém, který musíme vyřešit, je volba dělení na intervaly, tedy jaké množství a jaké rozmístění uzlů zvolit. Obecně se dá říci, že je dobré zvolit uzly tak, aby na každém vzniklém intervalu stále byl dostatečný počet měření (ideálně alespoň 4 až 5 krát více, než je stupeň prokládaného polynomu). Uzly bychom měli potom volit tak, aby hranice intervalů odpovídaly bodům, ve kterých se mění chování měřených dat. Obvykle se v praxi postupuje metodou pokus–omyl, tedy zkusíme podle výše popsaných pravidel uzly nějak zvolit, vykreslíme si proloženou funkci a pokud nejsme spokojeni, pokoušíme se jinou volbou uzlů výsledek zlepšit. Zejména bychom volbou uzlů měli zajistit, aby proložená funkce nevykazovala příliš rozkolísané a neočekávané chování. Tato metoda vyžaduje cvik a zkušenosti, proto ve vzorovém skriptu najdete příklady toho, jak by správná volba uzlů měla a neměla vypadat.

Pomocí tohoto postupu dostaneme pěkně vypadající graf, ale je nutné si uvědomit několik omezení, která tento postup má:

- Je potřeba poměrně hodně měření k tomu, aby byla tato metoda spolehlivá (což je logické vzhledem k tomu, že naměřená data rozdělíme na několik skupin a na nich zvlášť prokládáme jednotlivé funkce).
- Obržené odhady regresních koeficientů na rozdíl od klasické lineární regrese nemají naprosto žádnou fyzikální interpretaci. Jediné, čeho tímto postupem docílíme, je názorně proložená křivka v grafu naměřených hodnot.

<sup>47</sup>Pokud jste o Taylorových polynomech ještě neslyšeli, nevádí, uvádíme to zde jen pro zajímavost.

<sup>48</sup>Čti [splajny].

- Vystává problém, jaké dělení na jednotlivé intervaly bychom měli správně zvolit, neboť obdrženy výsledek závisí na zvoleném dělení.

### *Aplikace regrese v případě heteroskedasticity*

V tomto dílu a v minulém dílu seriálu jsme opakovaně uváděli, že jedním z předpokladů lineárních i nelineárních regresních modelů je shodnost rozptylu měřených dat (homoskedasticita). Uvedli jsme, že pokud není tento předpoklad porušen výrazně, můžeme toto porušení ignorovat (případně slovně upozornit na možné nepřesnosti v obdržených výsledcích). Nyní představíme metodu, jak můžeme heteroskedasticitu vzít v potaz při odhadování modelu tak, abychom obdrželi správné výsledky.

Pro začátek je nutné si uvědomit, že odhady regresních koeficientů budou správné i při porušení předpokladu homoskedasticity, jediné, co bude tímto předpokladem pokaženo, jsou nejistoty odhadů regresních koeficientů. Tyto nejistoty odhadů budou ve většině případů podhodnoceny, budeme tedy mít falešný pocit, že jsme koeficienty změřili přesně, i když opak je ve skutečnosti pravdou. Naštěstí existuje metoda, jak upravit nejistoty měření regresních koeficientů tak, aby reflektovaly nesplněný předpoklad homoskedasticity. Této metodě se říká Whiteův odhad kovarianční matice (někdy také sendvičový odhad). Je nad možností tohoto seriálu podrobně popsat tento odhad, proto to na tomto místě ani nebudeme dělat. Jediné, co je potřeba si pamatovat, je, že pokud pomocí regresní diagnostiky odhalíme nesplnění předpokladu homoskedasticity, je potřeba použít jiný výpočet nejistot měření, než je ten základní. Ve vzorovém skriptu můžete nalézt příklad, jak takovýto odhad v praxi konstruovat.

Typickým důsledkem použití Whiteova odhadu kovarianční matice namísto základního odhadu kovarianční matice je zvětšení nejistot odhadů regresních parametrů. Toto je nepříjemné z hlediska snížení přesnosti výsledků, ale je nutné si uvědomit, že je to jediná možnost, neboť předchozí nejistoty měření regresních koeficientů byly sice menší, ale nebyly správné. Přítomnost heteroskedasticity v našich datech snižuje přesnost, se kterou jsme schopni určit regresní koeficienty.

Pozorného čtenáře určitě napadne, proč bychom nemohli Whiteův odhad kovarianční matice používat vždy (je to přece obecnější odhad). Toto by bylo možné a obdržené výsledky by byly správné, ale všechny naše výpočty by se výrazně zkomplikovaly. Navíc je nutné zmínit, že mírné porušení předpokladu homoskedasticity příliš nevádí (nijak výrazně to neovlivní správnost získaných výsledků) a můžeme ho ignorovat (jak bylo zmiňováno dříve). Whiteův odhad je nutné používat až v případech opravdu vážného porušení předpokladu homoskedasticity. Ve vzorovém skriptu opět můžete najít ukázky použití Whiteova odhadu včetně ukázky toho, kdy už je nutné tento odhad používat a kdy to ještě není nutné.

### *Regrese na základě průměrů z měření*

Pokud se provádí nějaké rozsáhlejší experimentální měření, většinou se postupuje tak, že se pro každou hodnotu nezávisle proměnné změří více hodnot závisle pro-



měnné<sup>49</sup>. Matematická teorie regresní analýzy potom umožňuje dělat regresi jen na základě průměru naměřených hodnot pro jednotlivé volby nezávisle proměnné.

Pro lepší představu si uvedeme příklad. Představme si, že naměříme následující data

$$\begin{aligned} &(x_1, y_{1,1}), \dots, (x_1, y_{1,n_1}), \\ &\vdots \\ &(x_m, y_{m,1}), \dots, (x_m, y_{m,n_m}). \end{aligned}$$

Takováto situace není nic neobvyklého, na základě dosud vyložené teorie si s ní umíme poradit (tj. umíme těmito daty proložit libovolnou funkční závislost). Co chce tento odstavec říci, je, že pokud by nám někdo dal jen částečnou informaci o těchto měřeních, a to sice průměry hodnot závisle proměnné v jednotlivých skupinách odpovídajících hodnotám nezávisle proměnné, příslušnou výběrovou směrodatnou odchylku průměru a počty měření v jednotlivých skupinách, tedy

$$(x_1, \overline{y_{1,\bullet}}, s_{n_1}, n_1), \dots, (x_m, \overline{y_{m,\bullet}}, s_{n_m}, n_m),$$

stále bychom byli schopni takovými daty proložit libovolnou funkční závislost. Někdy se místo surových dat poskytují právě jen průměry hodnot nezávisle proměnné, příslušné výběrové směrodatné odchylky průměrů a počty měření v jednotlivých skupinách z důvodu úspory času a paměťové náročnosti.

Toto tvrzení si nyní také odvodíme. Budeme postupovat tak, že si napíšeme součet čtverců, který chceme při odhadování neznámých regresních koeficientů minimalizovat, na základě všech měření (tedy zatím nebudeme zavádět zjednodušení měřených dat). Následně pomocí algebraických úprav ukážeme, že jsme schopni tento součet čtverců přepsat jen pomocí symbolů  $(x_j, \overline{y_{j,\bullet}}, s_{n_j}, n_j)$ , čímž bude odvození dokončeno, neboť při praktickém výpočtu můžeme používat jen tento alternativní zápis. Nyní už k samotnému odvození, součet čtverců, který chceme minimalizovat, má tvar

$$S(x_1, \dots, x_j, y_{1,1}, \dots, y_{j,n_j}, \beta_0, \dots, \beta_k) = \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k))^2,$$

kde  $N$  představuje celkový počet měření. Tento výraz budeme nyní algebraicky upravovat, nejprve rozdělíme sumu přes všechna měření na dvě sumy, nejprve podle hodnot nezávisle proměnné  $x$  a poté podle hodnot měření příslušných měření závisle proměnné, čímž dostaneme

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (y_i - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k))^2.$$

<sup>49</sup> Potom se (mimo jiné výhody) dá provádět test vhodnosti prokládané funkce popsany v minulém díle seriálu.

Nyní provedeme důležitý trik, a sice ten, že k vnitřku závorky přičteme a odečteme výběrový průměr příslušné skupiny měření, tedy člen

$$\overline{y_{j,\bullet}} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} y_{j,i}.$$

Tímto nezměníme hodnotu našeho výrazu, ale následně si tím výrazně pomůžeme, dostáváme

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (y_{j,i} - \overline{y_{j,\bullet}} + \overline{y_{j,\bullet}} - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k))^2.$$

Nyní roznásobíme závorku, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \left[ (y_{j,i} - \overline{y_{j,\bullet}})^2 + 2(y_{j,i} - \overline{y_{j,\bullet}})(\overline{y_{j,\bullet}} - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k)) + \right. \\ & \left. + (\overline{y_{j,\bullet}} - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k))^2 \right]. \end{aligned}$$

Nyní tento výraz rozdělíme na jednotlivé sumy a uvědomíme si, že některé vzniklé výrazy můžeme z definice přepsat pomocí výrazů  $s_{n_i}^2$  a  $n_i$ , dostáváme

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (y_{j,i} - \overline{y_{j,\bullet}})^2 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} (\overline{y_{j,\bullet}} - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k))^2 + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} 2(y_{j,i} - \overline{y_{j,\bullet}})(\overline{y_{j,\bullet}} - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k)) = \\ & = \sum_{j=1}^m (n_j - 1)s_{n_j}^2 + \sum_{j=1}^m n_j (\overline{y_{j,\bullet}} - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k))^2 + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} 2(y_{j,i} - \overline{y_{j,\bullet}})(\overline{y_{j,\bullet}} - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k)). \end{aligned}$$

První dva členy našeho součtu už jsou vyjádřeny jen pomocí symbolů  $(x_i, \overline{y_{j,\bullet}}, s_{n_i}, n_i)$ , zbývá nějak se vypořádat se třetím členem. Na tomto místě si musíme uvědomit, že třetí člen je roven nule, což plyne z jednoduchých algebraických úprav, které

zde nyní podrobně provedeme.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} 2(y_{j,i} - \overline{y_{j,\bullet}}) (\overline{y_{j,\bullet}} - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k)) = \\
 & = 2 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} [y_i \overline{y_{j,\bullet}} - y_{j,i} f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k) - (\overline{y_{j,\bullet}})^2 + \overline{y_{j,\bullet}} f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k)] = \\
 & = 2 \sum_{j=1}^m [n_j (\overline{y_{j,\bullet}})^2 - n_j \overline{y_{j,\bullet}} f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k) - \\
 & \quad - n_j (\overline{y_{j,\bullet}})^2 + n_j \overline{y_{j,\bullet}} f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k)] = 0.
 \end{aligned}$$

Shrneme si, co jsme celkově dokázali. Zapsali jsme součet čtverců, který chceme při odhadování neznámých regresních koeficientů minimalizovat, pouze pomocí symbolů  $(x_i, \overline{y_{i,\bullet}}, s_{n_i}, n_i)$  jako

$$\begin{aligned}
 & S(x_1, \dots, x_j, y_{1,1}, \dots, y_{j,n_j}, \beta_0, \dots, \beta_k) = \\
 & = \sum_{j=1}^m (n_j - 1) s_{n_j}^2 + \sum_{j=1}^m n_j (\overline{y_{j,\bullet}} - f(x_j, \beta_0, \dots, \beta_k))^2.
 \end{aligned}$$

Je tedy vidět, že k určení odhadů regresních koeficientů nepotřebujeme znát hodnoty všech měření, ale stačí nám znát hodnoty  $(x_j, \overline{y_{j,\bullet}}, s_{n_j}, n_j)$ . V praxi se potom na hledání odhadů regresních koeficientů použijí stejné metody, které byly popsány dříve, a bude to za nás vždy provádět počítač.

Když se do takovéto situace dostaneme a chceme vykreslit graf naměřených hodnot a proložené funkce, většinou do grafu nekreslíme samotné naměřené hodnoty, ale pouze průměry měření odpovídajících hodnotám nezávisle proměnné  $\overline{y_{j,\bullet}}$  a nejistoty  $s_{n_j}$ , které vyjádříme pomocí tzv. error barů (česky chybová úsečka). Chybová úsečka je vertikální úsečka o velikosti  $2s_{n_j}$  se středem v bodě  $y_{j,\bullet}$ , pomocí které v některých případech lépe vyjádříme rozptýlenost měřených hodnot (zejména v případech, kdy máme hodně naměřených hodnot a klasický graf by byl kvůli tomu nepřehledný). Další chybová úsečka znamená, že měřené hodnoty byly více rozptýleny. Chybová úsečka se dá také interpretovat tak, že je pravděpodobnost přibližně 68 %, že skutečná hodnota prokládané funkce leží uvnitř chybové úsečky (pokud máme dostatek měření, abychom mohli použít centrální limitní větu). V příloženém vzorovém skriptu také naleznete příklad na použití této metody a kreslení chybových úseček.

### Regrese při uvažování nepřesností měření nezávisle proměnné

Až dosud jsme uvažovali pouze nepřesnosti měřené závisle proměnné  $y$ , hodnoty nezávisle proměnné  $x$  byly považovány za přesně známé. Nyní si rozebereme obecnější případ, kdy uvažujeme i hodnoty nezávisle proměnné  $x$  za zatížené nepřesnostmi měření. Naším cílem bude opět prokládat naměřenými daty teoretickou závislost, k tomu budeme chtít odhadovat neznámé regresní koeficienty z naměřených dat.

Stejně jako v předchozích případech se na odhad hodnot regresních koeficientů použije metoda maximální věrohodnosti. Nyní ale bude analytické vyjádření řešeného problému o něco složitější. Obecně budeme předpokládat, že pro měřená data platí teoretická závislost

$$y = f(x, \beta_0, \dots, \beta_k),$$

ale my nemůžeme přímo měřit hodnoty  $x$  a  $y$ . Tyto veličiny budeme vždy měřit nepřesně, výsledné hodnoty měření  $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$  tedy budou rovny

$$\begin{aligned}\tilde{y}_i &= f(x_i, \beta_0, \dots, \beta_k) + \varepsilon_i, \\ \tilde{x}_i &= x_i + \delta_i,\end{aligned}$$

kde  $\varepsilon_i$  je náhodná veličina s rozdělením  $N(0, \sigma_y^2)$  a  $\delta_i$  je náhodná veličina s rozdělením  $N(0, \sigma_x^2)$ .

Nebudeme na tomto místě podrobně odvozovat, jak budou odhady v takovémto případě vypadat, neboť je to příliš komplikované a v praxi je za nás bude vždy dělat počítač. Jediné, co zde uvedeme, je, jak si můžeme takovouto metodu představit ve srovnání s klasickou regresí při uvažování měření hodnot nezávisle proměnné bez nepřesností. V případě klasické regrese jsme chtěli minimalizovat součet druhých mocnin vertikálních vzdáleností naměřených hodnot od prokládané funkce. Vertikální vzdálenost naměřené hodnoty od prokládané funkce byla nazývána residuum, matematicky zapsáno

$$U_i = y_i - f(x_i, \beta_0, \dots, \beta_k).$$

V případě, kdy uvažujeme i nepřesnosti měření nezávisle proměnné, ale nebudeme uvažovat vertikální vzdálenost, ale přímo vzdálenost naměřené hodnoty od prokládané funkce. Abychom mohli tuto vzdálenost správně upravit, potřebujeme znát poměr mezi rozptyly náhodných nepřesností měření příslušných nezávisle a závisle proměnné, tedy poměr

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}.$$

Na závěr poznamenejme, že v praxi nastane téměř vždy případ, kdy měříme i hodnoty nezávisle proměnné s nepřesnostmi (minimálně nejistota typu B způsobená použitím nedokonalého měřidla). Téměř nikdy se nestane, že bychom hodnoty nezávisle proměnné znali přesně. Pokud ale je rozptyl hodnot měření nezávisle proměnné  $\sigma_x^2$  výrazně menší, než rozptyl hodnot měření závisle proměnné, tato metoda dá téměř shodné výsledky jako klasická regrese (bez uvažování nepřesností nezávisle proměnné). Je to způsobeno tím, že úprava v chápání vzdálenosti nebude příliš odlišná od klasické vertikální vzdálenosti. V takovýchto případech je potom naprosto postačující použít metody klasické regrese, není nutné věci příliš komplikovat (výsledky budou jen zanedbatelně odlišné). Tato popsaná metoda by se měla aplikovat jen v případech, kdy jsou hodnoty  $\sigma_x^2$  a  $\sigma_y^2$  srovnatelné, což se v praxi často nestává.

Toto je způsobeno tím, že hodnoty nezávisle proměnné jsou typicky zatíženy jen nejistotou typu B (nepřesnosti měřidla), zatímco u hodnot závisle proměnné

se musí počítat s nejistotami typu A (náhodnost měřených dat) i B (nepřesnosti měřidla). Toto způsobí, že hodnoty závisle proměnné mají řádově větší rozptyl než hodnoty nezávisle proměnné. Je ale nutné mít na paměti, že v případech, kdy jsou nepřesnosti měření závisle a nezávisle proměnné srovnatelné (což se také občas stává), metody klasické regrese jsou nedostačující a musíme proto použít výše popsaný zobecněný postup.

Jen úplně na závěr poznamenejme, že i v takovémto obecnějším případě lze konstruovat intervalové odhady pro hodnoty regresních koeficientů i pro hodnotu prokládané funkce. Teoretické odvození je však příliš složité na to, abychom ho zde uváděli. Ve vzorovém skriptu můžete najít příklady použití této metody na konkrétních datech.

## Závěr

Toto je ze seriálu 30. ročníku FYKOSu všechno. Pokud jste dočetli až sem, musím Vám pogratulovat a zároveň poděkovat za trpělivost. Doufám, že znalosti, které jste v tomto seriálu načerpali, v budoucnosti budete moci využít, ať už v rámci různých fyzikálních soutěží nebo během studia na střední (nebo i vysoké) škole.

Na závěr bych chtěl ještě kromě čtenářů seriálu a řešitelů seriálových úloh poděkovat i korektorům, kteří se výrazným způsobem podíleli na finální podobě jednotlivých dílů tohoto seriálu.

Michal Nožička

## Úloha VI.S . . . nelineární

10 bodů

- Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu a jak se používá nelineární regrese (postačí vlastními slovy popsat následující: model nelineární regrese, způsob odhadu regresních koeficientů, vyjádření nejistot odhadů regresních koeficientů a hodnot prokládané funkce, statistické testy hodnot regresních koeficientů, identifikovatelnost parametrů a způsob volby prokládané funkce). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- V přiloženém datovém souboru *regrese1.csv* naleznete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě sinusoida, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d).$$

Vykreslete graf naměřených hodnot a proložené funkce a stručně ho okomentujte (takovýto graf musí mít všechny náležitosti). Není potřeba dělat regresní diagnostiku.

*Nápověda:* Dejte si pozor na identifikovatelnost parametrů v tomto modelu a vhodné omezující podmínky na parametr  $c$ .

- c) V přiloženém datovém souboru *regrese2.csv* naleznete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě exponenciála, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + e^{bx+c}.$$

Určete hodnoty odhadů všech regresních koeficientů včetně nejistot měření.

*Nápověda:* Grafickou metodou ověřte předpoklad homoskedasticity a v případě potřeby pro určení nejistot měření regresních koeficientů použijte Whiteův (sendvičový) odhad kovarianční matice.

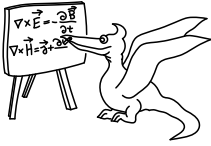
- d) V přiloženém datovém souboru *regrese3.csv* naleznete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě hyperbola, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + \frac{1}{bx + c}.$$

Vykreslete graf naměřených dat v podobě průměrů a chybových úseček a proložené funkce a stručně ho okomentujte (takovýto graf musí mít všechny náležitosti). Proveďte regresní diagnostiku.

*Bonus:* V přiloženém datovém souboru *regrese4.csv* najdete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou závislost, která je ovšem příliš složitá na analytické vyjádření. Proložte těmito daty regresní spliny (s vhodně zvolenými uzly a vhodně zvoleným stupněm).

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí *R*. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka *R*. (řešení str. 247)



## Řešení úloh ze seriálu

### Úloha I.S ... náhodná

- Zkuste vlastními slovy popsat, co je to náhodná veličina a jaké má vlastnosti (postačí vlastními slovy objasnit následující pojmy: náhodná veličina, rozdělení náhodné veličiny, realizace náhodné veličiny, střední hodnota, rozptyl, histogram).
- Vygenerujte grafy hustot pravděpodobnosti (případně pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot) všech v seriálu popsaných rozdělení náhodných veličin pro různé typy parametrů daného rozdělení a popište, jaký má změna parametru/ů vliv na tvar hustoty pravděpodobnosti (případně pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot).
- Vygenerujte z přiložených dat histogramy a pokuste se určit, ze kterého rozdělení tato data pocházejí.
- Definujte si náhodnou veličinu  $X$  jako výsledek hodu „férovou“ šestistěnnou kostkou (všechna čísla padají se stejnou pravděpodobností). Určete rozdělení náhodné veličiny  $X$  a dále spočítejte  $EX$  a  $\text{var} X$ .

