

Úvodem

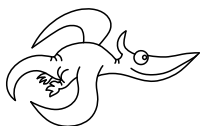
Milé řešitelky, milí řešitelé,

blíží se Vánoce a s nimi tradičně přichází třetí série FYKOSu. Pro zpříjemnění adventu je to tentokrát spíše mix témat, najdete zde i čistě matematickou úlohu o pravděpodobnostech nebo problém skládání papíru. Experimentální úlohu si pověste na ledničku, ať se o ní lépe přemýšlí :). Ve třetím díle seriálu se budete náhodně procházet po pokročilejších numerických metodách, tak se neztraťte, ale nalezněte nějaký hezký integrál.

Také Vám s radostí oznamujeme, že na fyziklani.cz se již nyní můžete přihlašovat do 12. ročníku týmové soutěže FYKOSí Fyziklání. Přihlašování neodkládejte, zejména jste-li přespolní, abyste nepřišli o místa v hostelech na přespání před soutěží.

Pěkné chvíle strávené s našimi úlohami a pohodové Vánoce přejí

Organizátoři



Zadání III. série



Termín uploadu: 9. 1. 2018 23.59

Termín odeslání: 8. 1. 2018

Úloha III.1 ... zpomalená

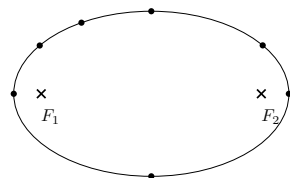
3 body

Představme si, že na kameru se snímkovou frekvencí 24 snímků za sekundu (uvažujme časově rovnoměrně rozložené a dokonale ostré snímky) natočíme let vrtulníku s otáčkami hlavního rotoru 2900 ot./min. Následně si záznam přehrajeme. Jaká bude zdánlivá frekvence otáček rotoru na záznamu?

Úloha III.2 ... zrychleníčko, zrychlení

3 body

Na obrázku vidíte náčrt elipsy s ohnisky F_1 a F_2 a několika vyznačenými body na ní. Uvažujte, že elipsa znázorňuje trajektorii nějakého hmotného bodu. Znázorněte do obrázku zrychlení, která působí na hmotný bod v jednotlivých vyznačených bodech dráhy pro dvě situace (jde o směry a vzájemné poměry zrychlení (které je větší/menší) v různých bodech v rámci jednoho náčrtu).



- V ohnisku F_1 je umístěno hmotné těleso, kolem kterého hmotný bod obíhá. Uvažujeme, že platí 2. Keplerův zákon.
- Těleso má konstantní velikost rychlosti, pouze se pohybuje po elipse.

Úloha III.3 ... IDKFA

6 bodů

Vypálili jste na impa z plazmové pušky, která střílí stabilní shluk částic hmotnostním tokem Q_m s rovnoměrným rozdělením podélné rychlosti v intervalu $\langle v_0, v_0 + \delta v \rangle$ (příčná rychlost je nulová). Hlaven pušky má průřez S a pulz trvá čas t_0 . Jak daleko musí imp stát, aby se mu nic nestalo? Předpokládejte, že jeho kůže bez problémů uchladí na malém prostoru tepelný tok q .

Úloha III.4 ... upuštěná propiska

7 bodů

Propisku (tuhou tyč) upustíme na stůl tak, že během svého letu svírá úhel α s vodorovnou rovinou. Jakou rychlostí dopadne její druhý konec (ten, co se stolu dotkne jako druhý), jestliže jsme těžiště upustili z výšky h ? Všechny srážky jsou nepružné a tření mezi stolem a koncem propisky dostatečně velké.

Bonus Spočítejte, jaký musíme zvolit úhel α , aby druhý konec dopadl s co nejvyšší rychlostí. Pro jaké výšky se vyplatí propisku naklonit?