**Bonus** Uvedte příklad dvou náhodných veličin, které mají stejnou střední hodnotu i stejný rozptyl, ale mají různá rozdělení.

Pro práci s daty a vykreslování grafů použijte výpočetní prostředí R. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka R.

- Detailní odpověď na tuto otázku dostanete přečtením 1. dílu seriálu, na tomto místě si vysvětlíme jen ty opravdu nejdůležitější pojmy. Náhodné veličiny se používají k matematickému modelování situací, u kterých nemůžeme dopředu s jistotou znát přesný výsledek. Náhodnou veličinu si můžeme představovat jako proměnnou, která ale nemá jednu pevnou hodnotu (ať už známou či neznámou), ale může nabývat (s různými pravděpodobnostmi) různých hodnot. Rozdělení náhodné veličiny je potom to, čím je náhodná veličina určená (podobně jako je klasická proměnná určena svojí hodnotou). Rozdělení náhodné veličiny může být buď diskrétní (potom je toto rozdělení určeno pravděpodobnostmi nabývání jednotlivých hodnot), nebo spojitě (potom je toto rozdělení určeno hustotou pravděpodobnosti). Realizace náhodné veličiny je hodnota, kterou dostaneme v konkrétním případě, kdy budeme náhodnou veličinu měřit. Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny představují jakýsi zjednodušený popis náhodné veličiny (plný popis je právě rozdělení náhodné veličiny), jsou

určeny následujícími vzorci

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k),$$

$$\text{var} X = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) (k - EX)^2,$$

pokud se jedná o diskrétní náhodnou veličinu, případně vzorci

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

$$\text{var} X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$$

v případě, že se jedná o spojitou náhodnou veličinu s hustotou  $f$ . Střední hodnota vyjadřuje, jakou hodnotu bychom měli v průměru očekávat při konkrétní realizaci náhodné veličiny a rozptyl vyjadřuje míru rozptýlenosti náhodné veličiny kolem její střední hodnoty.

Histogram je potom typ grafu, který vykresluje naměřená data (tedy realizace nějaké náhodné veličiny) a slouží k odhadování typu rozdělení, ze kterého naměřená data pocházejí.

- b) V seriálu byly uvedeny celkem čtyři nejčastěji se vyskytující rozdělení náhodných veličin (normální, exponenciální, Poissonovo a rovnoměrné rozdělení). Budeme postupně vykreslovat hustoty pravděpodobnosti (případně pravděpodobnosti nabývání jednotlivých hodnot) pro tato čtyři rozdělení.

Začneme normálním rozdělením, které, jak bylo uvedeno v seriálu, závisí na dvou parametrech  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$ . Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení je dána vztahem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

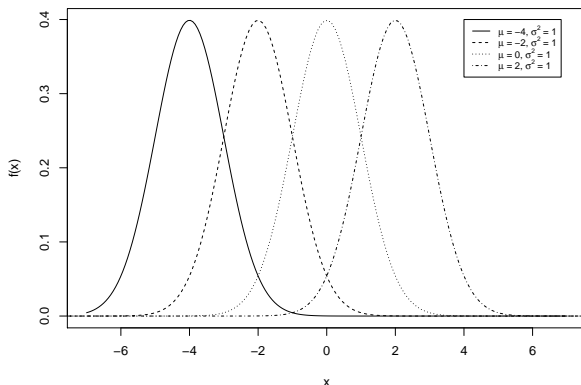
Grafy hustot normálního rozdělení pro různé hodnoty parametrů  $\mu$ ,  $\sigma^2$  můžeme vidět na obrázcích 38 a 39. Jak je z těchto obrázků patrné, parametr  $\mu$  ovlivňuje pouze posun po ose  $x$  a parametr  $\sigma^2$  škáluje graf hustoty v horizontálním směru (laicky řečeno graf rozšiřuje nebo zužuje).

Další v seriálu uvedené rozdělení je exponenciální rozdělení, které závisí na jednom parametru  $\lambda > 0$ . Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení je určena vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Grafy hustot exponenciálního rozdělení pro různé hodnoty parametru  $\lambda$  jsou vykresleny na obrázku 40. Jak je na obrázku vidět, tvar hustoty pravděpodob-





Obr. 38: Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení pro různé hodnoty parametru  $\mu$

nosti exponenciálního rozdělení zůstává stále stejný, parametr  $\lambda$  je zodpovědný pouze za škálování v horizontálním směru.

Posledním v seriálu uvedeným spojitým rozdělením je rovnoměrné rozdělení, které závisí na dvou parametrech  $-\infty < a < b < \infty$ . Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je určena vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a, b) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

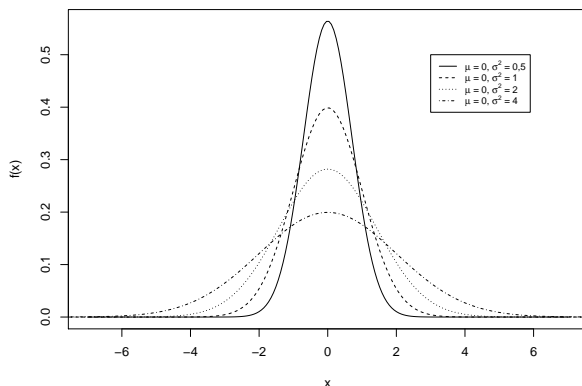
Grafy hustot rovnoměrného rozdělení pro různé hodnoty parametrů  $a, b$  si můžeme prohlédnout na obrázku 41. Jak je z obrázku vidět, hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je nulová mimo interval  $(a, b)$  a na intervalu  $(a, b)$  nabývá takové konstantní hodnoty, aby platilo  $P(a \leq X \leq b) = 1$ .

Jediným v seriálu uvedeným diskretním rozdělením je Poissonovo rozdělení, které je určeno jedním parametrem  $\lambda > 0$ . Pravděpodobnosti nabývání jednotlivých hodnot jsou určeny vztahem

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

Grafy pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot pro různé hodnoty parametru můžeme vidět na obrázku 42. Opět je vidět, že se tvar závislosti pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot při změně parametru  $\lambda$  nemění, ale pouze škáluje v horizontálním směru.

- c) Vygenerované histogramy můžeme vidět na obrázcích 43, 44, 45 a 46. Z těchto obrázků lze odhadovat, že první vzorek dat pochází z rovnoměrného rozdělení, druhý vzorek z Poissonova rozdělení, třetí vzorek z normálního rozdělení



Obr. 39: Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení pro různé hodnoty parametru  $\sigma^2$

a čtvrtý vzorek z exponenciálního rozdělení. Je nutno poznamenat, že toto jsou pouze odhady, nelze to chápat jako rigorózní matematický postup určování typu rozdělení.

- d) Takováto náhodná veličina může nabývat jen konečně mnoha hodnot (jen hodnot 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6), proto se bude jednat o diskrétní náhodnou veličinu. Rozdělení náhodné veličiny  $X$  tedy bude určeno výčtem pravděpodobností nabývání těchto jednotlivých hodnot, jelikož podle zadání budou všechny výsledky hodu touto kostkou stejně pravděpodobné, musí platit

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, P(X = 2) = \frac{1}{6}, \dots, P(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

Toto je rozdělení náhodné veličiny  $X$ .

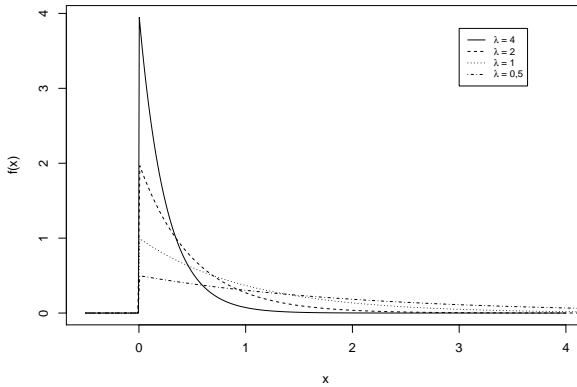
Pro výpočet střední hodnoty a rozptylu pouze dosadíme do vzorců uvedených výše. Dostáváme, že střední hodnota  $X$  je rovna

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Když nyní známe střední hodnotu náhodné veličiny  $X$ , můžeme spočítat i její rozptyl, který je roven

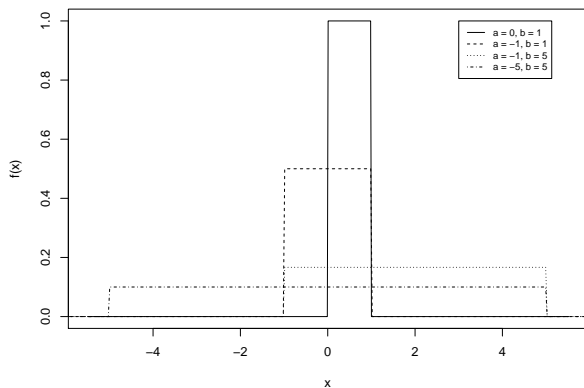
$$\text{var}X = (1 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}.$$

Bonus: Tento úkol je velice jednoduchý, stačí ze seznamu nejčastěji se vyskytujících rozdělení náhodných veličin vybrat dvě vhodná rozdělení (různá) a vhodně navolit jejich parametry tak, aby se jejich střední hodnota i rozptyl rovnaly. Jako

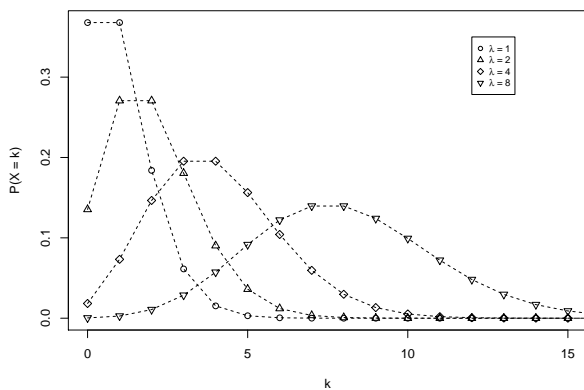


Obr. 40: Graf hustoty pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení pro různé hodnoty parametru  $\lambda$ .

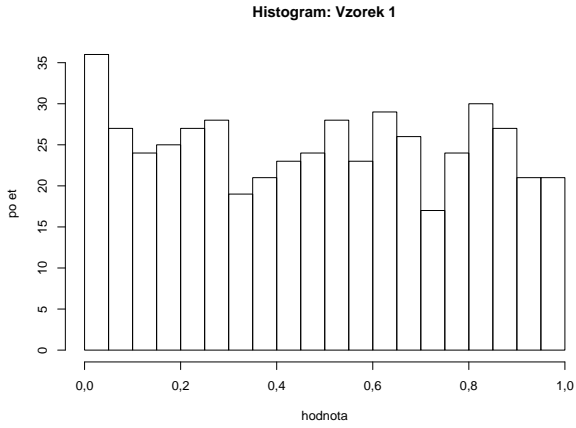
příklad můžeme uvést náhodné veličiny  $X$  a  $Y$ , kde  $X$  bude mít exponenciální rozdělení  $Exp(2)$  a náhodná veličina  $Y$  bude mít rozdělení  $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ . Pomocí vzorců uvedených v seriálu si každý může ověřit, že střední hodnota obou těchto náhodných veličin jsou rovny  $\frac{1}{2}$  a rozptyl obou těchto náhodných veličin je roven  $\frac{1}{4}$ . Takovýchto příkladů lze samozřejmě vymyslet mnoho, pro udělení bonusových bodů stačí uvést jeden.



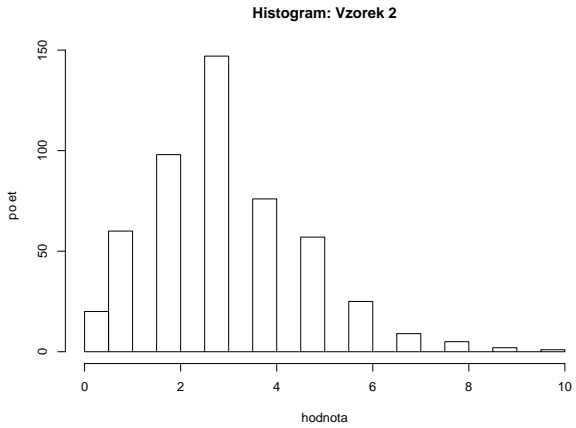
Obr. 41: Grafy hustot pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení pro různé hodnoty parametrů  $a, b$ .



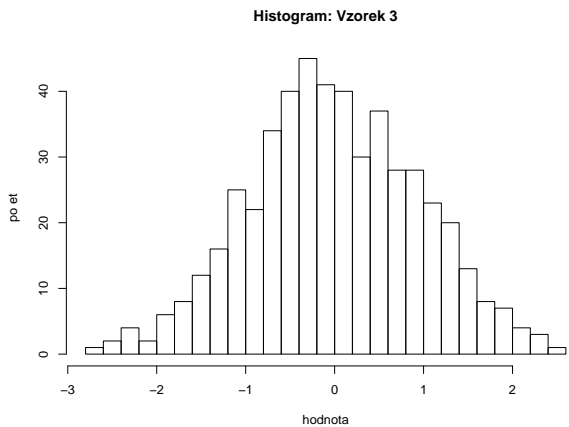
Obr. 42: Pravděpodobnosti nabývání jednotlivých hodnot Poissonova rozdělení pro různé hodnoty parametru  $\lambda$ .



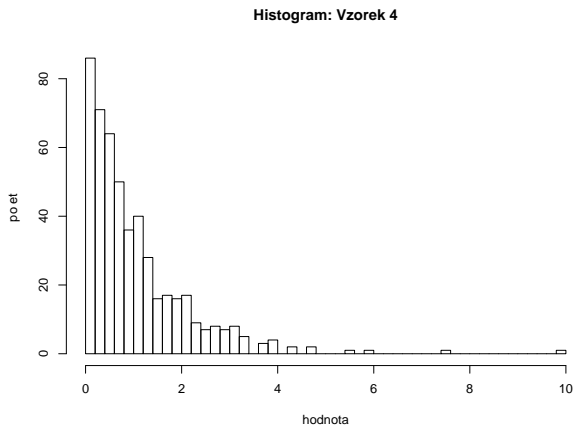
Obr. 43: Histogram prvního vzorku dat.



Obr. 44: Histogram druhého vzorku dat.



Obr. 45: Histogram třetího vzorku dat.



Obr. 46: Histogram čtvrtého vzorku dat.

## Úloha II.S ... odhadnutelná

- a) Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu slouží intervalový odhad střední hodnoty v normálním rozdělení a uveďte jeho fyzikální interpretaci (postačí vlastními slovy popsat následující: fyzikální interpretace odhadu střední hodnoty, rozdíl mezi (bodovým) odhadem a intervalovým odhadem, nejdůležitější vlastnost intervalového odhadu, metoda zkráceného zápisu intervalového odhadu, nejistota měření). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- b) V příloženém datovém souboru mereni1.csv najdete naměřené hodnoty určité fyzikální veličiny (uvažujte nejistotu typu B  $s_B = 0,1$ ). Zkonstruujte z těchto dat bodový i intervalový odhad měřené fyzikální veličiny a krátce interpretujte jejich význam.
- c) Předpokládejme, že měříme určitou fyzikální veličinu a víme, že vlivem použité metody měření budou mít naměřená data rozptyl rovný konstantě  $c$  (nejistotu typu B neuvažujte). Kolik musíme přibližně provést měření, abychom dosáhli nejistoty měření menší než  $s$ ?
- d) V příloženém datovém souboru mereni2.csv najdete data měření stejné fyzikální veličiny dvěma různými způsoby (nejistotu typu B neuvažujte). U které metody byla použita měřicí aparatura přesnější? Který způsob měření dal přesnější výsledek měření? U obou otázek své závěry i stručně zdůvodněte.

Bonus: Zkuste odvodit, že v normálním rozdělení je výběrový rozptyl nestranným odhadem skutečného rozptylu (tj. střední hodnota výběrového rozptylu je rovna skutečnému rozptylu). Pro řešení tohoto úkolu můžete použít libovolné zdroje (pokud je budete rádně citovat).

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí R. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit příložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka R.

- a) Detailní odpověď na tuto otázku dostanete přečtením 2. dílu seriálu, na tomto místě si vysvětlíme jen ty opravdu nejdůležitější pojmy. V nejjednodušším matematickém modelu se výsledek jednoho měření určité fyzikální veličiny považuje za náhodnou veličinu, která má normální rozdělení a jejíž střední hodnota je rovna skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny. Znamená to, že předpokládáme, že neexistuje žádný systematický posun měřených hodnot oproti skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny (případně se s takovýmto systematickým posunem vypořádáváme jinak). Odhadování střední hodnoty z realizací náhodné veličiny (tedy z naměřených dat) je vlastně odhadování skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny.

Hodnotu měřené fyzikální veličiny nejsme nikdy schopni odhadnout přesně. Proto si definujeme dva typy odhadů: bodový odhad a intervalový odhad. Bodový odhad střední hodnoty je číslo, které na základě naměřených dat nejlépe odhaduje skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny (v případě normálně rozdělené náhodné veličiny je to výběrový průměr). Protože je bodový odhad

nepřesný, ve většině případů si s ním nevystačíme a musíme zkonstruovat ještě intervalový odhad. Intervalový odhad je interval, který s nějakou předem zvolenou pravděpodobností pokrývá skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny. Intervalový odhad nám navíc oproti bodovému odhadu dává i jistou informaci o tom, jak přesně jsme měřenou veličinu změřili.

V případě normálního rozdělení má intervalový odhad tvar

$$(\bar{x}_n - t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} s_K, \bar{x}_n + t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} s_K),$$

kde  $\bar{x}_n$  je výběrová střední hodnota (výběrový průměr),  $s_K$  je kombinovaná nejistota měření a  $t_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$  je kvantil Studentova rozdělení. Jeho nejdůležitější vlastnost je ta, že s pravděpodobností  $1 - \alpha$  pokrývá skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny.

Takovýto intervalový odhad se velmi často zkráceně zapisuje jen jako

$$(\bar{x}_n \pm s_K).$$

Tuto zkrácenou formu zápisu můžeme vnímat tak, že pokud zvolíme hladinu spolehlivosti rovnou 0,68 (tedy  $\alpha = 0,32$ ) a máme dostatečný počet měření (alespoň 30), potom se intervalový odhad zkrátí právě na tento zápis (díky tomu, že pro tyto hodnoty  $\alpha$  a  $n$  platí  $t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} \doteq 1$ ). Případně z této zkrácené formy zápisu lze jednoduše přidáním příslušného kvantilu vyrobit intervalový odhad o jiné hladině spolehlivosti.

Nejistota měření (kombinovaná) je právě člen  $s_K$ . Vznikne jako kvadratický součet nejistoty typu A a nejistoty typu B

$$s_K = \sqrt{s_A^2 + s_B^2},$$

kde nejistota typu A je nejistota vyplývající z náhodnosti měřených dat (je přesně rovna výběrové směrodatné odchylce průměru) a nejistota typu B je nejistota plynoucí z ostatních příčin (hlavně nepřesnosti měřidla). Kombinovaná nejistota vyjadřuje jak přesně jsme měřenou fyzikální veličinu změřili. Při fyzikálních experimentech je cílem mít co možná nejmenší kombinovanou nejistotu měření (tj. mít fyzikální veličinu změřenu co možná nejpřesněji).

- b) V příloženém datovém souboru se nachází 42 měření určité fyzikální veličiny. Jako první spočteme výběrovou střední hodnotu (výběrový průměr) podle vzorce

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

V našem konkrétním příkladě po dosazení dostáváme

$$\bar{x}_n = \frac{1}{42} \sum_{i=1}^{42} x_i \doteq 42,1.$$

Toto je náš bodový odhad měřené fyzikální veličiny.



Pro konstrukci intervalového odhadu nejprve spočítáme výběrovou směrodatnou odchylku podle vzorce

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}.$$

V našem konkrétním případě dostáváme

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{41} \sum_{i=1}^{42} (x_i - 41,1)^2} = 1,7.$$

Následně spočteme výběrovou směrodatnou odchylku průměru (tedy nejistotu typu A) podle vzorce

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

V našem konkrétním případě dostáváme

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{42}} \doteq 0,27.$$

Nyní musíme vyjádřit kombinovanou nejistotu měření podle vzorce

$$s_K = \sqrt{s_A^2 + s_B^2},$$

kde  $s_A$ ,  $s_B$  jsou nejistoty měření typu A a typu B. V našem konkrétním případě dostáváme

$$s_K = \sqrt{0,27^2 + 0,1^2} \doteq 0,29.$$

Na tomto místě už můžeme zkonstruovat intervalový odhad, který bude mít tvar

$$(42,1 - t_{n,1-\frac{\alpha}{2}}, 0,29, 42,1 + t_{n,1-\frac{\alpha}{2}}, 0,29), \quad (73)$$

kde za  $\alpha$  můžeme dosadit podle požadované hladiny spolehlivosti. Intervalový odhad zapíšeme standardním zkráceným zápisem jako

$$(42,1 \pm 0,3).$$

Interpretace bodového odhadu měřené fyzikální veličiny je, že je to na základě naměřených dat nejlepší odhad skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny. Interpretace intervalového odhadu (73) je, že pravděpodobnost pokrytí skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny tímto intervalem je 68 %.

- c) Pokud neuvažujeme nejistotu měření typu B, potom kombinovaná nejistota měření bude rovna pouze nejistotě typu A. Nejistota měření typu A je rovna výběrové směrodatné odchylce průměru, která je vyjádřena vztahem

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Na tomto místě si musíme uvědomit, že výběrová směrodatná odchylka  $S_n$  je odhadem skutečné směrodatné odchylky a pro velký počet měření bude její hodnota velmi blízká právě skutečné směrodatné odchylce. Skutečná směrodatná odchylka je ale rovna odmocnině skutečného rozptylu. Proto bude platit

$$s_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \approx \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{c}{n}}.$$

Podmínka v úloze je, aby byla tato nejistota měření menší než nějaká konstanta  $s$ , řešíme tedy nerovnici

$$\sqrt{\frac{c}{n}} < s.$$

Tuto nerovnici můžeme pomocí jednoduchých algebraických úprav (s využitím znalosti toho, že obě strany nerovnice mají nezápornou hodnotu) vyřešit. Získáme podmínku

$$\frac{c}{s^2} < n.$$

Vidíme tedy, že musíme provést alespoň přibližně  $\frac{c}{s^2}$  měření.

- d) S využitím výpočetního prostředí  $R$  můžeme stejným postupem, jaký jsme využili v bodu  $b$ ), vypočítat výběrovou střední hodnotu, výběrový průměr, výběrovou směrodatnou odchylku a výběrovou směrodatnou odchylku průměru (tj. nejistotu měření typu A) pro data pocházející z obou metod měření. Nebudeme už jednotlivě ukazovat dosazování do vzorců, jen uvedeme, že výsledky můžeme vidět v tabulce 24.

Tab. 24: Základní popisné statistiky pro data pocházející z obou metod měření

	$n$	$S_n^2$	$S_n$	$s_n$	$\overline{x_n}$
metoda 1	100	6,46	2,54	0,25	9,97
metoda 2	10	3,62	1,90	0,60	10,03

Jak je vidět z tabulky, obě metody měření vedou na velmi podobný bodový odhad skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny. Výběrový rozptyl pro první metodu měření je výrazně větší než pro druhou metodu měření. Toto ukazuje, že měřicí aparatura a postup měření, který byl použit u první metody měření, byl méně přesný. Na druhou stranu je ale vidět, že výběrová směrodatná odchylka průměru (která v tomto případě vyjadřuje kombinovanou nejistotu měření neboť nejistotu typu B neuvažujeme) je výrazně větší pro data pocházející z druhé metody měření. Přesněji jsme tedy měřenou fyzikální veličinu naměřili první metodou měření. Na tomto místě je důležité uvědomit si rozdíl mezi přesností měřicí aparatury a výslednou kombinovanou nejistotou měření, ta je totiž (jako v tomto případě) výrazně ovlivněna počtem provedených měření. Tedy i s méně přesnou měřicí aparaturou lze změřit přesnější výsledek, pokud provedeme více měření.

Jako poznámku na závěr by se slušelo zmínit, že pro co nejpřesnější určení měřené fyzikální veličiny by bylo v tomto případě optimální zkombinovat data naměřená pomocí obou metod. To ale zatím neumíme, dozvíme se to až v příštím díle seriálu.

Bonus: Tato úloha je v podstatě jednoduchá, jen je potřeba nezaleknout se poněkud ošklivějších výrazů a neztratit se v algebraických operacích. Budeme v podstatě jen počítat střední hodnotu náhodné veličiny.

V rámci algebraických úprav vzniklého výrazu budeme využívat několik vztahů, které nebyly uvedeny v textu seriálu neboť se tam nevešly. Vaším úkolem bylo nastudovat si je. My je zde pro jistotu všechny uvedeme.

Pro dvě nezávislé<sup>1</sup> náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  platí

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y].$$

Střední hodnota se chová lineárně, tedy pro náhodnou veličinu  $X$  a dvě konstanty  $a, b$  platí

$$E[aX + b] = a \cdot E[X] + b.$$

Pro náhodnou veličinu  $X$  s rozdělením  $N(\mu, \sigma^2)$  platí

$$E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2.$$

Toto vychází z alternativního vzorce na rozptyl

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (EX)^2,$$

kde víme, že  $\text{var}(X) = \sigma^2$  a  $EX = \mu$ , z čehož už jen vyjádřením dostaneme požadovanou rovnost.

Dále je potřeba upozornit na to, že nelze nijak jednoduše spočítat výraz

$$E[(\overline{X_n})^2].$$

Jedinou možností je rozepsat si ho jako součin dvou závorek a dále algebraicky upravovat. Jako poslední uvedeme, že jsme používali následující zápis

$$\sum_{i=1}^n E[X_i^2] = E[X_1^2] + \dots + E[X_n^2] = n \cdot E[X_1^2].$$

Tento zápis lze použít neboť náhodné veličiny  $X_1, \dots, X_n$  mají všechny stejné rozdělení.

Toto je vše, co potřebujeme k úpravě našeho výrazu (kromě práce se sumami a závorkami). Nyní stačí jen upravovat výraz pro střední hodnotu výběrového rozptylu a nakonec dostaneme požadovaný výsledek.

<sup>1</sup>Nezávislost je zde důležitá, bez ní by tento vzorec neplatil.

$$\begin{aligned}
 E\left[\widehat{\sigma_n^2}\right] &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i - \overline{X_n})^2\right] = \\
 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\{E[X_i^2] - 2E[X_i\overline{X_n}] + E[(\overline{X_n})^2]\} = \\
 &= \frac{n}{n-1}E[X_1^2] - \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^nE[X_i\overline{X_n}] + \frac{n}{n-1}E[(\overline{X_n})^2] = \\
 &= \frac{n}{n-1}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{2n}{n-1}E[(\overline{X_n})^2] + \frac{n}{n-1}E[(\overline{X_n})^2] = \\
 &= \frac{n}{n-1}[\sigma^2 + \mu^2 - E[(\overline{X_n})^2]] = \\
 &= \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^nE[X_iX_j]\right] = \\
 &= \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^nE[X_i^2] + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1, i\neq j}^nE[X_iX_j]\right] = \\
 &= \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{n}{n^2}E[X_1^2] - \frac{n(n-1)}{n^2}\mu^2\right] = \\
 &= \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \mu^2\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\right)\right] = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2.
 \end{aligned}$$

### Úloha III.S ... limitní

- a) Zkuste vlastními slovy popsat postup konstrukce intervalových odhadů střední hodnoty v případě obecného rozdělení měřených dat (postačí vlastními slovy popsat následující: centrální limitní věta a předpoklady jejího použití, kovariance a korelace (a jejich odhady), vícerozměrná centrální limitní věta a předpoklady jejího použití, zákon šíření nejistot a kdy ho lze použít). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- b) V příloženém datovém souboru mereni3-1.csv najdete výsledky měření určité fyzikální veličiny  $v$ . Předpokládejme, že si nemůžeme být jisti, zda mají měřená data normální rozdělení. Vyjádřete nejistotu měření této fyzikální veličiny (nejistotu typu B neuvažujte), zkonstruuje intervalové odhady na základě CLV a stručně interpretujte jeho význam. Jak by se změnilly výsledky a interpretace, pokud bychom měli k dispozici jen čtvrtinu měření (řekněme první čtvrtinu dat z datového souboru)?

- c) Předpokládejme, že naším cílem je naměřit fyzikální veličiny  $x$  a  $y$ , které budeme chtít využít pro dosazení do vzorce

$$v = \frac{1}{2}xy^2.$$

Předpokládejme, že díky znalosti způsobu měření jsme si jisti, že jsou všechna měření na sobě nezávislá a ze zpracování naměřených dat měření máme následující výsledky, které jsou založeny na velkém počtu měření (více než 30 měření každé fyzikální veličiny)

$$\begin{aligned}x &= (5,2 \pm 0,1), \\y &= (12,84 \pm 0,06).\end{aligned}$$

Určete odhad fyzikální veličiny  $v$  a nejistotu měření fyzikální veličiny  $v$ .

Nápověda: Mohly by se vám hodit následující vztahy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}xy^2 \right) &= \frac{1}{2}y^2, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}xy^2 \right) &= xy.\end{aligned}$$

- d) Pomocí simulace ve výpočetním prostředí R demonstруйте platnost centrální limitní věty. Tj. generujte  $n$ -tice nezávislých realizací náhodné veličiny, která nemá normální rozdělení (pro tento případ použijte exponenciální, rovnoměrné a Poissonovo rozdělení s libovolně zvolenými parametry) a na histogramu ukažte, že pokud na data provedeme následující transformaci

$$\sqrt{n} \frac{x_n - \mu}{S_n},$$

takto transformovaná data už budou rozdělena přibližně podle normálního rozdělení  $N(0, 1)$ . (Součástí hodnocení bude i hodnocení vzhledu grafů – zejména vhodně zvolené popisky os a legenda.)

Bonus: Předpokládejme, že naším cílem je naměřit fyzikální veličiny  $x$  a  $y$ , které budeme chtít dosadit do vzorce

$$v = x^2 \sin y.$$

Uvažujme nejobecnější model měření (tj. měřená data nemají normální rozdělení a měření různých fyzikálních veličin na sobě mohou být závislá). V datovém souboru mereni3-2.csv máme výsledky měření fyzikálních veličin  $x$  a  $y$ , určete nejistotu určení veličiny  $v$  a zkonstruujte pro ni intervalový odhad.

- a) Detailní odpověď na tuto otázku dostanete pouze přečtením 3. dílu seriálu, v tomto vzorovém řešení uvedeme jen ty nejdůležitější věci.

Centrální limitní věta je důležitá pro zpracování měřených dat (zejména pro intervalový odhad střední hodnoty), o kterých si nemůžeme být jisti, že mají normální rozdělení. Pokud si označíme měřená data jako  $x_1, \dots, x_n$ , potom

centrální limitní věta říká, že následující transformace našich dat (musíme si uvědomit, že jde o náhodnou veličinu, neboť závisí na náhodných datech a nemůžeme tedy dopředu znát její hodnotu)

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n}$$

konverguje v distribuci k rozdělení  $N(0, 1)$ , nezávisle na tom, jaké rozdělení<sup>2</sup> měla naše původní data. Matematicky zapsáno platí

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Pokud chceme v praxi používat aproximace založené na CLV, musíme si uvědomit, že potřebujeme mít dostatečně velký počet měření, aby byla takováto aproximace přesná. Obecné pravidlo zní:

- Pokud máme alespoň 30 měření, potom je aproximace pomocí CLV velice přesná.
- Pokud máme alespoň 10 měření, potom je aproximace pomocí CLV pouze přibližná, ale stále poměrně přesná.
- Pokud máme méně než 10 měření, potom může být aproximace pomocí CLV značně nepřesná.

Pokud měříme více fyzikálních veličin najednou, musíme se zabývat také tím, zda nejsou naše měření závislá. Závislost našich měření (tedy vlastně náhodných veličin) měříme pomocí kovariance a korelace, které jsou pro dvě náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  definovány následovně

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E[(X - EX)(Y - EY)] , \\ \text{corr}(X, Y) &= (X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}} . \end{aligned}$$

Korelace je vhodně znormovaná kovariance (může nabývat jen hodnot od  $-1$  do  $1$ ) a vyjadřuje, jak moc jsou náhodné veličiny lineárně závislé (hodnoty kolem  $0$  značí malou závislost, hodnoty blízké  $1$  nebo  $-1$  značí velkou závislost). Pokud jsou veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé, potom je kovarianční i korelační koeficient roven  $0$  (obrácená implikace ale neplatí). V praxi je důležité vědět, jak z naměřených dat odhadovat kovarianční a korelační koeficient. K tomu slouží výběrový kovarianční koeficient (resp. výběrový korelační koeficient) definovaný jako

$$\begin{aligned} \widehat{\text{cov}}(X, Y) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) (y_i - \bar{y}_n) , \\ \widehat{\text{corr}}(X, Y) &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n) (y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{S_{X,n}^2 \cdot S_{Y,n}^2}} . \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Ve skutečnosti je zde ještě podmínka na konečný rozptyl.

Na tomto místě musíme poznamenat, že při výpočtu výběrového kovariančního (resp. korelačního) koeficientu musíme vždy používat dvojice odpovídajících si měření. Nelze postupovat tak, že si měření libovolně spárujeme.

Existuje i vícerozměrná verze CLV, která se zaobírá případem, kdy chceme změřit  $k$  fyzikálních veličin  $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ , dosadit je do vzorce

$$v = f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)})$$

a následně chceme určit nejistotu měření fyzikální veličiny  $v$  a konstruovat pro ni intervalové odhady. Vícerozměrná centrální limitní říká, že v tomto případě platí

$$\frac{f(\overline{v_n^{(1)}}, \dots, \overline{v_n^{(k)}}) - f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)})}{\sqrt{S^2}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

kde  $\overline{v_n^{(i)}}$  je výběrový průměr měření  $i$ -té fyzikální veličiny,  $v^{(i)}$  je skutečná hodnota  $i$ -té fyzikální veličiny a  $S^2$  je vhodný normalizační koeficient, který se spočte podle vzorce

$$\left( \frac{\partial f}{\partial v^{(1)}}(\bar{v}) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial v^{(k)}}(\bar{v}) \right) \begin{pmatrix} S_{n_1}^2 & \dots & \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(1)}, v^{(k)})}{\sqrt{n_1 n_k}} \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(2)}, v^{(1)})}{\sqrt{n_2 n_1}} & \dots & \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(2)}, v^{(k)})}{\sqrt{n_2 n_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(k)}, v^{(1)})}{\sqrt{n_k n_1}} & \dots & S_{n_k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v^{(1)}}(\bar{v}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial v^{(k)}}(\bar{v}) \end{pmatrix}, \quad (74)$$

kde

$$\bar{v} = \left( \overline{v_{n_1}^{(1)}}, \dots, \overline{v_{n_k}^{(k)}} \right).$$

Pro použití vícerozměrné CLV opět platí podobná pravidla jako pro použití jednorozměrné CLV, tedy:

- Pokud máme alespoň 30 měření každé fyzikální veličiny  $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ , potom je aproximace pomocí vícerozměrné CLV velmi přesná.
- Pokud máme alespoň 10 měření každé fyzikální veličiny, potom je aproximace pomocí vícerozměrné CLV pouze přibližná, ale stále poměrně přesná.
- Pokud máme méně než 10 měření nějaké fyzikální veličiny, potom může být aproximace pomocí vícerozměrné CLV značně nepřesná.

V případě, že si ze znalosti průběhu experimentu můžeme být jistí, že jsou všechna měření různých fyzikálních veličin na sobě nezávislá (což je v praxi velmi časté), se vzorec na výpočet členu  $S^2$  velmi zjednoduší na tvar

$$S = \sqrt{\left( \frac{\partial f(v_{n_1}^{(1)})}{\partial v^{(1)}} \right)^2 s_{n_1}^{(1)2} + \dots + \left( \frac{\partial f(v_{n_k}^{(k)})}{\partial v^{(k)}} \right)^2 s_{n_k}^{(k)2}}.$$

Tomuto vzorci se často říká zákon šíření nejistot (případně zákon propagace nejistot).

V obou případech můžeme konstruovat intervaly spolehlivosti pro výslednou fyzikální veličinu  $v$ . Ze znění vícerozměrné CLV lze odvodit, že platí

$$P \left( f \left( \overline{v_n^{(1)}}, \dots, \overline{v_n^{(k)}} \right) - u_{1-\frac{\alpha}{2}} S < f \left( v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \right) < f \left( \overline{v_n^{(1)}}, \dots, \overline{v_n^{(k)}} \right) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} S \right) \simeq 1 - \alpha .$$

Tedy intervalový odhad pro skutečnou hodnotu výsledné fyzikální veličiny  $v$  bude mít tvar

$$\left( f \left( \overline{v_n^{(1)}}, \dots, \overline{v_n^{(k)}} \right) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} S \right) .$$

Fyzikové tento intervalový odhad zapisují zkráceně jen jako

$$(f(\overline{v_n}) \pm S)$$

a členu  $S$  říkají standardní odchylka.

- b) V příloženém datovém souboru se nachází 40 naměřených dat, se kterými budeme pracovat. Nejprve musíme spočítat výběrový průměr našich dat podle vzorce

$$\overline{x_{40}} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} x_i = 9,826 .$$

Dále spočítáme výběrovou směrodatnou odchylku průměru podle vzorce

$$s_{40} = \sqrt{\frac{1}{40(40-1)} \sum_{i=1}^{40} (x_i - \overline{x_n})^2} = 0,036 .$$

V našem případě, kdy neuvažujeme žádnou nejistotu typu B, vyjadřuje výběrová směrodatná odchylka nejistotu měření.

Podle teorie odvozené v seriálu bude mít asymptotický intervalový odhad založený na CLV o spolehlivosti  $(1 - \alpha)$  tvar

$$\left( \overline{x_n} \pm s_n u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) .$$

Pokud použijeme standardní zkrácený zápis, vyjde nám následující výsledek

$$(9,83 \pm 0,04) .$$

Jelikož jsme použili velké množství dat (tj. více než 30), bude aproximace pomocí CLV už velice přesná. Tedy takovýto interval bude mít pravděpodobnost pokrytí skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny velice blízkou 68%.

Pokud bychom uvažovali, že máme k dispozici jen první čtvrtinu měření (tj. prvních 10 měření), dostali bychom jiné hodnoty výběrového průměru a výběrové směrodatné odchylky průměru. Konkrétně bychom dostali

$$\overline{x_{10}} = 9,92 ,$$

$$s_{10} = 0,06 .$$



Intervalový odhad pro měřenou fyzikální veličinu by v tomto případě byl následující (používáme zkrácený zápis)

$$(9,92 \pm 0,06) .$$

Je zřejmé, že za použití jiných vstupních dat dostaneme jiné číselné výsledky (i na tomto je vidět, že výběrový průměr a výběrová směrodatná odchylka průměru jsou náhodné veličiny). V tomto případě jsme provedli méně měření, takže jsme vcelku logicky dostali větší nejistotu měření. V tomto případě je ale nutné poznamenat, že náš intervalový odhad byl založen na poměrně málo měřeních (jen 10 měření), takže v tomto případě aproximace pomocí CLV nemusí být tolik přesná. Tento interval má tedy pravděpodobnost pokrytí skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny pouze přibližně 68%.

- c) Odhad fyzikální veličiny  $v$  se zkonstruuje jednoduše tak, že do funkce  $f$  dosadíme odhady fyzikálních veličin  $x$  a  $y$ . V našem případě dostaneme

$$\overline{v}_n = f(\overline{x}_n, \overline{y}_n) = \frac{1}{2} \cdot 5,2 \cdot 12,84^2 = 428,65 .$$

V tomto speciálním případě, kdy můžeme měření různých fyzikálních veličin považovat za nezávislé, můžeme na výpočet nejistoty měření fyzikální veličiny  $v$  použít zákon šíření nejistot. Všechny potřebné údaje máme zadané, takže stačí dosadit. V tomto vzorovém řešení budeme dosazování dělat postupně, aby bylo všem jasné, jak jsme na náš výsledek přišli.