Úloha III.5 ... rozpad sem, rozpad tam

8 bodů

Máme A_0 částic typu A , které se s rozpadovou konstantou λ_A rozpadají na částice typu B . Ty se zase s rozpadovou konstantou λ_B rozpadají na částice typu A a na začátku jich je B_0 . Najděte funkci udávající poměr počtů částic typů A a B v čase.

Úloha III.P ... složený papír

8 bodů

Každý to jistě někdy slyšel a určitě i zkusil: „List papíru nelze na půlku přeložit více než sedmkrát.“ Je to ale skutečně pravda? Najděte hraniční podmínky.

Úloha III.E ... magneticky přitažlivá

12 bodů

Společně se zadáním této série jsme vám rozeslali poštou plošný magnet (magnetickou fólii). Tento magnet je trochu jiný než tyčové magnety – v ploše se střídavě střídají severní a jižní pól. Díky tomu se při přiblížení k feromagnetickému povrchu uzavře skrz kov „magnetický obvod“ a magnet drží (např. na ledničce) a unese na sobě třeba i obrázek. Vašimi úkoly jsou:

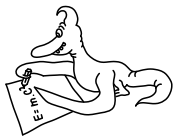
- Změřit plochu a tloušťku fólie, kterou využijete k experimentům.
- Změřit střední vzdálenost mezi dvěma nejbližšími stejnými magnetickými póly (dvojnásobek opačných).
- Změřit maximální užitečnou hmotnost (tedy hmotnost bez hmotnosti magnetu), kterou unese 1 cm^2 magnetu, je-li zatížení magnetu rovnoměrné, pokud magnet přichytíte zespo- da k vodorovně umístěnému cca. 1 mm tlustému plechu z magneticky měkké oceli.

Nezapomeňte určit i chyby měření. Fólie, kterou jsme vám dodali, může být samolepící (je přes ni bílá fólie a pod ní lepidlo). V tom případě bílou fólii nahraďte něčím, na co budete upevňovat užitečnou hmotnost.

Úloha III.S ... na procházce s integrály

10 bodů

- Vymyslete tři odlišné příklady markovovského procesu, z toho alespoň jeden fyzikální. Je procházka bez návratu markovovská? A co procházka bez křížení?
- Mějme 2D náhodnou procházku bez návratu na čtvercové síti s počátkem v bodě $(x, y) = (0, 0)$, která je omezena absorpčními bariérami $b_1 : y = -5$, $b_2 : y = 10$. Nalezněte pravděpodobnost, že v bariéře b_1 skončíme dříve než v b_2 .
- Provedte simulaci pohybu brownovské částice ve 2D a vykreslete graf závislosti střední vzdálenosti od počátku na čase. Uvažujeme diskretní čas a konstantní délku kroku (jeden krok simulace trvá $\Delta t = \text{konst}$, délka kroku je $\Delta l = \text{konst}$) a umožňujeme pohyb do libovolného směru, tj. každý krok je specifikován délkou a úhlem $\vartheta \in [0, 2\pi)$, přičemž všechny směry jsou stejně pravděpodobné. Zajímá nás především asymptotické chování, tedy vývoj střední vzdálenosti pro $t \gg \Delta t$.



Řešení II. série

Úloha II.1 ... Zuběnka

3 body; (chybí statistiky)

Jak velké skladovací prostory by musela mít Víla Zubnička, aby mohla skladovat všechny mléčné zuby všech dětí? Resp. jakým tempem by její nároky na uskladnění rostly? Za jakou dobu by teoreticky měla ve svých skladech většinu zásob fosforu na Zemi?

Karel se myšlenkách vrací na Zeměplochu.