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\left(\frac{\partial f(\overline{x}_n)}{\partial x}\right)^2 s_n^{(x)2} + \left(\frac{\partial f(\overline{y}_n)}{\partial y}\right)^2 s_n^{(y)2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \overline{y}_n^{-2}\right)^2 s_n^{(x)2} + (\overline{x}_n \overline{y}_n)^2 s_n^{(y)2}} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 12,84^2\right)^2 \cdot 0,1^2 + (5,2 \cdot 12,84)^2 \cdot 0,06^2} = 9,165 . \end{aligned}$$

Když bychom měli zapsat intervalový odhad pro fyzikální veličinu  $v$  ve zkráceném tvaru, vypadal by následovně

$$(429 \pm 9) .$$

- d) S využitím výpočetního prostředí  $R$  provedeme přesně to, co se píše v zadání. Nejprve si zvolíme přirozené číslo  $n$ . Toto číslo bude v našem modelu představovat počet měření, které při konkrétním experimentu provádíme (budeme volit hodnoty v řádu nízkých desítek nebo jednotek, což je typický počet měření při fyzikálních experimentech). Dále zvolíme počet opakování naší simulace (ideálně zvolit co nejvyšší, v našem případě zvolíme 10 000). Nyní už můžeme začít se samotnou simulací. V každé jednotlivé cyklu vygenerujeme  $n$  nezávislých realizací náhodné veličiny s určitým rozdělením, které není normální (v našem případě používáme rozdělení  $Exp(2)$ ,  $R(0, 10)$  a  $Poiss(2)$ ). Z těchto  $n$  realizací spočteme následující transformaci

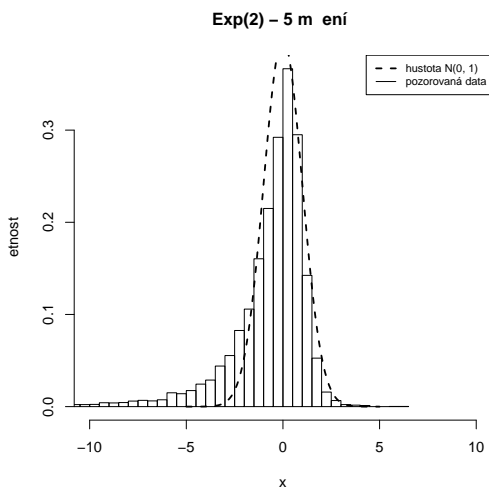
$$t = \sqrt{n} \frac{\overline{x}_n - \mu}{S_n} , \quad (75)$$

kde  $\mu$  představuje skutečnou střední hodnotu rozdělení, ze kterého jsme generovali použité realizace náhodné veličiny (tedy  $\frac{1}{2}$  u exponenciálního rozdělení, 5 u rovnoměrného rozdělení a 2 u Poissonova rozdělení). Toto opakujeme celkem 10 000krát, čímž získáme transformace

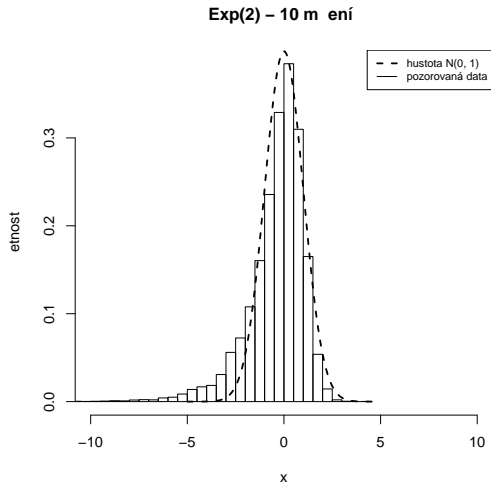
$$t_1, \dots, t_{10\,000}.$$

Pokud centrální limitní věta platí, potom by mělo být rozdělení takto transformovaných dat velice podobné rozdělení  $N(0, 1)$ . Toto ověříme na histogramu a budeme zkoumat závislost podoby s rozdělením  $N(0, 1)$  na volbě  $n$ .

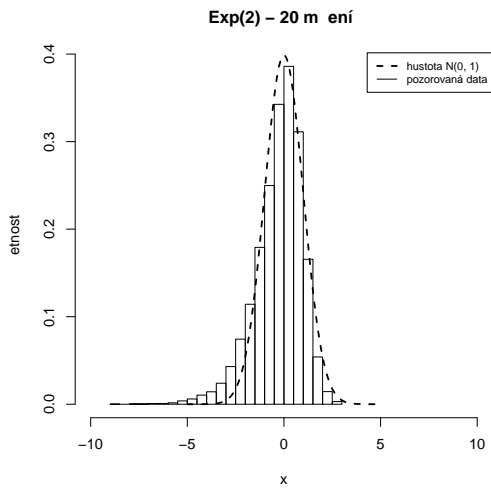
Nyní už k samotným výsledkům. Příslušné histogramy můžeme vidět na obrázcích 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54 a 55. Ze všech těchto obrázků je vidět, že limitní rozdělení transformace měřených dat (75) je právě rozdělení  $N(0, 1)$ , přesně jak říká CLV. Je dobré si povšimnout, že rychlost konvergence je pro různá rozdělení měřených dat různá. Pokud ale provedeme alespoň 30 měření, je už rozdělení transformace měřených dat velice podobné rozdělení  $N(0, 1)$ , tedy aproximace pomocí CLV už bude v takovýchto případech velice přesná.



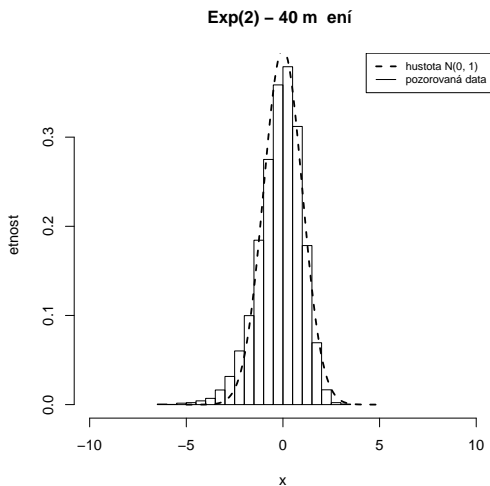
Obr. 47: Histogram transformace měřených dat pocházejících z exponenciálního rozdělení pro 5 měření.



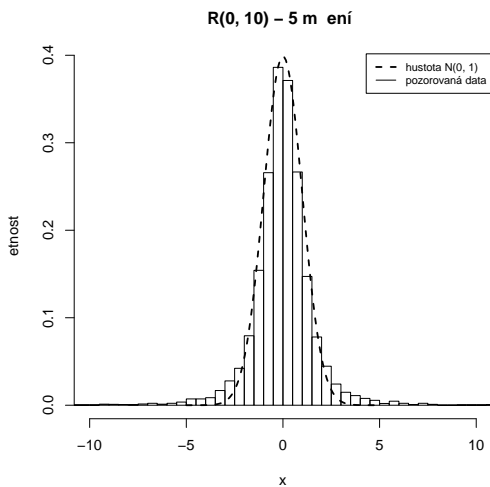
Obr. 48: Histogram transformace měřených dat pocházejících z exponenciálního rozdělení pro 10 měření.



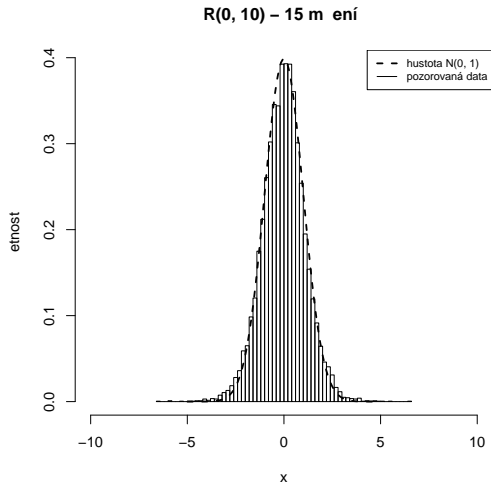
Obr. 49: Histogram transformace měřených dat pocházejících z exponenciálního rozdělení pro 20 měření.



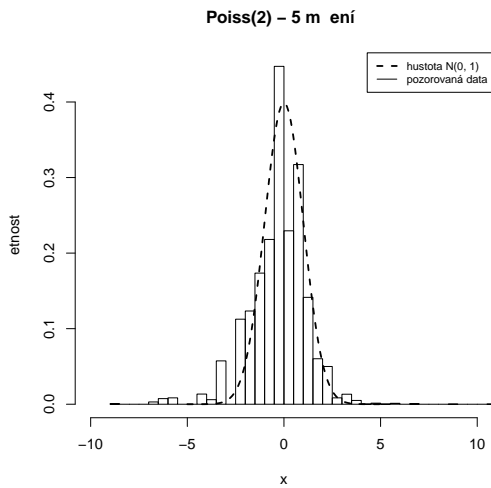
Obr. 50: Histogram transformace měřených dat pocházejících z exponenciálního rozdělení pro 40 měření.



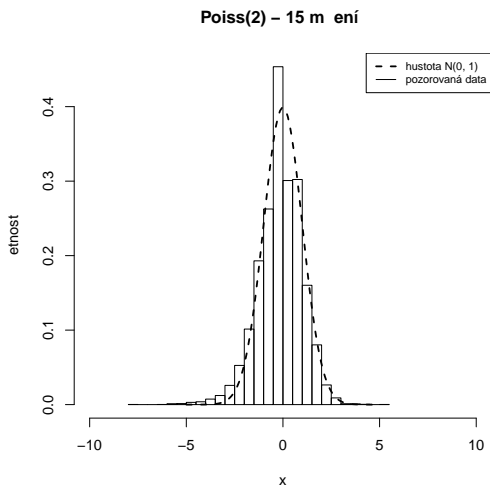
Obr. 51: Histogram transformace měřených dat pocházejících z rovnoměrného rozdělení pro 5 měření.



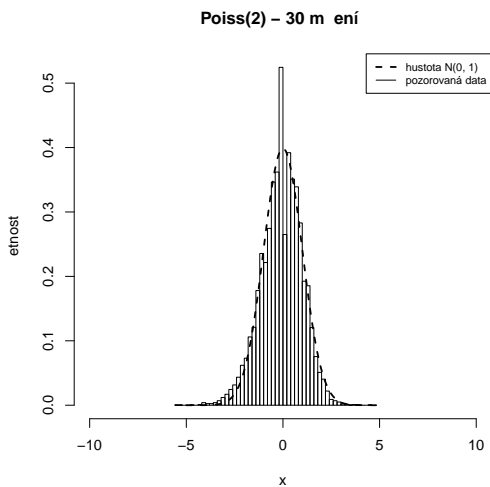
Obr. 52: Histogram transformace měřených dat pocházejících z rovnoměrného rozdělení pro 15 měření.



Obr. 53: Histogram transformace měřených dat pocházejících z Poissonova rozdělení pro 5 měření.



Obr. 54: Histogram transformace měřených dat pocházejících z Poissonova rozdělení pro 15 měření.



Obr. 55: Histogram transformace měřených dat pocházejících z Poissonova rozdělení pro 30 měření.

*Bonus:* Jediné, co pro vyřešení tohoto úkolu potřebujeme, je dosadit do vícerozměrné centrální limitní věty. Nejprve vypočítáme nejistotu určení fyzikální veličiny podle vzorce (74). K tomu budeme potřebovat znát parciální derivace funkce  $f$ , které mají tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 2x \sin y, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= x^2 \cos y.\end{aligned}$$

Nyní už můžeme psát, čemu se rovná nejistota určení fyzikální veličiny  $v$

$$S^2 = \left( \overline{2x_n \sin y_n} \quad \overline{x_n^2 \cos y_n} \right) \begin{pmatrix} \frac{s_n^{(x)^2}}{n} & \frac{\widehat{\text{cov}}(x, y)}{n} \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(x, y)}{n} & \frac{s_n^{(y)^2}}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{2x_n \sin y_n} \\ \overline{x_n^2 \cos y_n} \end{pmatrix},$$

kde používáme standardní značení. Za použití matematického softwaru (výpočetní prostředí  $R$ ) dostáváme, že nejistota určení veličiny  $v$  je

$$S = 6,03.$$

Odhad veličiny  $v$  získáme pouze dosazením výběrových průměrů do naší funkce, tedy

$$\overline{v}_n = \overline{x}_n^2 \sin \overline{y}_n.$$

Za použití matematického softwaru dostáváme výsledek

$$\overline{v}_n = 51,57.$$

Vícerozměrná centrální limitní věta potom říká, že intervalový odhad pro fyzikální veličinu  $v$  bude tvaru

$$\left( \overline{v}_n \pm S u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right).$$

Pokud použijeme zkrácený zápis intervalového odhadu a dosadíme naše konkrétní číselné výsledky, dostaneme

$$v = (52 \pm 6).$$

Jelikož máme dostatečně velký počet měření obou fyzikálních veličin (tj. více než 30) bude tento intervalový odhad už velice přesný.

Jen pro zajímavost na tomto místě uvedeme, že pokud bychom předpokládali nezávislá data a použili bychom pouze zákon šíření nejistot, dostali bychom výsledek

$$v = (52 \pm 7).$$

Vidíme, že rozdíl v získaných výsledcích není velký, nicméně je nutné poznamenat, že takovýto postup není správný, neboť zanedbává korelaci v našich měřených datech. V jiných příkladech z praxe už může být chyba, které bychom se takovýmto zanedbáním dopustili, velmi velká.

## Úloha IV.S . . . testovací

- a) Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu a jak se používá testování hypotéz (postačí vlastními slovy popsat následující: hypotéza a alternativa, chyba 1. a 2. druhu, hladina testu, testová statistika, kritický obor testu,  $p$ -hodnota testu pro konkrétní naměřená data). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- b) V příloženém datovém souboru testovani1.csv najdete naměřené hodnoty určité fyzikální veličiny. Pomocí jednovýběrového  $t$ -testu otestujte, zda je skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny rovna 20. Dále předpokládejme, že je naším cílem ukázat, že hodnota měřené fyzikální veličiny je větší než 20. Použijte vhodnou jednostrannou modifikaci  $t$ -testu k tomu, abyste toto tvrzení ověřili (dejte si pozor na správné zvolení hypotézy a alternativy).
- c) V příloženém datovém souboru testovani2.csv najdete naměřené hodnoty 2 různých fyzikálních veličin. Představujme si, že se jedná o měření stejné fyzikální charakteristiky ale za různých vnějších podmínek (teplota, tlak atd.). Pomocí dvouvýběrového  $z$ -testu otestujte hypotézu, že hodnota této fyzikální charakteristiky je pro obě volby vnějších podmínek stejná.
- d) Použijte stejná data jako v seriálové úloze z první série a pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu určete, který ze 4 vzorků dat pochází z normálního rozdělení a který vzorek pochází z exponenciálního rozdělení.

**Bonus** Předpokládejte, že máte k dispozici měření 2 fyzikálních veličin (tedy 2 sady naměřených hodnot), kde jsou všechna měření na sobě nezávislá. Odvodte upravený dvouvýběrový  $z$ -test, který by testoval hypotézu, že skutečná hodnota první měřené fyzikální veličiny je dvojnásobek skutečné hodnoty druhé měřené fyzikální veličiny. Pro udělení bodů je nutné a postačuje odvodit podobu testové statistiky a kritického oboru. (Nápověda: Použijte vícerozměrnou verzi CLV, kde vhodně zvolíte funkci  $f$ , a dále postupujte analogicky jako u odvození klasického dvouvýběrového  $z$ -testu)

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí R. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit příložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka R.

- a) Detailní odpověď na tuto otázku dostanete pouze přečtením 3. dílu seriálu, v tomto vzorovém řešení uvedeme jen ty nejdůležitější věci.  
Testování hypotéz se použije v případě, kdy potřebujeme na základě naměřených dat rozhodnout o platnosti nějaké naší domněnky (hypotézy) nebo tvrzení. Jak už jsme rozebírali v předchozích dílech seriálu, reprezentujeme naměřená data jako realizace určité náhodné veličiny (tedy naměřená data jsou náhodná - při každém měření dostáváme jiné hodnoty i když používáme naprosto stejný postup měření). Testování hypotéz lze chápat jako postup, který nám říká, zda jsou naměřená data dostatečně reprezentativní a zda na jejich základě můžeme pronášet závěry o platnosti testované hypotézy (případně jaké jsou pravděpodobnosti, že se dopouštíme špatného závěru).



Hypotéza a alternativa nám říkají, která tvrzení budeme testovat. Vždy je nutné k testované hypotéze sestavit alternativu, která bude opačné tvrzení než hypotéza (tj. platí buď hypotéza nebo alternativa, nikdy obě současně a vždy alespoň jedna z nich). Hypotézu a alternativu musíme vždy zapsat pomocí matematických výrazů (nejčastěji rovnosti nebo nerovnosti) a parametrů uvažovaného modelu.

Jelikož jsou měřená data náhodná, můžeme (ač s malou pravděpodobností) naměřit v podstatě jakákoliv data a nikdy si nemůžeme být úplně jisti, jestli je závěrečné rozhodnutí správné. Při formulaci závěru můžeme udělat celkem 2 druhy chyb (označili jsme si je jako chyba 1. a 2. druhu). Chyba 1. druhu znamená, že jsme zamítli hypotézu, která ale ve skutečnosti platí. Chyba 2. druhu znamená, že jsme nezamítli hypotézu, která ve skutečnosti neplatí (viz Tab. 25).

naše rozhodnutí / skutečný stav	platí hypotéza	platí alternativa
zamítáme hypotézu	chyba 1. druhu	správně
nezamítáme hypotézu	správně	chyba 2. druhu

Tab. 25: Tabulka možných rozhodnutí a chyb

Hladina testu udává pravděpodobnost chyby 1. druhu, značí se obvykle  $\alpha$  a její hodnota se obvykle volí jako  $\alpha = 0,05$  (v případě důležitých experimentů nižší). Tuto hodnotu si musíme vždy zvolit na začátku zpracování dat.

Testová statistika je transformace naměřených dat, na základě které se budeme následně rozhodovat o (ne)zamítání hypotézy. Tato transformace musí být zvolena tak, abychom znali její rozdělení za platnosti testované hypotézy (za předpokladu, že máme dostatečný počet měření, stačí asymptotické rozdělení). Kritický obor testu je množina hodnot testové statistiky (většinou interval nebo sjednocení dvou intervalů), ve kterém za platnosti hypotézy leží hodnota testové statistiky jen s pravděpodobností  $\alpha$  (hladina testu). Jinými slovy je to množina, kde by za platnosti hypotézy hodnota testové statistiky nejspíše ležet neměla, ale za platnosti alternativy je velká pravděpodobnost, že zde bude hodnota testové statistiky ležet. Když máme v praxi provést nějaký test s použitím naměřených dat, stačí spočítat realizovanou hodnotu testové statistiky a zjistit, zda leží v kritickém oboru nebo nikoliv. Pokud leží realizovaná hodnota testové statistiky v kritickém oboru potom zamítáme platnost hypotézy, v opačném případě platnost hypotézy nezamítáme.

$p$ -hodnota testu pro konkrétní naměřená data představuje jakýsi alternativní způsob rozhodování o (ne)zamítání platnosti hypotézy (výsledek je vždy naprosto stejný jako v případě postupu na základě kritického oboru, ale postup rozhodování je jiný). Když máme konkrétní naměřená data, potom definujeme  $p$ -hodnotu jako pravděpodobnost, že bychom za platnosti hypotézy naměřili data, která by ještě více protirečila testované hypotéze než ta data, která jsme naměřili. Rozhodování o (ne)zamítání platnosti hypotézy na základě  $p$ -hodnoty je jednoduché, hypotézu zamítáme právě tehdy když je  $p$ -hodnota menší než

námi předem určená hladina testu  $\alpha$  (v tomto případě je pravděpodobnost naměření dat ještě více protirečících hypotéze malé, tedy jsme naměřili data, která hypotéze hodně protirečí). Statistické programy obvykle upřednostňují rozhodování na základě  $p$ -hodnoty, kterou většinou spočítají numericky.

- b) Skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny označíme jako  $\mu_x$ . Jelikož považujeme naměřená data za realizace náhodné veličiny s normálním rozdělením, střední hodnotou  $\mu_x$  a konečným rozptylem můžeme na testování takové hypotézy použít jednovýběrový  $t$ -test. Zvolená hladina bude standardně rovna  $\alpha = 0,05$ . Testová hypotéza a alternativa bude ve tvaru

$$H : \mu_x = 20 ,$$

$$A : \mu_x \neq 20 .$$

Realizovaná hodnota testové statistiky při použití přiložených dat vyjde jako

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\overline{x_n} - \mu_0}{S_n} \doteq 2,52 .$$

Kritický obor testu je tvaru

$$C = (-\infty, t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) ,$$

$$C = (-\infty, -2,06) \cup (2,06, \infty)$$

a příslušná  $p$ -hodnota pro naměřená data vyšla

$$p \doteq 0,0187 .$$

Na základě porovnání realizované hodnoty testové statistiky s kritickým oborem a na základě  $p$ -hodnoty dospíváme k závěru, že zamítáme platnost hypotézy. Jako závěr tedy uvedeme, že na základě naměřených dat můžeme prohlásit (na hladině spolehlivosti  $\alpha = 0,05$ ), že hodnota měřené fyzikální veličiny není rovna  $\mu_0 = 20$ .

Při řešení druhé části úkolu je důležité správně zvolit testovou hypotézu a alternativu. Volbu budeme provádět přesně tak, jak je popsáno v seriálu a sice tak, že budeme chtít vyvrátit opak tvrzení, které chceme potvrdit. Budeme tedy usilovat o to vyvrátit platnosti tvrzení, že skutečná hodnota měřené fyzikální je menší než 20. Toto opačné tvrzení, které chceme vyvrátit tedy zvolíme jako testovanou hypotézu. Testová hypotéza a alternativa tedy budou ve tvaru

$$H : \mu_x \leq 20 ,$$

$$A : \mu_x > 20 .$$

Realizovaná hodnota testové statistiky při použití přiložených dat vyjde stejně jako v předchozím případě, neboť používáme stejnou testovou statistiku

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\overline{x_n} - \mu_0}{S_n} \doteq 2,52 .$$

Kritický obor tohoto testu se ale bude lišit

$$C = (t_{n-1, 1-\alpha}, \infty),$$

$$C = (1,71, \infty)$$

a příslušná  $p$ -hodnota pro naměřená data vyšla

$$p \doteq 0,009.$$

Vidíme tedy, že rozhodnutí (jak na základě porovnání realizované hodnoty testové statistiky s kritickým oborem tak na základě  $p$ -hodnoty) je zamítnout platnost testované hypotézy. Tímto jsme tedy potvrdili platnost alternativy (na hladině spolehlivosti  $\alpha = 0,05$ ), tedy tvrzení že skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny je větší než 20.

- c) Označíme  $\mu_X$  a  $\mu_Y$  skutečné hodnoty měřené fyzikální charakteristiky za dvou různých vnějších podmínek. Cílem našeho testu bude otestovat hypotézu, že jsou tyto dvě hodnoty stejné, k čemuž použijeme dvouvýběrový  $z$ -test. Tento test byl podrobně popsán v textu seriálů, proto ho už na tomto místě nebudeme podrobně popisovat a jen popíšeme, jak se na takovýto případ konkrétně použije. Testovaná hypotéza a alternativa mají následující podobu

$$H : \mu_X - \mu_Y = 0,$$

$$A : \mu_X - \mu_Y \neq 0.$$

Realizovaná hodnota testové statistiky za použití naměřených dat vychází jako

$$Z_{n,m} = \frac{\bar{x}_n - \bar{y}_m - \vartheta}{\sqrt{\frac{S_{n,x}^2}{n} + \frac{S_{m,y}^2}{m}}} \doteq 3,02.$$

Kritický obor je v tomto případě ve tvaru

$$C = (-\infty, u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty),$$

$$C = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, \infty).$$

$p$ -hodnota testu pro naše naměřená data nabývá hodnoty

$$p \doteq 0,0043.$$

Vidíme, že na základě porovnání realizované hodnoty testové statistiky s kritickým oborem i na základě  $p$ -hodnoty testu zamítáme testovanou hypotézu na hladině spolehlivosti  $\alpha = 0,05$ . Závěrem tedy lze říci, že jsme prokázali (na hladině spolehlivosti  $\alpha = 0,05$ ), že hodnota měřené fyzikální charakteristiky závisí na vnějších podmínkách (tedy za dvou různých zkoumaných vnějších podmínek je hodnota této fyzikální charakteristiky navzájem odlišná).

- d) Budeme používat jednovýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test, který byl popsán v textu seriálu a ve vzorovém skriptu, zde jen připomeneme jeho nejdůležitější charakteristiky. Necht máme nějaké spojitě rozdělení  $S$  (v našem případě normální a exponenciální rozdělení) a naměřená data, potom můžeme pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu otestovat následující hypotézu a alternativu

$H$  : měřená data mají rozdělení  $S$ ,

$A$  : měřená data nemají rozdělení  $S$ .

Testovou statistiku a kritický obor testu už v tomto případě uvádět nebudeme, neboť jsou příliš komplikované<sup>3</sup>, postačí nám výstup ze statistického programu  $R$ , kde bude uvedena  $p$ -hodnota pro konkrétní naměřená data.

Postupovat budeme tak, že pro každou sadu naměřených hodnot (celkem 4 sady měření) provedeme dvakrát Kolmogorovův-Smirnovův test, kde budeme rozdělení  $S$  volit jako normální a exponenciální. Pokud pro konkrétní sadu naměřených hodnot Kolmogorovův-Smirnovův test zamítne hypotézu, že tato data pocházejí z normálního (nebo exponenciálního) rozdělení, můžeme si být poměrně jistí, že z tohoto rozdělení opravdu nepocházejí (na hladině  $\alpha = 0,05$ ). V opačném případě (tedy nezamítnutí hypotézy) sice nemůžeme naše výsledky interpretovat jako přímé potvrzení testované hypotézy, ale budeme v tomto případě považovat za dostatečný důvod k tomu tvrdit, že hypotéza je platná<sup>4</sup>. Výsledky takovýchto testů můžeme vidět v Tabulce 26.

Na základě těchto výsledků vidíme, že jediný vzorek, u kterého jsme nezamítali hypotézu o normálním rozdělení, je Vzorek 3. Podobně jediný vzorek, u kterého jsme nezamítali hypotézu o exponenciálním rozdělení, je Vzorek 4. Jak už bylo diskutováno dříve, budeme tyto výsledky považovat za dostatečné k tomu, abychom tvrdili, že data ve Vzorku 3 pocházejí z normálního rozdělení a data ve Vzorku 4 pocházejí z exponenciálního rozdělení. Pozorný řešitel tyto výsledky porovná se závěry o rozdělení, ze kterého měřená data pocházejí, které jsme udělali na základě histogramů v seriálové úloze v 1. sérii, a zjistí, že jsou tyto závěry stejné.

Tab. 26:  $p$ -hodnoty Komogorovova-Smirnonovova testu pro všechny sady měřených dat a testovaných rozdělení.

	Normální rozdělení	Exponenciální rozdělení
Vzorek 1	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$
Vzorek 2	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$
Vzorek 3	0,92	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$
Vzorek 4	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	0,46

<sup>3</sup>Hlubaví čtenáři si mohou tyto údaje vyhledat na internetu, např. [https://en.wikipedia.org/wiki/Kolmogorov-Smirnov\\_test](https://en.wikipedia.org/wiki/Kolmogorov-Smirnov_test).

<sup>4</sup>V praxi se výsledky takovýchto testů ještě kombinují s dalšími metodami (např. zkoumáním pomocí histogramů) a na základě kombinovaných výsledků se formuluje závěr.

*Bonus:* Na tomto místě si musíme připomenout znění vícerozměrné centrální věty, která byla uvedena ve 3. díle seriálu. Vícerozměrná verze CLV říká, že pokud měříme několik fyzikálních veličin, čímž dostaneme odhady těchto veličin s nejistotou měření

$$\left(\overline{v^{(1)}} \pm s_{n_1}^{(1)}\right), \dots, \left(\overline{v^{(k)}} \pm s_{n_k}^{(k)}\right),$$

potom pro tyto naměřené hodnoty a libovolnou diferencovatelnou funkci  $f$  bude platit

$$\frac{f\left(\overline{v^{(1)}}, \dots, \overline{v^{(k)}}\right) - f\left(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}\right)}{\sqrt{S^2}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

kde  $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$  jsou skutečné hodnoty měřených fyzikálních veličin a výraz  $S^2$  ve jmenovateli je určen vzorcem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v^{(1)}}(\bar{v}), \dots, \frac{\partial f}{\partial v^{(k)}}(\bar{v})\right) \begin{pmatrix} s_{n_1}^2 & \dots & \widehat{\text{cov}}(v^{(1)}, v^{(k)}) \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(2)}, v^{(1)})}{\sqrt{n_2 n_1}} & \dots & \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(2)}, v^{(k)})}{\sqrt{n_2 n_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(k)}, v^{(1)})}{\sqrt{n_k n_1}} & \dots & s_{n_k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v^{(1)}}(\bar{v}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial v^{(k)}}(\bar{v}) \end{pmatrix}.$$

Jelikož pracujeme se dvěma fyzikálními veličinami, budeme používat dvourozměrnou verzi CLV (tedy  $k = 2$ ). Označíme  $\mu_X$  a  $\mu_Y$  skutečné hodnoty měřených fyzikálních veličin, naším cílem bude otestovat, zda platí

$$\mu_X = 2\mu_Y.$$

Jako alternativu budeme uvažovat jednoduše negaci této hypotézy. Hypotézu a alternativu můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$H : \mu_X - 2\mu_Y = 0,$$

$$A : \mu_X - 2\mu_Y \neq 0.$$

Nyní budeme předpokládat, že naše testová hypotéza platí a ve dvourozměrné CLV zvolíme funkci  $f$  ve tvaru

$$f(x, y) = x - 2y.$$

Tuto volbu děláme proto, aby nám za platnosti testované hypotézy vyšlo

$$f(\mu_X, \mu_Y) = 0.$$

Testová statistika, kterou označíme jako  $T$ , bude úplně stejná jako výraz ve znění CLV, tedy

$$T = \frac{f(\overline{\mu_X}, \overline{\mu_Y}) - f(\mu_X, \mu_Y)}{\sqrt{S^2}} = \frac{\overline{\mu_X} - 2\overline{\mu_Y}}{\sqrt{S^2}}, \quad (76)$$

kde  $\overline{\mu_X}$ ,  $\overline{\mu_Y}$  označují výběrové průměry měření první a druhé fyzikální veličiny. Pro tuto speciální volbu funkce  $f$  také dostaneme

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{s_{n_1}^2} & \widehat{\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{n_1 n_2}}} \\ \widehat{\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{n_1 n_2}}} & \widehat{s_{n_2}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Z vícerozměrné CLV plyne, že testová statistika (76) za platnosti testované hypotézy konverguje v distribuci k rozdělení  $N(0, 1)$ . Určení podoby kritického oboru testu pro hladinu testu  $\alpha$  bude tedy velmi podobné jako odvození podoby kritického oboru testu pro klasický dvouvýběrový  $z$ -test (podrobně popsáno v textu seriálu). Kritický obor tedy bude mít tvar

$$C = (-\infty, u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty),$$

po vyčíslení pro  $\alpha = 0,05$

$$C = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, \infty). \quad (77)$$

Pozorný řešitel si sám rozmyslí, že pravděpodobnost, že za platnosti alternativy padne realizovaná hodnota testové statistiky do kritického oboru se se zvyšujícím počtem měření blíží 1 (naprosto stejná úvaha jako je použita v seriálu při odvozování podoby kritického oboru pro dvouvýběrový  $z$ -test). Kritický obor je tedy zvolen optimálně.

Závěrem tedy můžeme říci, že jsme odvodili podobu statistického testu k testování hypotézy, že jedna měřená fyzikální veličina má dvojnásobnou hodnotu než druhá měřená fyzikální veličina, testová statistika tohoto testu je tvaru (76) a kritický obor je tvaru (77). Na závěr poznamenejme, že úplně analogicky by se dal odvodit podobný test, kde bychom testovali hypotézu, že hodnota jedné měřené fyzikální veličiny je  $k$  násobkem hodnoty druhé měřené fyzikální veličiny (kde  $k$  může být libovolné reálné číslo).

## Úloha V.S ... lineární

- Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu a jak se používá lineární regrese (postačí vlastními slovy popsat následující: dva hlavní případy aplikace lineární regrese, používaný model, předpoklady modelu, postup volby prokládané funkce, způsob vyjádření nejistot měření, základní grafické metody regresní diagnostiky). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- V přiloženém datovém souboru linreg1.csv naleznete výsledky určitého fyzikálního experimentu, ve kterém jsme měřili dvojice dat  $(x_i, y_i)$ . Naměřenými daty chceme proložit teoretickou funkci, kterou je v tomto případě parabola, tedy funkce tvaru

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Hlavním cílem experimentu je určit hodnotu koeficientu  $a$  (tedy koeficient u  $x^2$ ). Určete hodnotu tohoto koeficientu včetně nejistoty měření. Není potřeba provádět regresní diagnostiku.

- c) V přiloženém datovém souboru `linreg2.csv` naleznete výsledky určitého fyzikálního experimentu, ve kterém jsme měřili dvojice dat  $(x_i, y_i)$ . Naměřenými daty chceme proložit teoretickou funkci, kterou je v tomto případě logaritmická funkce, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + b \cdot \log(x).$$

Hlavním cílem zpracování dat je vykreslit graf naměřených dat spolu s proloženou teoretickou závislostí. Vykreslete takovýto graf (včetně intervalového odhadu pro prokládanou funkci) a stručně ho okomentujte (takovýto graf musí mít všechny náležitosti). Není potřeba provádět regresní diagnostiku.

- d) Předpokládejme, že máme naměřeny dvojice dat  $(x_i, y_i)$  a chceme jimi proložit lineární funkční závislost, tedy funkci tvaru

$$f(x) = a + bx.$$

Odvodte přesnou podobu vzorce na výpočet hodnoty odhadů regresních koeficientů. Můžete použít libovolnou ze dvou metod představených v seriálu a také libovolné jiné zdroje, pokud je budete řádně citovat. Vzorec chceme opravdu odvodit (tj. uvést výpočet), nikoliv pouze napsat.

Bonus: V úlohách b) a c) proveďte regresní diagnostiku a diskutujte, zda jsou splněny všechny potřebné předpoklady (pokud to jde, proveďte také test vhodnosti prokládané funkce a diskutujte jeho výsledky).

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí R. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka R.

- a) Detailní odpověď na tuto otázku dostaneme jen přečtením pátého dílu seriálu. Na tomto místě popíšeme jen opravdu nejzákladnější věci.

Lineární regrese se může použít v případech, kdy máme naměřená data ve formě dvojic  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  a chceme jimi proložit teoretickou funkční závislost, která je lineární v neznámých regresních koeficientech (více o používaném modelu v dalším odstavci). Dva hlavní důvody, proč používat lineární regresi jsou, že chceme nepřímou změřit nějakou fyzikální veličinu (tedy hodnotu vybraného regresního koeficientu) nebo že chceme vykreslit graf s naměřenými daty, ve kterém bude pro názornost vykreslena teoretická funkční závislost.

Nyní si blíže popíšeme model, který při aplikaci lineární regrese pro naše data předpokládáme. Lineární regresní model předpokládá, že měřená data splňují vztah

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 f_1(x_i) + \dots + \beta_k f_k(x_i) + \varepsilon_i,$$

kde  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  jsou neznámé regresní koeficienty, které chceme odhadovat pomocí naměřených dat,  $f_1(x), \dots, f_k(x)$  jsou zvolené prokládané funkce a  $\varepsilon_i$  je náhodná nepřesnost měření (tedy náhodná veličina).

Lineární regresní model má 4 předpoklady, kterými jsou

- Správná volba prokládané funkce.
- Stejný rozptyl pro všechna měření.
- Nezávislost jednotlivých měření.
- Normální rozdělení našich měření.

Fyzik by se měl vždy snažit při měření dat zajistit splnění těchto předpokladů (hlavně předpoklad o nezávislosti jednotlivých měření) a po použití metod lineární regrese zkontrolovat, zda byly všechny potřebné předpoklady splněny (o způsobu ověřování splnění předpokladů v dalších odstavcích).

Abychom minimalizovali riziko špatné volby prokládané funkce, je dobré volit jen takové funkce, které mají určité teoretické fyzikální opodstatnění. Pokud toto nebudeme dodržovat, vystavujeme se nebezpečí, že prokládanou funkci zvolíme špatně a všechny naše výsledky budou neplatné.

Podobně jako při měření jedné fyzikální veličiny můžeme i v případě lineární regrese vyjádřit odhady regresních koeficientů a prokládané funkce včetně nejistot měření. V textu seriálu byly uvedeny přesné vzorce na výpočet těchto nejistot, které zde nebudeme opakovat. V praxi je za nás bude vždy numericky počítat matematický software.

Jak bylo řečeno v předchozích odstavcích, vždy by se měla ověřit platnost předpokladů použitého modelu lineární regrese. K tomu se používají residua modelu definovaná jako

$$u_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 f_1(x_i) - \dots - \hat{\beta}_k f_k(x_i),$$

kde  $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k$  jsou odhadnuté hodnoty regresních koeficientů. Pokud byly všechny předpoklady použitého lineárního regresního modelu splněny, měla by být residua navzájem nezávislá a neměla by vykazovat žádnou (ani lokální) závislost na nezávisle proměnné. Toto se může následně ověřovat na vhodných grafech residuí (např. residua oproti nezávisle proměnné, residua oproti hodnotám proložené funkce, residua oproti posunutým residuům atd.).

- b) Ve výpočetním prostředí  $R$  načteme poskytnutý datový soubor na pomoci lineární regrese naměřenými daty proložíme funkci tvaru

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Výpočetní prostředí  $R$  spočte podle vzorců uvedených v textu seriálu pro zadaný model odhady regresních parametrů včetně nejistot měření a uvede je na výstupu. Pro tato konkrétní data a prokládanou funkci dostaneme odhad regresního koeficientu u  $x^2$

$$\hat{a} \doteq 1,98$$

a nejistotu měření tohoto koeficientu

$$s_a \doteq 0,10.$$



Když použijeme zkrácený zápis, můžeme psát, že jsme nepřímým měřením určili hodnotu koeficientu  $a$  jako

$$a = (1,98 \pm 0,10) .$$

c) Ve výpočetním prostředí  $R$  proložíme poskytnutými daty funkci tvaru

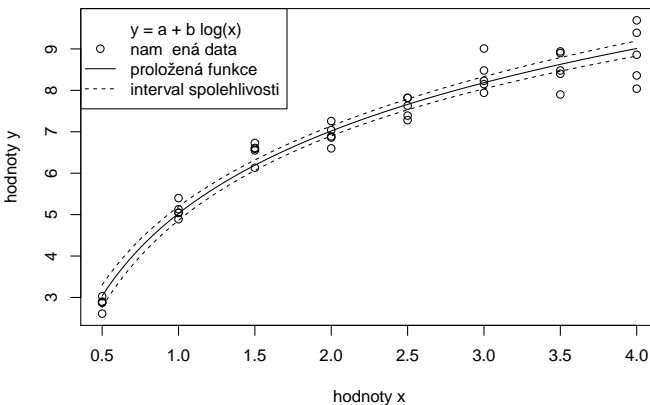
$$f(x) = a + b \cdot \log(x) .$$

Výpočetní prostředí  $R$  spočítá odhady regresních koeficientů včetně nejistot měření podle vzorců uvedených v textu seriálu. Pro naše konkrétní data dostaneme hodnoty

$$a = (5,0 \pm 0,08) ,$$

$$b = (2,87 \pm 0,09) ,$$

kde využíváme klasické zkrácený zápis nejistot měření. Na Obr. 56 můžeme vidět měření včetně proložené funkce a intervalu spolehlivosti pro prokládanou funkci s hladinou spolehlivosti 95%. Interval spolehlivosti je poměrně úzký, což značí, že jsme pomocí naměřených dat určili prokládanou funkci poměrně přesně. Nemělo by nás nijak překvapit, že mnoho naměřených bodů (většina) padne mimo interval spolehlivosti pro prokládanou funkci. Toto je způsobeno tím, že když zkombinujeme informaci ze všech měření pomocí lineární regrese, jsme schopni určit hodnoty prokládané funkce velice přesně.



Obr. 56: Graf s naměřenými daty, proloženou funkcí závislosti a 95% intervalem spolehlivosti pro prokládanou funkci.

Z tohoto obrázku můžeme vidět, že proložená funkce na naměřená data sedí poměrně dobře, ale je možné, že je mírně porušen předpoklad homoscedasticity

(vidíme, že rozptyl měřených hodnot závisí na nezávisle proměnné). Ověřování splnění všech předpokladů se budeme podrobněji věnovat v bonusové části tohoto vzorového řešení.