Úloha je pekne rozdelená na tri časti, je teda vhodné riešiť ich v zadanom poradí. Najprv sa teda pozrieme na to ako veľké skladovacie priestory by musela mať Zubnička¹. Rôzne zdroje uvádzajú rôzne čísla o tom, koľko ľudí žilo doposiaľ na Zemi, väčšina sa ale zhodne na čísla blízkom 100 miliárdam. Orientovali sme sa wikipédiou² ktorá tvrdí, že na svete žilo od roku 50 000 p.n.l. 106 miliárd ľudí. Rátajme že každý z týchto ľudí mal 20 mliečnych zubov a víla zubnička ich všetky uložila (ide o horný odhad – víla radšej nebude riskovať, že nebude mať dost priestoru). Ďalej rátajme, že pri vhodnom naskladaní zaberie jeden mliečny zub objem približne $0,25 \text{ cm}^3$ – v literatúre sme žiadnu relevantnú informáciu o objeme zubov nenašli, odmerali sme teda priemerný objem niekoľkých mliečnych zubov (nesmieme zabúdať, že mliečne zuby sú o niečo menšie ako trvalé, a zároveň nemajú korene). V takom prípade nám bude treba úložné priestory o veľkosti $530\,000 \text{ m}^3$. Ak uvažujeme jednoposchodové sklady, mohli by sme zuby skladovať do výšky napríklad 5 m; v takom prípade by sa sklady rozprestierali na ploche 10 hektárov.

Teraz sa pozrieme na to, akým tempom by rástli skladovacie nároky. Podľa OSN bol v roku 2016 nárast populácie 1,1 % (1,8 % sa narodí a 0,7 % zomrie). Aj keď nie je jasné, ako bude trend pokračovať, všetko nasvedčuje tomu, že za najbližších 100 rokov sa počet obyvateľov zeme ustáli na nejakej hodnote, rôzne zdroje to odhadujú na 6 až 12 miliárd obyvateľov. Nech je ako chce, znamená to, že za tých 100 rokov sa ročne bude rodiť a umierať približne rovnaký počet ľudí, čo pre zubničku znamená, že bude každým rokom stabilne inkasovať konštantný počet zubov. Budeme rátať že sa populácia ustáli na súčasných 7,4 miliárdach. Môžeme predpokladať, že úmrtnosť bude rovnaká v budúcnosti ako súčasných 0,7 % z tohto počtu ročne, s tým rozdielom, že sa bude aj rodiť rovnaký počet ľudí. Ročne teda pribudne na zemi asi 52 miliónov ľudí, čo sa pri dobudovávaní skladu s rovnakou výškou efektívne premietne do nutnosti zväčšiť jeho plochu o 50 m^2 za rok. Avšak takéto tempo zvyšovania kapacít bude dostatočné až v roku povedzme 2115, dotedy bude pôrodnosť najprv rásť a potom sa zasa zmenšovať. Ak by sa dlhodobo udržala pôrodnosť na takej úrovni ako teraz, t.j. ročne sa narodí 1,8 % ľudí z toho, čo aktuálne žije, muselo by byť prvých niekoľko rokov od súčasnosti zvyšovanie priestoru skladov 2,5-krát rýchlejšie, t.j. bolo by treba pridávať 130 m^2 skladovacích priestorov za rok navyše.

Tretou otázkou je kedy by zubnička vlastnila viac ako polovicu všetkých zásob fosforu na Zemi. Z wikipédie³ vieme, že na Zemi je 1 210 ppm fosforu. To znamená, že viac ako tisícina hmotnosti zeme je fosfor. My sa uspokojíme z odhadom $1/1000$ – hmotnosť zeme je $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, je na nej teda zhruba $6 \cdot 10^{21} \text{ kg}$ fosforu. Z ďalších zdrojov⁴ vidíme, že fosfor tvorí asi 19 %

¹preklad pre Čechov: Zuběnka

²https://cs.wikipedia.org/wiki/Sv%C4%9Btov%C3%A1_populace; z tohto zdroja sme čerpali aj ďalšie čísla spomínané v riešení