- d) V textu seriálu byly zmíněny celkem 2 metody, jak se dají vyjádřit odhady regresních parametrů v lineární regresi pomocí naměřených dat. Ve vzorovém řešení pro jistotu uvedeme oba možné postupy.

i Jako první vyjádříme tyto odhady nalezením minima součtu čtverců pomocí jejich parciálních derivací, které položíme rovny nule a vyřešíme příslušné rovnice (obecný postup hledání extrému funkcí více proměnných). Nejprve si musíme vyjádřit součet čtverců

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2.$$

Tento součet čtverců nyní parciálně zderivujeme podle obou proměnných  $a$  a  $b$  a tyto parciální derivace položíme rovny 0, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(a, b)}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n -2(y_i - a - bx_i) = 0, \\ \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - a - bx_i) = 0. \end{aligned}$$

Nyní musíme nalézt řešení této soustavy rovnic. Úpravami těchto dvou rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i - na - b \sum_{i=1}^n x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - b \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice nyní dostáváme, že platí

$$a = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i - b \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Toto vyjádření můžeme nyní dosadit do druhé rovnice a dostáváme

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) - b \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0.$$

Z této rovnice už se jednoduchými algebraickými úpravami dá odvodit vzorec pro  $b$ , který má tvar

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

Zpětným dosazením potom získáme vzorec pro odhad parametru  $a$  ve tvaru

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

Tímto jsme tedy odvodili vzorce na výpočet regresních koeficientů pomocí minimalizace součtu čtverců residuí v našem lineárním regresním modelu.

Nyní si v rychlosti uvedeme, jak by se dalo postupovat druhou alternativní cestou, kterou jsme zmínili v textu seriálu. Nejprve si musíme uvědomit, jak vypadá matice modelu a vektor naměřených hodnot. V našem konkrétním případě budou mít tvar

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Nyní stačí tuto matici a vektor dosadit do vzorce na výpočet odhadů regresních koeficientů

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T \mathbf{Y},$$

Pro snadnější výpočet budeme postupně vyčíslovat uvedené matice. Nejprve se budeme zabývat maticí  $\mathbb{X}^T \mathbb{X}$ , vyčíslíme tuto matici

$$\mathbb{X}^T \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}.$$

Nyní si musíme spočítat inverzní matici  $(\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1}$ . Budeme postupovat klasickým způsobem, že si vedle této matice napíšeme jednotkovou matici a budeme dělat stejné řádkové úpravy na obě matice až dostaneme místo původní matice jednotkovou matici. Matice, která se potom objeví na místě původní jednotkové matice bude hledaná inverzní matice.

$$\left( \begin{array}{cc|cc} n & \sum_{i=1}^n x_i & 1 & 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} n & \sum_{i=1}^n x_i & 1 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 & -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc|cc} n & 0 & 1 + \frac{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} & - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ 0 & 1 & \frac{-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} & \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} & - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ 0 & 1 & \frac{-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} & \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \end{array} \right).$$

V průběhu těchto úprav jsme používali jen odečítání násobku jednoho řádku od druhého a násobení řádků konstantou. Konkrétně jsme v první úpravě odečetli

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  násobek prvního řádku od druhého. Ve druhé úpravě jsme druhý řádek

vydělili  $\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$ , následně jsme odečetli  $\sum_{i=1}^n x_i$  násobek tohoto řádku od prvního řádku. Ve třetí úpravě jsme pouze vydělili první řádek číslem  $n$  a upravili zlomek do hezčího tvaru.

Nyní si musíme vyčíslit i druhou matici  $\mathbb{X}^T \mathbb{Y}$ . Dostáváme

$$\mathbb{X}^T \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}.$$

Nyní máme vše připraveno k dosažení do vzorce na výpočet hodnot regresních koeficientů, po dosažení dostáváme

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} & - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ \frac{-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} & \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \begin{array}{c} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{2} \\ - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{2} \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{2} \end{array} \right) = \\
 &= \left( \begin{array}{c} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{2}} \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{2}} \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Vidíme, že při použití obou postupů nám vyšly naprosto stejné výsledky, což není nijak překvapivé.

*Bonus:* V bonusu bude naším úkolem provést regresní diagnostiku, kterou jsme v úlohách *b)* a *c)* nedělali.

Začneme úlohou *b)*. K tomu, abychom mohli posoudit, zda jsou všechny předpoklady lineárního regresního modelu v tomto případě splněny, si potřebujeme vykreslit jednotlivé grafy, které jsme detailně popisovali v textu seriálu. Na Obr. 57 můžeme vidět naměřená data a proloženou funkci. Vidíme, že proložená funkce na naměřená data dobře sedí (správně prokládá naměřená data a nejsou vidět žádné známky různého rozptylu měřených dat). Na Obr. 58 můžeme vidět hodnoty residuí vynesené v grafu oproti hodnotám nezávisle proměnné. V tomto grafu můžeme vidět rovnoměrně rozprostřená residua okolo osy  $x$ . Na Obr. 59 můžeme vidět vynesené hodnoty residuí oproti hodnotám proložené funkce. Opět není vidět žádná známka podezřelého chování residuí, která jsou rovnoměrně rozprostřená kolem osy  $x$ . Nakonec ještě musíme podle Obr. 60 zkontrolovat nezávislost měřených hodnot. Na tomto grafu opět nevidíme nic podezřelého, všechna residua jsou náhodně rozprostřena kolem počátku souřadnic s žádnou tendencí shlukování v jednotlivých kvadrantech. Na žádných z těchto grafů jsme nenašli žádnou známku toho, že by byl porušen některý z předpokladů lineárního regresního modelu. Na závěr tedy můžeme říci, že použití lineární regrese bylo v tomto případě bezproblémové a obdržené výsledky můžeme považovat za přesné.

Nyní se budeme zabývat úlohou *c)*. Graf naměřených hodnot a proložené funkce můžeme vidět na Obr. 56. Z tohoto grafu můžeme vidět, že prokládaná funkce na naměřená data sedí poměrně dobře, ale je možné, že budeme mít problém s porušením předpokladu homoscedasticity (můžeme si všimnout, že naměřené hodnoty v pravé části grafu mají větší rozptyl než data na levé straně grafu). Na Obr. 61 můžeme vidět graf residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné. Tento

graf potvrzuje naše podezření o tom, že měřená data nemají stejný rozptyl. I zde je vidět, že residua v pravé části grafu mají větší rozptyl než residua v levé části grafu. Na Obr. 62 můžeme vidět graf residuí oproti hodnotám proložené funkce. I na tomto grafu můžeme pozorovat, že měřená data nemají stejný rozptyl. Na druhou stranu si ale musíme uvědomit, že rozdíl mezi rozptyly není nijak podstatně velký. Na Obr. 63 můžeme vidět graf residuí oproti posunutým residuům. Opět můžeme pozorovat, že residua nemají tendenci shlukovat se v žádném z kvadrantů a jsou rovnoměrně rozptýlena kolem počátku souřadnic, což značí, že naše měření byla nezávislá. Na závěr můžeme říci, že jsme z grafů sice vyzorovali, že naše měření neměla stejný rozptyl, ale porušení tohoto předpokladu není nijak výrazné a bude mít spíše zanedbatelný vliv na platnost výsledků obdržných použitím lineární regrese.

Na závěr ještě provedeme statistický test vhodnosti prokládané funkce v příkladu *c*) (v příkladu *b* jej provést nelze, neboť tam nemáme více měření pro stejné hodnoty nezávisle proměnné). Tento test byl popsán v textu seriálu a proto ho zde nebudeme podrobně opakovat, jen uvedeme, že testová hypotéza a alternativa mají tvar

$H$  : Prokládaná funkce je zvolena správně.

$A$  : Prokládaná funkce není zvolena správně.

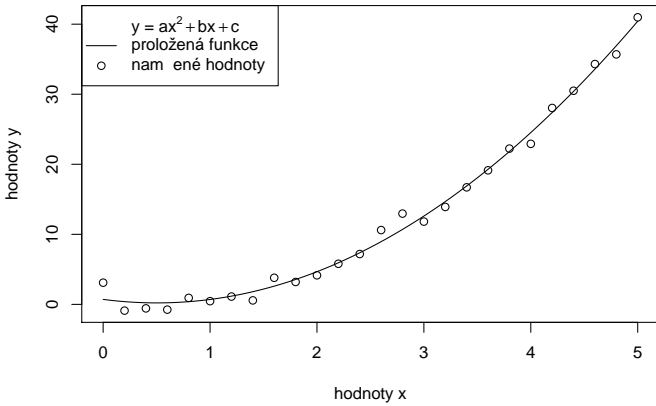
Použitím výpočetního softwaru  $R$  dostaneme hodnotu testové statistiky pro naše konkrétní data

$$CH \doteq 1,4$$

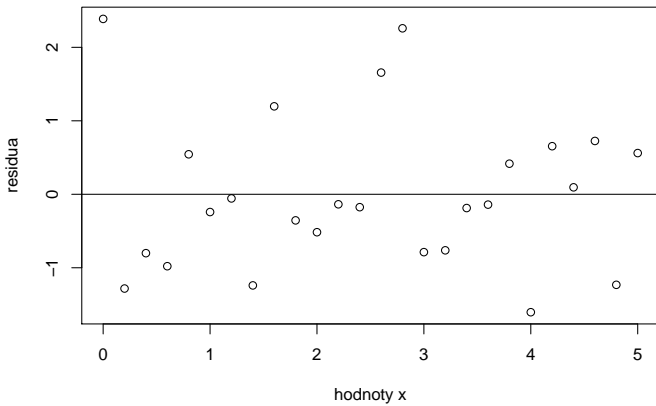
a  $p$ -hodnotu

$$p \doteq 0,24.$$

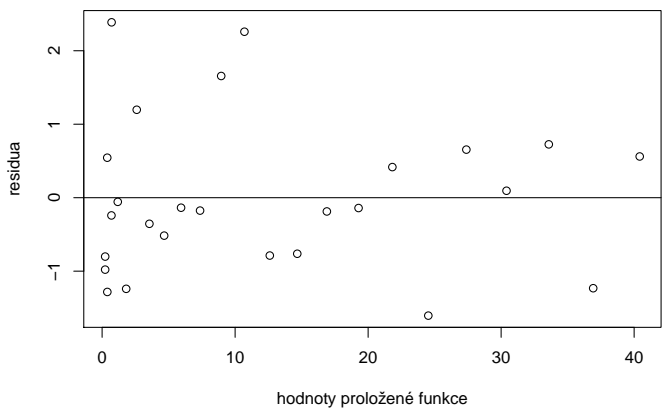
Vidíme tedy, že nezamítáme testovanou hypotézu na hladině spolehlivosti  $\alpha = 0,05$ . Toto značí (společně s grafy popsány výše), že jsme prokládanou funkci zvolili správně.



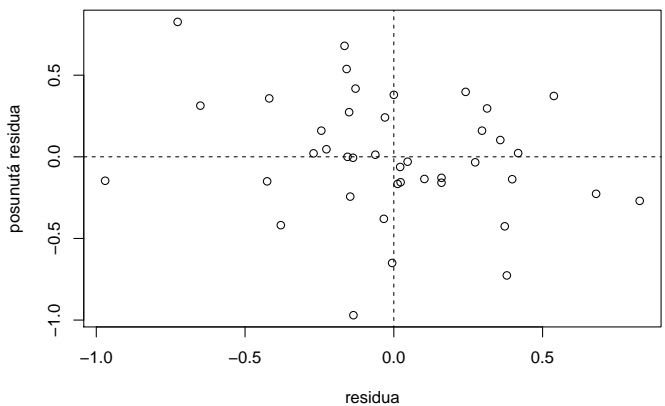
Obr. 57: Graf naměřených hodnot a proložené funkce z příkladu b).



Obr. 58: Graf residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné z příkladu b).

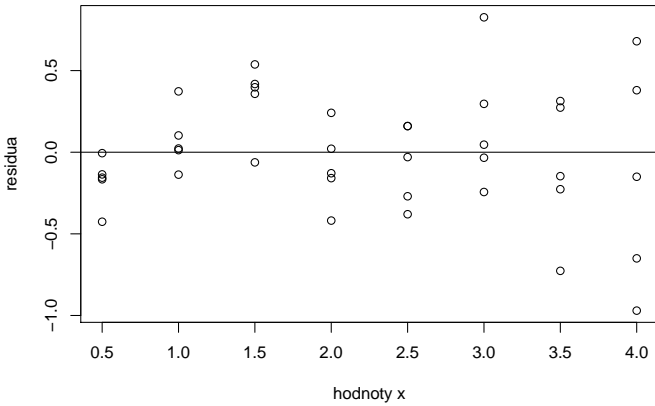


Obr. 59: Graf residuí oproti hodnotám proložené funkce z příkladu *b*).

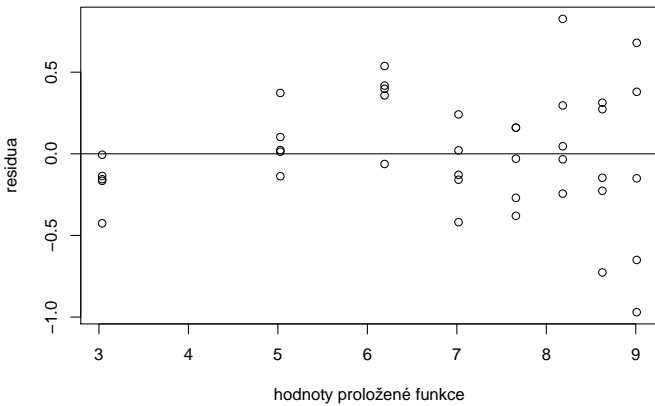


Obr. 60: Graf residuí oproti posunutým residuům z příkladu *b*).

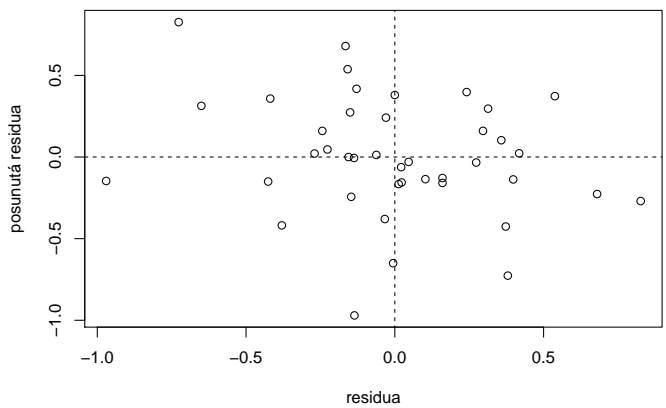




Obr. 61: Graf residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné z příkladu c).



Obr. 62: Graf residuí oproti hodnotám proložené funkce z příkladu c).



Obr. 63: Graf residuí oproti posunutým residuům z příkladu *c*).

## Úloha VI.S . . . nelineární

- a) Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu a jak se používá nelineární regrese (postačí vlastními slovy popsat následující: model nelineární regrese, způsob odhadu regresních koeficientů, vyjádření nejistot odhadů regresních koeficientů a hodnot prokládané funkce, statistické testy hodnot regresních koeficientů, identifikovatelnost parametrů a způsob volby prokládané funkce). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- b) V přiloženém datovém souboru `regrese1.csv` naleznete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě sinusoida, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d).$$

Vykreslete graf naměřených hodnot a proložené funkce a stručně ho okomentujte (takovýto graf musí mít všechny náležitosti). Není potřeba dělat regresní diagnostiku.

Nápověda: Dejte si pozor na identifikovatelnost parametrů v tomto modelu a vhodné omezující podmínky na parametr  $c$ .

- c) V přiloženém datovém souboru `regrese2.csv` naleznete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě exponenciála, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + e^{bx+c}.$$

Určete hodnoty odhadů všech regresních koeficientů včetně nejistot měření.

Nápověda: Grafickou metodou ověřte předpoklad homoskedasticity a v případě potřeby pro určení nejistot měření regresních koeficientů použijte Whiteův (sendvičový) odhad kovarianční matice.

- d) V přiloženém datovém souboru `regrese3.csv` naleznete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě hyperbola, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + \frac{1}{bx + c}.$$

Vykreslete graf naměřených dat v podobě průměrů a chybových úseček a proložené funkce a stručně ho okomentujte (takovýto graf musí mít všechny náležitosti). Proveďte regresní diagnostiku.

Bonus: V přiloženém datovém souboru `regrese4.csv` najdete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou závislost, která je ovšem příliš složitá na analytické vyjádření. Proložte těmito daty regresní spliny (s vhodně zvolenými uzly a vhodně zvoleným stupněm).

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí R. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka R.

- a) Detailní odpověď na tuto otázku dostaneme jen přečtením páteho dílu seriálu. Na tomto místě popíšeme jen opravdu nejzákladnější věci.

Nelineární regrese se použije v případech, kdy chceme naměřenými daty prokládat funkci, která není lineární v neznámých regresních koeficientech. Matematický model nelineární regrese je tedy takový, že uvažujeme měřená data ve tvaru

$$y_i = f(x_i, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) + \varepsilon_i,$$

kde  $y_i$  jsou naměřené hodnoty závisle proměnné,  $x_i$  jsou hodnoty nezávisle proměnné a  $\varepsilon_i$  je náhodná nepřesnost měření, o které předpokládáme, že má rozdělení  $N(0, \sigma^2)$ .

Na odhad regresních koeficientů z naměřených dat používáme metodu maximální věrohodnosti, která je v tomto modelu ekvivalentní metodě nejmenších čtverců. Odhady regresních koeficientů tedy volíme tak, aby celkový součet čtverců

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \beta_0, \dots, \beta_k))^2$$

byl co možná nejmenší (odtud název metoda nejmenších čtverců). V případě nelineární regrese už neexistují explicitní vzorce na výpočet hodnot odhadnutých koeficientů, tyto odhady musíme hledat za pomoci numerických metod a matematického softwaru.

Podobně jako v lineární regresi můžeme konstruovat intervaly spolehlivosti pro hodnoty neznámých regresních koeficientů i pro hodnoty prokládané funkce. V případě nelineární regrese už jsou ale vzorce na vyjádření těchto nejistot značně komplikované, proto jsme je v textu seriálu neuváděli. Stačilo nám, že nám tyto nejistoty poskytne matematický software na výstupu. Zmíněné intervaly spolehlivosti mají pro dostatečný počet měření (alespoň 4-5 krát více měření než neznámých regresních koeficientů) následující vlastnosti

$$P\left(\beta_i \in \left(\widehat{\beta}_i \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} s_n^{K_i}\right)\right) \doteq 1 - \alpha,$$

$$P\left(f(x, \beta_0, \dots, \beta_k) \in \left(f(x, \widehat{\beta}_0, \dots, \widehat{\beta}_k) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} s_n^f(x)\right)\right) \doteq 1 - \alpha,$$

kde  $s_n^{K_i}$  je nejistota měření regresního koeficientu a  $s_n^f(x)$  je nejistota měření funkční hodnoty prokládané funkce v bodě  $x$ .

V případě lineární i nelineární regrese můžeme provádět statistické testy o hodnotách regresních koeficientů. Můžeme tedy testovat hypotézy a alternativy typu

$$H : \beta_j = \vartheta,$$

$$A : \beta_j \neq \vartheta,$$

kde  $\vartheta$  je nějaká předem zvolená konstanta. Jako testová statistika se v tomto případě použije následující transformace naměřených dat

$$T = \frac{\widehat{\beta}_j - \vartheta}{s_n^{K_j}},$$

kde  $s_n^{K_j}$  je nejistota měření regresního koeficientu. Kritický obor takového testu má potom tvar

$$C = (-\infty, u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty).$$

Jednoduchou úpravou by se dal tento test upravit k testování jednostranných modifikací zmíněné hypotézy a alternativy.

Stejně jako v lineární regresi je nutné volit za prokládané funkce jen takové funkce, které mají nějaké fyzikální opodstatnění. V opačném případě se vystavujeme velkému riziku špatné volby prokládané funkce. Všechny závěry by potom byly chybné.

V nelineární regresi navíc ještě vyvstává podmínka identifikovatelnosti parametrů našeho modelu. Jednoduše řečeno musí platit, že pro různé volby regresních koeficientů musí být prokládaná funkce jiná. V opačném případě bychom totiž nemohli jednoznačně určit odhady hodnot regresních koeficientů. Pokud máme model s neidentifikovatelnými parametry, tohoto problému se dá vždy zbavit přeparametrizováním pomocí menšího počtu parametrů.

- b) Naměřenými daty chceme prokládat teoretickou funkci tvaru

$$f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d).$$

V tomto momentě si musíme uvědomit, že je to přesně případ, který jsme popisovali v textu seriálu jako problémový z hlediska omezení na hodnoty parametrů a identifikovatelnost parametrů.

Když si vykreslíme jednoduchý graf naměřených hodnot bez prokládané funkce, vidíme, že měřená data mají přibližně tvar sinusoidy s periodou řádově  $\pi$ . Pokud bychom nijak neomezili možnou hodnotu parametru  $c$ , který ovlivňuje periodu sinusoidy, velmi pravděpodobně bychom dostali na výstupu z matematického softwaru velmi velkou hodnotu tohoto koeficientu (neboť pro velkou hodnotu periody by funkce sinus prošla naměřenými daty velmi přesně). Jelikož ale z grafu vidíme, že perioda měřených dat bude poměrně nízká, přidáme ještě omezení na hodnotu parametru  $c$ . Přidáme si podmínku, že odhad parametru  $c$  musí ležet v intervalu

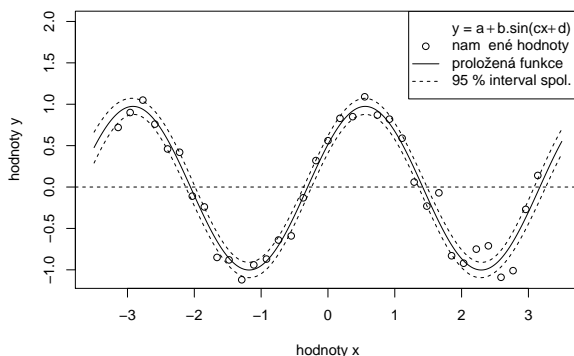
$$(0, 2),$$

což odpovídá periodě sinusoidy větší než  $\frac{\pi}{2}$  (toto je z obrázku jistě splněno). Dále si přidáme omezení na možné hodnoty parametru  $d$ . Budeme chtít, aby odhad tohoto parametru ležel v intervalu

$$(-\pi, \pi).$$

Toto děláme z důvodu identifikovatelnosti parametrů v našem modelu.

S těmito dvěma omezeními jsou už všechny parametry v našem modelu identifikovatelné a můžeme nechat matematický software spočítat jejich odhady. Po dosazení našeho modelu včetně těchto dvou požadavků do výpočetního prostředí  $R$  dostáváme na výstupu odhady regresních koeficientů, pomocí kterých můžeme vykreslit graf prokládané funkce. Takovýto graf společně s intervalovým odhadem pro prokládanou funkci můžeme vidět na Obr. 64. Z tohoto grafu je vidět, že proložená funkce sedí na naměřená data velmi dobře, takže nemusíme přidávat žádné další omezující podmínky a můžeme takovýto model prohlásit za finální. Zároveň je vidět, že jsme prokládanou funkci určili poměrně přesně, jelikož interval spolehlivosti je poměrně úzký.



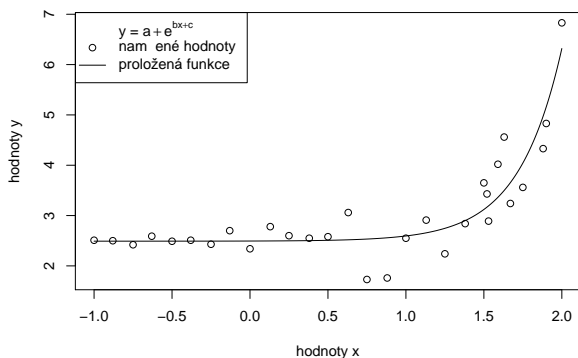
Obr. 64: Graf naměřených hodnot a proložené funkce z příkladu b).

c) Naměřenými daty budeme chtít prokládat teoretickou funkci tvaru

$$f(x) = a + e^{bx+c}.$$

Všechny regresní koeficienty v tomto modelu jsou identifikovatelné a není žádný problém s omezeností některého koeficientu. Vše je tedy připraveno na vložení do výpočetního prostředí  $R$ .

Matematický software nám na výstupu poskytne hodnoty odhadů regresních koeficientů, na základě kterých můžeme vykreslit graf naměřených hodnot a proložené funkce, který můžeme vidět na Obr. 65. Z tohoto grafu dostáváme velké podezření na porušení předpokladu homoskedasticity. Toto ještě pro jistotu ověříme na grafu residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné, který můžeme vidět na Obr. 66. Z těchto dvou grafů je nám jasné, že předpoklad homoskedasticity byl porušen a že pro určení nejistot regresních koeficientů budeme muset použít Whiteův (sendvičový) odhad kovarianční matice.



Obr. 65: Graf naměřených hodnot a proložené funkce z příkladu c).

Matematický software *R* poskytl následující odhady regresních koeficientů a příslušných nejistot (vypočítaných na základě Whiteova odhadu kovarianční matice)

$$\begin{aligned}
 a &= (2,49 \pm 0,08), \\
 b &= (3,6 \pm 0,7), \\
 c &= (-5,9 \pm 1,4).
 \end{aligned}$$

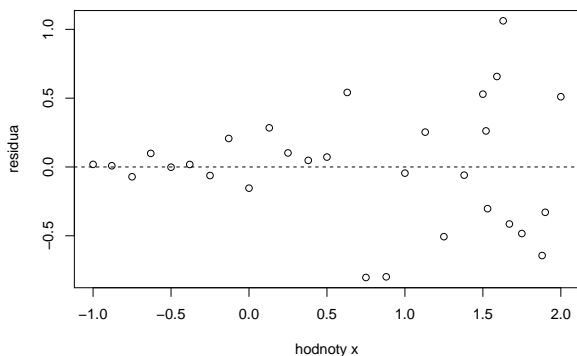
Na závěr tohoto příkladu můžeme konstatovat, že nejistoty měření regresních koeficientů spočítané klasickým postupem (které v případě heteroskedasticity nejsou správné) se od nejistot měření regresních koeficientů spočítaných pomocí Whiteova odhadu kovarianční matice liší maximálně o 45 %.

d) Naměřenými daty budeme prokládat funkci

$$f(x) = a + \frac{1}{bx + c}.$$

Je vidět, že všechny parametry jsou identifikovatelné a že nemůže nastat problém s omezeností jednotlivých parametrů, jelikož prokládaná funkce není periodická. Můžeme tedy rovnou pomocí nelineární regrese proložit tuto funkci naměřenými daty. Graf proložené funkce a naměřených dat ve formě chybových úseček můžeme vidět na Obr. 67. Je vidět, že proložená funkce dobře sedí na naměřená data. Zároveň nejsou vidět žádné známky heteroskedasticity. Můžeme se tedy domnívat, že byly všechny předpoklady nelineárního regresního modelu splněny. Toto ovšem ještě ověříme podrobnější regresní diagnostikou.

Na Obr. 68, resp. 69 můžeme vidět graf residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné, resp. graf residuí oproti hodnotám proložené funkce. Na obou grafech



Obr. 66: Graf residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné z příkladu *c*).

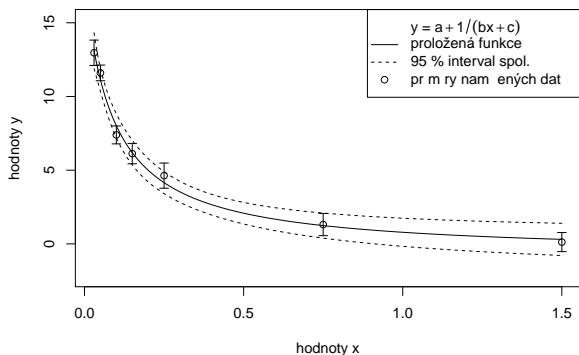
vidíme náhodný shluk bodů kolem osy  $x$  bez žádné tendence shlukování nad nebo pod osou  $x$  ani různého rozptylu residuí v různých částech grafu. Můžeme tedy usoudit, že jsme prokládanou funkci volili správně a že naměřená data splňují předpoklad homoskedasticity. Dále můžeme na Obr. 70 vidět graf residuí oproti posunutým residuům. Na tomto grafu vidíme jen náhodný shluk bodů kolem počátku souřadnic bez známek shlukování v jednotlivých kvadrantech. Můžeme tedy usoudit, že i předpoklad nezávislosti měření byl pravděpodobně splněn.

Na závěr tedy můžeme říci, že regresní diagnostika neodhalila žádné závažné porušení předpokladů nelineárního regresního modelu. Toto proložení tedy můžeme považovat za splněné a konstatovat, že aplikace nelineárního regresního modelu na tato data byla v pořádku.

*Bonus:* Naším úkolem bude proložit zadanými daty regresní spliny. Než začneme zadávat nějaké příkazy do matematického softwaru, musíme si uvědomit, jakým omezením čelíme. Předně si musíme uvědomit, že náš datový soubor má celkem 89 měření. Z toho vyplývá omezení na počet regresních koeficientů, který by neměl překročit 15, aby na jeden regresní koeficient připadalo alespoň 5 měření. V ideálním případě bychom se měli snažit volit co nejmenší počet regresních koeficientů, ale zároveň musí být proložená funkce dostatečně přesná. Dalším omezením je stupeň prokládaných polynomů. Musíme si uvědomit, že vysoký stupeň prokládaných polynomů zvyšuje počet potřebných regresních parametrů. Musíme tedy opět vyvážit přesnost prokládané funkce a požadavek na co nejnižší stupeň prokládaných polynomů. Podle teorie vyložené v textu seriálu začneme se stupněm 3 a případně budeme dále, pokud to situace bude vyžadovat, stupeň zvyšovat.

Nyní už můžeme začít s prokládáním samotné funkce. Budeme postupovat přesně podle návodu v textu seriálu. Nejprve tedy jako uzly našich regresních splinů





Obr. 67: Graf naměřených hodnot a proložené funkce z příkladu d).

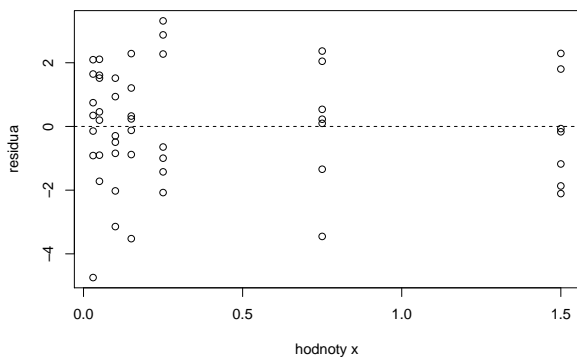
zvolíme ty body, ve kterých se nejvíce mění chování měřených dat, následně budeme tuto volbu upravovat (případně přidávat více uzlů), abychom docílili správné podoby proložené funkce.

Tímto postupem jsme po několika iteracích dospěli k modelu, kde prokládáme polynomy třetího stupně a uzly máme zvolené v bodech

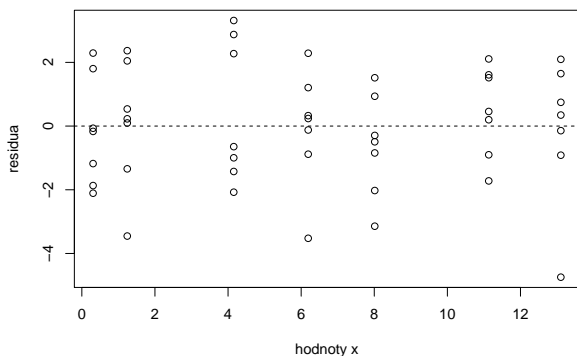
$$1; 1,8; 2,2; 3; 4,5; 5; 6; 6,5 .$$

Na Obr. 71 můžeme vidět naměřená data společně s proloženou funkcí. Je vidět, že takto zvolená funkce velice dobře aproximuje naměřená data, můžeme tedy takovýto model prohlásit za finální.

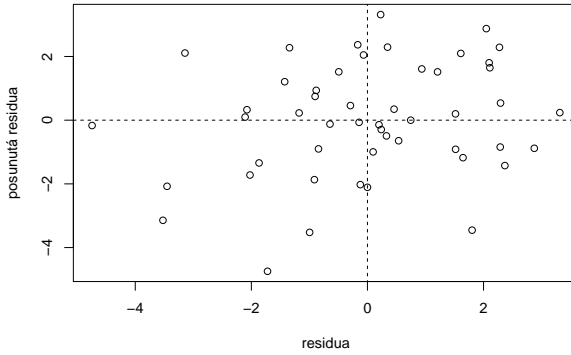
Na závěr jen poznamenejme, že výše popsaná volba uzlů rozhodně není jediná správná. Kdybychom některý z uzlů o trochu posunuli, tvar prokládané funkce by se téměř nezměnil a výsledný model by byl stále správný. Je navíc možné, že podobný graf bychom dostali i pro zcela jinou volbu uzlů.



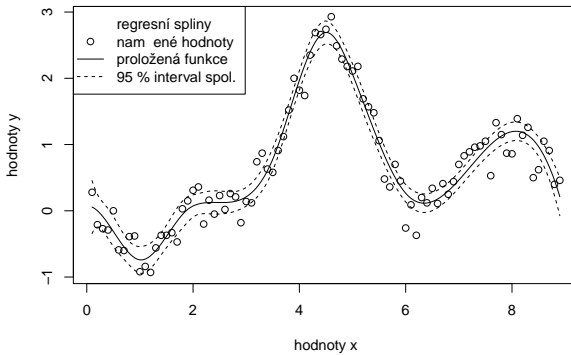
Obr. 68: Graf residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné z příkladu *d*).



Obr. 69: Graf residuí oproti hodnotám proložené funkce z příkladu *d*).



Obr. 70: Graf residuí proti posunutým residuům z příkladu d).



Obr. 71: Graf proložených regresních splinů naměřenými daty z bonusového příkladu.



## Akce FYKOSu

### Podzimní soustředění v Zásce

Podzimní soustředění proběhlo v Zásce u Radostína nad Oslavou ve dnech 24. 9.–2. 10. 2016.

### Organizátoři

Filip Ayazi, Markéta Calábková, Veronika Dočkalová, Jakub Dolejší, Petr Doležal, Lubomír Grund, Miroslav Hanzelka, Erik Hendrych, Oldřich Holcner, Jakub Jambrich, Dominika Kalasová, Karel Kolář, Lukáš Ledvina, Mikuláš Matoušek, Kristína Nešporová, Michal Nožička, Aleš Podolník, Jakub Sláma, Lukáš Timko

### Účastníci

Alžběta Andrýsková, Jáchym Bártík, Vít Beran, Jiří Blaha, Petr Doubravský, Tomáš Dulava, Jindřich Dušek, Ivan Hudák, Ondřej Knopp, Lucie Kundratová, Matěj Mezera, Václav Mikeska, Josef Minařík, Ladislav Nagy, Daniela Pittnerová, Zuzana Richterová, Kateřina Rosická, Viktor Rosman, Jakub Růžička, Matěj Rzehulka, Jakub Smolka, Dominik Starý, Štěpán Stenclák, Kateřina Stodolová, Jan Střeleček, Klára Ševčíková, Petra Štefaníková, Ladislav Trnka, Eva Vochozková



Přednáška o plazmatu.



Účastníci zachraňují skartované materiály.

### *Legenda*

Do korporátní firmy FYKOS Entertainment bylo přijato 26 zaměstnanců na pozice Senior programátorů, Junior programátorů, sekretářek, stážistů a uklízeček. Firma disponovala programem pro osobnostní rozvoj zaměstnanců s možností karierního růstu a sestupu. Snahou zaměstnanců bylo například vytváření reklamních banerů, odpis rozbité techniky, odhalování příčin poškozeného záznamu z kamer, průmyslová špionáž, zachraňování skartovaných informací, likvidace nehody po jaderném výbuchu apod. Na konci byla sice firma vyšším vedením vytunelována a všichni zaměstnanci byli propuštěni, nicméně byla pro ně alespoň uspořádána závěrečná party s koupáním v bazénu.

### *Jarní soustředění v Domašově nad Bystřicí*

Jarní soustředění proběhlo v Domašově nad Bystřicí ve dnech 25. 4. – 2. 5. 2017.

### *Organizátoři*

Veronika Dočkalová, Kristína Nešporová, Lubomír Grund, Jakub Dvořák, Karel Kolář, Lukáš Timko, Daniel Dupkala, Filip Ayazi, Jakub Jambrich, Jakub Dolejší, Markéta Calábková, Michal Koutný, Michal Nožička, Mikuláš Matoušek, Michal Červenák, Jakub Šafin, Petr Doležal, Aleš Podolník, Dominika Kalasová, Martina Dobroňová (návštěva), Miroslav Brož (návštěva)

### *Účastníci*

Alžběta Andrýsková, Kateřina Barotová, Vít Beran, Jiří Blaha, Katarína Častulíková, Petr Doubravský, Tomáš Dulava, Jindřich Dušek, Marie Grunová, Ivan

Hudák, Jakub Jobus, David Košťák, Matěj Krátký, Radka Křížová, Lucie Kundratová, Filip Novotný, Daniela Pittnerová, Matěj Prokop, Zuzana Richterová, Kateřina Rosická, Viktor Rosman, Pavla Rudolfová, Jakub Růžička, Dominik Starý, Štěpán Stenclák, Kateřina Stodolová, Jan Střeleček, Martin Vavřík, Eva Vochozková, Jiří Zelenka



Výuka kouzel.

### Legenda

Rok se s rokem sešel a do školy Čar a kouzel v Bradavicích bylo přijato na 30 nových prváků, aby se zde naučili kouzelnickému umění. Po nákupu všeho potřebného vybavení, především hůlek a hábitů, v příčné ulici se studenti přepravili do Bradavic, kde na ně čekal tradiční zařazovací ceremoniál. Moudrý klobouk všechny rozřadil dle jejich vlastností a schopností do čtyř kolejí – Nebelvíru, Havraspáru, Mrzimoru a Zmijozelu. Následovalo slavnostní uvítání nynější ředitelkou Minervou McGonagallovou, ve kterém neopomněla zdůraznit přísný zákaz vstupu do chodby vlevo ve druhém patře, a konečně všemi očekávaná hostina.

Následující dny trávili studenti poctivým studiem kouzel fyziky, matematiky a informatiky, doplněné pravidelnými turnaji ve famfrpálu a každodenní ranním čtením Denního věštce. Co by to ovšem bylo za školní rok v Bradavicích, kdyby nenastaly nějaké problémy. Hned v průběhu prvního dne někdo ukradl ve vitríně vystavenou polovinu bezové hůlky – pozůstatek nejmocnější hůlky na světě a také relikvie smrti. A tak se na popud ředitelky McGonagallové rozběhlo pátrání po ztracené druhé polovině hůlky, aby i ona nepadla do nesprávných rukou. Navíc, aby starostí nebylo málo, zmizel profesor obrany proti černé magii Schemek, po chodbách se začaly objevovat hrůzostrašné nápisy s podpisem Gumídek Sebermech a v úzkém profesorském kruhu kolovalo podezření, že ředitelka se poslední dobou chová nějak zvláštně. Po několika nebezpečných pátracích výpravách

se studentům opravdu podařilo druhou polovinu bezové hůlky najít a předat McGonagallové. Jaké však bylo jejich překvapení, když se ukázalo, že ředitelka je ve skutečnosti ztracený profesor Schemeek, který se přeměnil do její podoby pomocí mnohočlenného lektvaru, a skutečná McGonagallová je už několik dní zavřená v krabici. Schemeekovi se tedy podlou lší podařilo získat obě půlky hůlky a s nimi velkou moc. Studenti se jej však nezalekli, a i přes to, že byli Schemeekem přemístěni neznámo kam a pak dokonce dočasně oslepeni, podařilo se jim společnými silami Schemeeka Umbridge, alias Gumídka Sebermecha, lapit a tím ukončit jeho řádění. A kdože vyhrál školní pohár? No přece Havraspár.

## FYKOSí Fyziklání



Soutěžící diskutují o řešení úlohy.

11. ročník FYKOSího Fyziklání proběhl v pátek 17. 2. 2017 v budovách Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Protože zájem o soutěž stále narůstá, opět se soutěžilo na více místech. Kategorie A soutěžila v budově na Malé Straně, kategorie B a C byly umístěny v prostorách MFF na Karlově. Díky tomu se soutěže zúčastnil rekordní počet 118 týmů. Do kategorií byly týmy rozřazeny podle ročníku studia jednotlivých členů. V kategorii A (tedy kategorii nejstarších) zvítězil tým <sup>2017</sup> ve složení Matěj Mezera, Jáchym Bártík, Matěj Coufal, Jan Hlaváč (všichni Gymnázium, Havlíčkův Brod) a Vít Beran (Masarykovo Gymnázium, Plzeň). I druhý tým byl z Česka a Slováci tak spadli po 4 letech až na třetí místo. V kategorii B vyhrál tým Kontrapunkt z Gymnázia Jana Keplera v Praze, v kategorii C se z vítězství těšil tým z Gymnázia Brno, tř. Jaroše.



Vítězné týmy přebírají ceny.

### Pravidla

Soutěže se účastní družstva s nejvýše pěti členy. Na začátku soutěže dostane každé družstvo sedm příkladů. Za úspěšně vyřešený příklad si družstvo připiše počet bodů, který závisí na počtu pokusů potřebných k jeho vyřešení. Dále si od organizátorů vyzvedne nový příklad. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny a jejím cílem je samozřejmě získat co největší počet bodů. Přesná pravidla jsou k dispozici na webových stránkách semináře.