³https://en.wikipedia.org/wiki/Abundance_of_the_chemical_elements

⁴<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1263223/?page=2>

hmotnosti zubu. Vážením vlastných mliečnych zubov sme stanovili, že priemerná hmotnosť zuba nie je väčšia ako 0,3 g. (Aj to je veľmi nadstretý odhad.) Z daných údajov vieme spočítať, že súčasne zubníckine zásoby pokrývajú len zlomok svetových zásob fosforu, asi jednu $5 \cdot 10^{13}$ -tinu. Ako sme si už povedali, najrealnejší model vývinu populácie je, že sa do 100 rokov ustáli na konečnej hodnote, v rozmedzí 6 a 12 miliárd. V predošlej časti sme ráтали s prírastkom populácie z dlhodobého hľadiska (to, čo sa bude diať za tých 100 rokov dovtedy nás nezaujíma, lebo je to kvôli dlhšej časovej škále zanedbateľné) 52 miliónov ľudí ročne, čo činí asi miliardu zubov ročne. Ak by týmto tempom navždy pokračoval nárast počtu mliečnych zubov, tak by zubníčka dosiahla väčšinový podiel za približne $1 \cdot 10^{17}$ rokov. Čo len tak pre zaujímavosť znamená, že ak by jej sklady zaberali plochu celej zeme vrátane morí a oceánov (India by sa museli uskromniť a žiť na streche skladov) tak by mali pri rovnakej hustote ukladania zubov (4 na mililiter) budovy skladov výšku 50 km.

Jakub Jambrich
jakubj@fykos.cz

Úloha II.2 ... irradie solární elektrárny

3 body; (chybí statistiky)

Solární konstanta, či správněji solární irradie, je tok energie přicházející ze Slunce ve vzdálenosti Země od Slunce. Nejde o konstantu, ale uvažujme, že má hodnotu $P = 1370 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Uvažujme, že Země obíhá Slunce po kružnici a sklon zemské osy vůči kolmici k její oběžné rovině je $23,5^\circ$. Jaký bude maximální výkon zachycený solárním panelem o ploše $S = 1 \text{ m}^2$ o letním a zimním slunovratu, pokud panel leží na rovném povrchu Země v Praze? Uvažujte, že ani atmosféra ani budovy nijak neovlivní měření. Karel si pustil Crash Course Astronomy.

Protože máme počítat s kruhovou orbitou Země a výkonový tok Slunce máme zadaný, stačí ho jen přenásobit plochou solárního panelu kolmou na paprsky. Tady si ale musíme uvědomit, že paprsky nebudou dopadat kolmo na plochu panelu, ale pod určitým úhlem. Ten závisí na zeměpisné šířce Prahy ϑ_P , kterou můžeme zjistit například odtud⁵, $\vartheta_P \approx 50^\circ$. Víme, že při zimním slunovratu dopadají paprsky kolmo na $\vartheta_z = -23,5^\circ$ ⁶. Při letním slunovratu dopadají paprsky kolmo na $\vartheta_1 = +23,5^\circ$. Z geometrie vidíme, že úhel, pod kterým budou dopadat paprsky na pražský solární panel (úhel mezi tečnou k zemi a paprskem) vypočítáme z rovnice

$$\alpha_i = 90^\circ - |\vartheta_P - \vartheta_i|.$$

Dosazením získáme $\alpha_z = 16,5^\circ$ a $\alpha_1 = 63,5^\circ$.

Pro maximální výkon počítejme se stoprocentní účinností. Plocha panelu kolmá na paprsky je $S \sin \alpha_i$, maximální výkon tedy spočítáme jako

$$P_i = PS \sin \alpha_i,$$

kde S jsme označili plochu solárního panelu. Číselným dosazením dostaneme $P_1 = 1,23 \text{ kW}$ a $P_z = 0,39 \text{ kW}$. Můžeme si všimnout, že jen díky jinému postavení Slunce na obloze se sníží výkon solární elektrárny v zimě na třetinu letního výkonu. V zimě také bývá vyšší oblačnost než v létě, což rozdíl mezi zimním a letním výkonem elektrárny ještě více prohlubuje.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

⁵https://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_měst_podle_zeměpisné_šířky

⁶ Používáme konvenci, že rovník má 0° , severní šířky jsou kladné a jižní šířky záporné.

Úloha II.3 . . . pozorovací

6 bodů; (chybí statistiky)

Jakou část povrchu kulové planety není možné vidět ze stacionární oběžné dráhy planety (taková dráha, že se obíhající objekt nachází stále nad stejným bodem na planetě), která má hustotu ρ a periodu rotace T ?

Filip procházel nevidené úlohy z náboja.

Daniel Dupkala

daniel.dupkala@fykos.cz

Úloha II.4 . . . jaderný odpad nikdy více

6 bodů; (chybí statistiky)

Představme si, že máme něco (například jaderný odpad) a chceme se toho zbavit. Těleso dostaneme na oběžnou dráhu Slunce shodnou s oběžnou dráhou Země, ale dostatečně daleko od Země, abychom mohli gravitační působení Země nadále zanedbávat. Otázka je, jaký způsob zbravení se inkriminovaného předmětu by nás stál kolik energie a který postup by byl tedy nejvýhodnější. Varianty jsou

- Hodit to do Slunce. Stačí, aby se to dostalo na sluneční povrch a bude to dostatečně usmažené.
- Převést to na kruhovou dráhu v Hlavním pásu (pás planetek mezi Marsem a Jupiterem).
- Vyhodit to zcela ze Sluneční soustavy.

Karel přemýšlel nad tím, co je vlastně SEO a narazil na úlohu.

Nebudeme uvažovat gravitační vliv ostatních planet Sluneční soustavy. Kdybychom povolili využití gravitačního praku (tj. manévru, při kterém je těleso urychleno nebo zpomaleno při průletu okolo planety přičemž lze změnit i směr rychlosti), stačilo by pak těleso dopravit k nějaké planetě (Venuši nebo Marsu) a pomocí opakovaných gravitačních manévru bychom ho byli schopni dopravit téměř kamkoliv bez dalších energetických nákladů. V této úloze nám nejde o to, jak dlouho bude trvat přeprava tělesa, proto bychom mohli velmi dlouho čekat, dokud se určitá planeta nevyskytne v určité pozici a postupnými manévry (mezi nimiž mohou být staleté prostoje) jí dostat do požadované pozice.

Označme si hmotnost tělesa m , hmotnost Slunce M , vzdálenost Země-Slunce R a počáteční rychlost (před výstřelem) v_0 , kterou spočítáme z rovnosti odstředivého a gravitačního zrychlení

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Z energetického hlediska je pro nás nejvýhodnější rovnou těleso vystřelit z původní orbity. Kdybychom to naložili na nějakou raketu, která by to postupně urychlovala, tak by se zbytečně spotřebovávala energie na urychlování rakety a paliva a raketový motor nemůže mít ani teoreticky 100% účinnost. Uvažujeme tedy, že těleso odpálíme jednorázově z nějaké stanice, které má mnohem větší hmotnost, a proto můžeme uvažovat, že celková spotřebovaná energie odpovídá změně rychlosti tělesa

$$E = \frac{1}{2}m|\Delta\mathbf{v}|^2.$$

Ze Sluneční soustavy

Naším cílem je uvést těleso na parabolickou dráhu tak, aby se nikdy nevrátilo zpět. Odletí od Slunce tak, že se bude neustále vzdalovat a zpomalovat, ale teoreticky se zastaví až v nekonečnu

(za nekonečný čas). V nekonečnu bude mít nulovou potenciální i kinetickou energii. Ze zákona zachování energie tedy vyplývá, že bychom ho měli urychlit na rychlost v_1 tak, aby jeho celková energie byla nulová