### Výsledky

#### **Středoškoláci A**

- |    |   |        |
|----|---|--------|
| 1. | Gymnázium Havlíčkův Brod, Masarykovo Gymnázium, Plzeň | 194 b. |
| 2. | Gymnázium Opatov, Praha                               | 193 b. |
| 3. | Gymnázium Jura Hronca, Bratislava                     | 190 b. |

#### **Středoškoláci B**

- |    |                                    |        |
|----|------------------------------------|--------|
| 1. | Gymnázium Jana Keplera, Praha      | 169 b. |
| 2. | Gymnázium Grösslingova, Bratislava | 158 b. |
| 3. | Gymnázium Komenského, Havířov      | 149 b. |

#### **Středoškoláci C**

- |    |   |        |
|----|---|--------|
| 1. | Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše           | 139 b. |
| 2. | Gymnázium J. Ortena, Kutná Hora           | 137 b. |
| 3. | Gymnázium F. Palackého, Valašské Meziříčí | 128 b. |

*Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.*



## Fyziklání online

Letos proběhl již šestý ročník internetové soutěže Fyziklání online. Konal se ve středu 30. 11. 2016. Do soutěže se aktivně zapojilo 149 českých a slovenských středoškolských týmů, 48 zahraničních středoškolských týmů a 51 týmů v kategorii open, celkem tedy 248 týmů sestávajících 1097 účastníků. Tím se překonal loňský rekord v počtu zúčastněných o celých 19 týmů.

Celkovým vítězem se stal tým *Castrambe* z kategorie open se ziskem 192 bodů. Na druhé příčce se umístil tým *FtáKopySk - fks.sk* se 189 body a třetí pozici získal tým *PMF* se 166 body, oba dva rovněž z kategorie open. Vítězem kategorie A českých a slovenských středoškoláků se stal tým *Hatalom* se 139 body, čímž se umístil na celkovém sedmém místě a prvním místě mezi středoškolskými týmy. Ziskem 125 bodů se tým *Cornuova spirála* dostal na první místo v kategorii B a celkové 10. místo. Z týmů kategorie C na první příčku dosáhl tým *Gáda a Alfa Samci*, který získal 68 bodů a celkově tedy skončil na 58. místě. Nejlepší zahraniční středoškolský tým *Immolated Marmosets* se umístil celkově 16. se 115 body.

### Pravidla

Na začátku soutěže každý, maximálně pětičlenný, tým obdržel sedm úloh s jednoznačným číselným výsledkem. Po zadání správného výsledku do internetového systému získal tým zadání následující úlohy. Soutěž trvala 3 hodiny, přičemž v průběhu soutěže proběhla také půlhodinová hurry up část, v níž byly úlohy rozděleny do tří fyzikálních témat a vyřešení každé úlohy bylo hodnoceno bonusovými body. Jelikož se soutěž konala přes internet, byly všechny pomůcky povoleny.

### Výsledky

#### **Středoškoláci A**

1.	Hatalom	139 b.
2.	Perturbace druhého řádu	121 b.
3.	Kepleráci ©	117 b.
4.	GJH A	105 b.
5.	Vombat	93 b.

#### **Středoškoláci B**

1.	Cornuova spirála	125 b.
2.	Hyperofabula ugongi dugongi	110 b.
3.	Zloději polštarků	100 b.
4.	Fyčusové	73 b.
5.	Kontrapunkt	72 b.

#### **Středoškoláci C**

1.	Gáda a Alfa Samci	68 b.
2.	Albertove dievčatá	60 b.
3.	Čo meno to pojem	59 b.
4.	mcnadruhou	58 b.
5.	Fanatická pětka	52 b.

### Zahraniční středoškoláci

1. Immolated Marmosets	115 b.
2. Jungle King	109 b.
3. :(): :&;:	88 b.
4. Branes	87 b.
5. Resonance	85 b.

### Open

1. Castrambe	192 b.
2. FtáKopySk - fks.sk	189 b.
3. PMF	166 b.
4. Smoluchowski's team	162 b.
5. Fizzy wizzies	152 b.

*Ve výsledkové listině jsou uvedeny pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je k nalezení na webových stránkách soutěže.*

## Fyzikální Náboj



Domácí tým z Gymnázia Ch. Dopplera skončil druhý v kategorii Junioři.

V tomto školním roce FYKOS organizoval ve spolupráci se slovenským FKS už podruhé soutěž Fyzikální Náboj. Náboj je soutěž, která probíhá podobně jako FYKOSí Fyziklání – 5členné týmy během dvou hodin řeší fyzikální úlohy, přičemž

se snaží získat co nejvíce bodů za správná řešení. Kromě kratšího času na řešení úloh se Náboj od Fyziklání liší i počtem bodů za správný výsledek – za ten soutěžící získají vždy jen jeden bod a za špatnou odpověď nedostávají žádnou penalizaci. Soutěž probíhá současně na více místech, tento rok se kromě Prahy a Bratislavy konala též v maďarské Budapešti nebo polském Gdaňsku. V Praze jsme i tento rok soutěž organizovali na Gymnáziu Christiana Dopplera, které nám ochotně poskytlo prostory.

Za Českou republiku v Praze soutěžilo 33 týmů. Na základě věku byly rozděleny do dvou kategorií – Junioři a Senioři.

#### Vítězné týmy, kat. Senioři

1. (5.) Gymnázium Havlíčkův Brod, Štáflova 2063, Havlíčkův Brod
2. (6.) Gymnázium, Tomkova 45, Olomouc - Hejčín
3. (7.) Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5

#### Vítězné týmy, kat. Junioři

1. (2.) Gymnázium, Špitálská 2, Praha 9
2. (4.) Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5
3. (7.) Gymnázium, třída Kapitána Jaroše 14, Brno

*V závorkách je uvedeno pořadí v rámci mezinárodního žebříčku. Kompletní výsledkovou listinu najdete na webu soutěže.*

### Den s experimentální fyzikou



Účastníci v laboratoři ČVUT.

Den s experimentální fyzikou (DSEF) je každoroční akce FYKOSu, která umožňuje studentům středních škol nahlédnout do fyzikálních laboratoří. Letošní Den s experimentální fyzikou proběhl dne 8. 11. 2016 v Praze. V dopoledních hodinách studenti navštívili laboratoře MFF UK v budově Ke Karlovu 5, Praha 2. Zde se mohli dozvědět, proč a jak fyzici studují živé buňky, jak funguje transmisní a skenovací elektronový mikroskop, co je to akustická emise a mnoho dalšího. Odpoledne odjela jedna polovina studentů do laboratoře vysokých napětí a druhá navštívila Český hydrometeorologický ústav. Akce se zúčastnilo 65 studentů.

### *Cyklus přednášek pro středoškoláky*

Letošní rok přednášek pro středoškoláky obsahoval dohromady deset přednášek, po pěti v obou semestrech. Témata v obou semestrech byla různorodá. V zimním byla rozvíjena zejména témata úzce související s mechanikou, v letním jsme pak podrobně rozvinuli téma integrace a po dlouhé době se opět vrátili k experimentální fyzice a elektrodynamice.

Témata zimních přednášek byla: Newtonovy srážky (Jiří Nárožný), Zákon zachování (Lukáš Ledvina), Mechanické oscilátory (Patrik Švančara), Obyčejné diferenciální rovnice (Tomáš Bárta) a Nebeská mechanika (Viktor Skoupý).

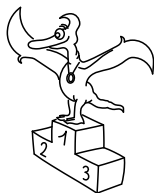
V letních přednáškách přednášeli především dva přednášející a jeden s netradičtějším, ale zajímavým tématem: Základy integrálů ve fyzice & Integrály ve fyzice (Dominik Beck), Zpracování měření (Daniel Slezák), Výpočetní neurobiologie (Tomáš Bárta) a Magnetostatika (Daniel Slezák).

Rádi bychom vás pozvali na přednášky dalšího roku. Seznamy videí se nacházejí na stránkách YouTube<sup>1</sup> nebo v seznamu přednášek FYKOSu.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup><https://www.youtube.com/user/fykosak/playlists>

<sup>2</sup><http://fykos.cz/akce/prednasky/archiv>



## Pořadí řešitelů

### Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 380
1. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	313
2. <i>Václav Zvoníček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	305
3. <i>Jakub Jobus</i>	G PdC, Piešťany	284
4. <i>Martin Schmied</i>	G Jihlava	283
5. <i>Radka Křížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	231
6. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	206
7. <i>Matěj Prokop</i>	G Dašická, Pardubice	191
8. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Wintra, Rakovník	156
9. <i>Miroslav Macko</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	117
10.–11. <i>Jakub Pravda</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	111
10.–11. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	111
12. <i>Pavla Rudolfová</i>	G, Vídeňská, Brno	93
13. <i>Matěj Krátký</i>	PORG, Praha	90
14. <i>Šimon Brázda</i>	G, Hlinsko	89
15. <i>Kateřina Barotová</i>	G, Olomouc-Hejčín	87
16. <i>Richard Hamerlík</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	65
17. <i>Petr Doubravský</i>	Akademické G, Praha	58
18. <i>Filip Novotný</i>	G Jihlava	48
19. <i>Tímea Szöllősová</i>	G Grösslingova, Bratislava	43
20.–21. <i>Lukáš Hronek</i>	G, Písek	39
20.–21. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	39
22. <i>Adam Vavrečka</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	37
23. <i>Filip Wagner</i>	G Tišnov	34
24. <i>Joyee Chen</i>	Portola HS, Irvine, USA	32
25. <i>Viktor Fukala</i>	G Jana Keplera, Praha	30
26. <i>Lucia Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	28
27. <i>Viktor Vařeka</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	25
28. <i>Marco Souza de Joode</i>	G Nad Štolou, Praha	23
29. <i>Marek Černocho</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	21
30. <i>Lucia Krajčoviechová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	17
31. <i>Ján Šrejbr</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	16
32. <i>Vojtěch Ježek</i>	G Legionářů, Příbram	14
33.–34. <i>Soňa Curylová</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	12
33.–34. <i>Milan Tichavský</i>	Slezské G, Opava	12
35.–36. <i>Anna Hollmannová</i>	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	10
35.–36. <i>Bohumír Žůrek</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	10
37. <i>Tomáš Salavec</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	8

## Kategorie druhých ročníků

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	<b>Σ</b> <b>380</b>
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	<b>344</b>
2. <i>Ladislav Trnka</i>	G, Havlíčkův Brod	<b>320</b>
3. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	<b>264</b>
4. <i>Ivan Hudák</i>	ESŠ, Lip. Mikuláš	<b>252</b>
5. <i>Lucie Kundratová</i>	G, nám. TGM, Zlín	<b>243</b>
6. <i>Josef Minařík</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	<b>240</b>
7. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	<b>177</b>
8. <i>Kristian Matušík</i>	G, Benešov	<b>157</b>
9. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	<b>142</b>
10. <i>Marie Grunová</i>	G Moravský Krumlov	<b>101</b>
11. <i>Jakub Smolka</i>	Slezské G, Opava	<b>98</b>
12. <i>Domínik Beňo</i>	G L. Svobodu, Humenné	<b>88</b>
13. <i>Marek Jankola</i>	G M. Hattalu, Trstená	<b>81</b>
14. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	<b>73</b>
15.–16. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	<b>59</b>
15.–16. <i>Tereza Pavlišová</i>	G, Olomouc-Hejčín	<b>59</b>
17. <i>Veronika Vohníková</i>	Nový PORG, Praha	<b>35</b>
18. <i>Jakub Zemek</i>	G, Uherské Hradiště	<b>28</b>
19. <i>Jakub Rajnštajn</i>	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	<b>25</b>
20.–22. <i>Martin Dính</i>	G, Třinec	<b>17</b>
20.–22. <i>Daniel Martynec</i>	G, Třinec	<b>17</b>
20.–22. <i>Štěpán Stryja</i>	G, Třinec	<b>17</b>
23. <i>Šimon Kondrk</i>	SPŠ Dubnica nad Váhom	<b>16</b>
24. <i>Andrea Bínová</i>	G, Česká Lípa	<b>15</b>
25.–26. <i>Josef Sabol</i>	G Chotěboř	<b>12</b>
25.–26. <i>Marie Vaňáková</i>	G Botičská, Praha	<b>12</b>
27.–28. <i>Máté Eke</i>	Gymnázium, sSOŠ a jazyková škola	<b>11</b>
27.–28. <i>Michal Jireš</i>	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	<b>11</b>
29. <i>Klára Nechanická</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	<b>10</b>
30. <i>Václav Bulín</i>	G, Plasy	<b>9</b>

## Kategorie třetích ročníků

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	$\Sigma$ <b>344</b>
1. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	273
2. Tomáš Dulava	Matiční G, Ostrava	238
3. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	188
4. Zuzana Richterová	G, Pelhřimov	165
5. Dominik Starý	G, Benešov	164
6. Martin Okáník	G Tajovského, B. Bystrica	136
7. Katarína Častulíková	1. súkromné G v Bratislave	131
8. David Košťák	G, Josefská, Praha	114
9. Ondřej Knopp	G Christiana Dopplera, Praha	91
10. David Dvořák	ZŠ a G, Konice	54
11. Daniela Hrbáčová	Wichterlovo G, Ostrava	47
12. Ján Pavlech	G sv. Jozefa Nové Mesto n. V.	37
13. Ondřej Buček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	34
14. John Richard Ritter	G Masarykovo nám., Třebíč	33
15. Jiří Löffelmann	G, Litoměřická, Praha	31
16. Pavla Trembulaková	G Jírovcova, České Budějovice	27
17. Andrej Holmes	G Ružomberok	24
18. Martina Kopecká	G J. Barranda, Beroun	22
19. Markéta Jirmanová	BG B. Balbína, Hradec Králové	20
20. Filip Keller	G P. de Coubertina, Tábor	18
21.–22. Jaroslav Paidar	SPŠ Masarykova, Liberec	17
21.–22. Matej Parada	G Jura Hronca, Bratislava	17
23. Katarína Žatková	Evanjelické G JAK, Košice	16
24. Veronika Funková	G L. Jaroše, Holešov	15
25.–26. Dominick Ivan	ŠG PinkHarmony, Zvolen	12
25.–26. Ondřej Komora	G Mikulášské n. 23, Plzeň	12
27.–28. Kristýna Davidková	Biskupské G, Brno	11
27.–28. Jakub Kovářík	G, Hodonín	11
29. Ondřej Bílek	SPŠ, Vlašim	9
30.–32. Tomáš Hudcovic	Jiráskovo G, Náchod	7
30.–32. Štěpán Kastovský	G, Hlučín	7
30.–32. Petr Semerák	Jiráskovo G, Náchod	7
33.–37. Miroslav Hrabal	G, Olomouc-Hejčín	6
33.–37. Štěpán Kohl	Klasické a španělské G, Brno	6
33.–37. David Němec	G, Tanvald	6
33.–37. Tereza Poláková	G, Budějovická, Praha	6
33.–37. Martin Repčík	G, Olomouc-Hejčín	6
38. Lukáš Vávah	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	5
39.–41. Ondřej Hajnyš	G, Dvůr Králové n. L.	3
39.–41. Jan Lindauer	První české G, Karlovy Vary	3
39.–41. Aneta Němcová	G, Boskovice	3
42. Filip Geib	G M. M. Hodžu, Liptovský Mikuláš	2

## Kategorie čtvrtých ročníků

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	$\Sigma$ <b>344</b>
1. <i>Jáchym Bárták</i>	G, Havlíčkův Brod	<b>354</b>
2. <i>Daniela Pittnerová</i>	G L. Svobodu, Humenné	<b>315</b>
3. <i>Štěpán Stenclák</i>	G, Třinec	<b>194</b>
4. <i>Klára Ševčíková</i>	G, Uherské Hradiště	<b>187</b>
5. <i>Matěj Mezera</i>	G, Havlíčkův Brod	<b>166</b>
6. <i>Jan Štřeček</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	<b>146</b>
7. <i>Lucie Hronová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	<b>123</b>
8. <i>Filip Novotný</i>	G Masarykovo nám., Kroměříž	<b>116</b>
9. <i>Karel Jókai</i>	G, Špitálská, Praha	<b>68</b>
10. <i>Alžběta Andrášková</i>	G, Olomouc-Hejčín	<b>48</b>
11. <i>Přemysl Štastný</i>	G, Žamberk	<b>46</b>
12. <i>Jonáš Fuksa</i>	PORG, Praha	<b>42</b>
13. <i>Samuel Šipikal</i>	G Milana Ráfusa	<b>40</b>
14. <i>Petr Šimůnek</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	<b>34</b>
15. <i>Matěj Rzehulka</i>	Wichterlovo G, Ostrava	<b>33</b>
16. <i>Martin Vejvoda</i>	G Dobruška	<b>31</b>
17. <i>Branislav Belko</i>	G Milana Ráfusa	<b>28</b>
18. <i>Veronika Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	<b>19</b>
19. <i>František Zach</i>	G, Litomyšl	<b>18</b>
20. <i>Kateřina Stodolová</i>	G Dašická, Pardubice	<b>13</b>
21. <i>Petra Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava	<b>10</b>
22. <i>Václav Mikeska</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	<b>6</b>
23. <i>Tomáš Tesař</i>	G Jana Keplera, Praha	<b>4</b>



DANIEL DUPKALA, MIROSLAV HANZELKA A KOLEKTIV  
**Fyzikální korespondenční seminář**  
**XXX. ročník – 2016/17**

*Předmluva:* Daniel Dupkala

*Náměty úloh:*

Karel Kolář (II.2, III.P, IV.2, IV.4, V.1, V.2, V.3, VI.2, VI.4, VI.5, VI.P, VI.E),  
Miroslav Hanzelka (I.1, I.5, I.P, IV.3, V.4, VI.1), Michal Nožička (I.S, II.S,  
III.S, IV.S, V.S, VI.S), Jakub Dolejší (II.3, III.4, III.5, V.P, V.E), Lubomír  
Grund (I.2, I.3, I.4, III.3), Michal Koutný (II.P, III.1, IV.1, IV.P), Lukáš Led-  
vina (II.5, III.2), Jakub Šafin (IV.5, V.5), Jakub Doležal (I.2), Erik Hendrych  
(III.E), Dominika Kalasová (II.1), Mikuláš Matoušek (IV.E), Lada Peksová  
(II.4), Marek Scholz (II.E), Tereza Steinhartová (I.E), Lukáš Timko (VI.3)

*Autoři řešení úloh:*

Jakub Dolejší (I.5, II.4, III.4, III.5, IV.3, IV.P, V.P), Michal Nožička (I.E, I.S,  
II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Markéta Calábková (I.1, II.1, III.2, IV.P, VI.E),  
Karel Kolář (II.2, II.5, IV.4, V.1, V.2), Mikuláš Matoušek (I.3, II.E, III.3, V.5),  
Jakub Šafin (IV.2, V.5, V.E, VI.2), Jakub Dvořák (II.3, V.3, VI.2), Daniel  
Dupkala (I.2, IV.2), Lubomír Grund (I.4, II.P), Peter Kubaščík (IV.1, VI.4),  
Kateřina Smítalová (III.P, IV.E), Filip Ayazi (VI.5), Pavel Blažek (VI.1), Mi-  
roslav Hanzelka (I.P), Tomáš Hrbek (IV.5), Jakub Jambrich (VI.P), Domini-  
ka Kalasová (III.4), Samuel Kočiščák (III.1), Pavel Kůs (V.4), Marek Otýpka  
(V.E), Kateřina Rosická (III.E), Lukáš Timko (VI.3)

*Zpracování dat fyzikálních měření:* Michal Nožička

*Legenda podzimního soustředění:* Michal Nožička

*Legenda jarního soustředění:* Veronika Dočkalová

*Sazba:* Markéta Calábková

*Obrázky a grafy:* Michal Červeňák, Miroslav Hanzelka, Lukáš Ledvina, Mikuláš  
Matoušek, Jakub Šafin

*Jazykové korektury:* Kristína Nešporová

*Odborné korektury:* Miroslav Hanzelka, Jakub Dolejší, Jakub Šafin



D. DUPKALA, M. HANZELKA A KOLEKTIV  
**Fyzikální korespondenční seminář**  
**XXX. ročník – 2016/17**

Vydal MatfyzPress  
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty  
Univerzity Karlovy  
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8  
jako svou 546. publikaci

Výtiskl TISK SPRINT

Publikace neprošla recenzním ani lektorským řízením  
Nakladatelství neodpovídá za kvalitu a obsah textu  
Vydáno pro interní potřebu MFF UK  
Neprodejná publikace

272 stran, 71 obrázků  
Sazba písmem Latin Modern v programu X<sub>q</sub>L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  
Vydání první  
Náklad 400 výtisků

Praha 2017

ISBN 978-80-7378-352-5