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{R} = 0,$$

kde jsme využili vztah pro potenciální energii v radiálním gravitačním poli. Výsledná rychlost je

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Této rychlosti dosáhneme nejlépe (při minimálním $|\Delta\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0|$), pokud těleso urychlíme ve směru jeho rychlosti, tedy ve směru tečném k oběžné dráze. Potřebujeme tedy zvýšit jeho rychlost o

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 12,4 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (1)$$

Tato rychlost se mimochodem někdy označuje jako 3. kosmická rychlost. Potřebná energie je

$$E_1 = (3 - 2\sqrt{2}) \frac{GMm}{2R}.$$

Hlavní pás

Chceme-li těleso dostat na kruhovou oběžnou dráhu v Hlavním pásu, bude potřeba provést dva manévry. Nejprve těleso převedeme na eliptickou dráhu (tzv. Hohmannova elipsa) s periheliem na oběžné dráze Země a afeliem v Hlavním pásu. Až se dostaneme do afelia, zvýšíme rychlost tak, aby těleso zůstalo na kruhové dráze v této vzdálenosti od Slunce. Tomuto přechodu mezi dvěma orbitami se říká Hohmannova trajektorie.

Problém je v tom, že nemůžeme těleso jen jednou urychlit (vystřelit), ale potřebujeme manévrovat dvakrát. Takže si musíme vyslat těleso i spolu s nějakou raketou, motorem, který ho pak může převést na kruhovou dráhu.

Poloměr Hlavního pásu označíme R_A . Chceme spočítat rychlost v_3 , na kterou těleso musíme urychlit, aby se pohybovalo po zmíněné eliptické dráze. Vyjdeme ze zákona zachování energie pro stav v periheliu a afeliu

$$\frac{1}{2}m'v_3^2 - \frac{GMm'}{R} = \frac{1}{2}m'v_A^2 - \frac{GMm'}{R_A},$$

kde m' je hmotnost tělesa i s raketou a v_A je rychlost v afeliu, kterou můžeme vyjádřit z Keplerova zákona

$$v_A R_A = v_3 R.$$

Vyjádřením v_3 z těchto dvou rovnic dostáváme

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GMR_A}{R(R_A + R)}}.$$

Nyní, když máme těleso na eliptické dráze, musíme v afeliu zvýšit jeho rychlost

$$v_A = \sqrt{\frac{2GMR}{R_A(R_A + R)}}$$

na rychlost

$$v_4 = \sqrt{\frac{GM}{R_A}}.$$

Postupné změny rychlostí (znaménko jsme volili tak, aby $\Delta v_3, \Delta v_4 > 0$) jsou tedy

$$\Delta v_3 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \left(\sqrt{\frac{2R_A}{R_A + R}} - 1 \right),$$

$$\Delta v_4 = \sqrt{\frac{GM}{R_A}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R}{R + R_A}} \right).$$

Uvažujme, že těleso společně s palivem a další zátěží o hmotnosti $m_2 = m' - m$ vyšleme z původní orbity Slunce na eliptickou dráhu. Na to je potřeba energie

$$E_{3a} = \frac{1}{2}(m + m_2)\Delta v_3^2.$$

Když se vyslaný objekt dostane do afelia, potřebujeme jeho rychlost zvýšit o Δv_4 . Ale to nepůjde jen tak. Abychom těleso urychlili, musíme podle zákona zachování hybnosti něco jiného zpomalit (nebo urychlit opačným směrem). To by se dalo vyřešit zapnutím raketového motoru, který vysílá urychlené palivo opačným směrem. Z energetického hlediska bude nejvýhodnější, když všechno palivo vyšleme určitou rychlostí Δu_2 najednou. Skutečný motor by měl menší účinnost, ale následujícím způsobem lze spočítat alespoň teoretické minimum potřebné energie.

Ze zákona zachování hybnosti

$$\Delta v_4 m = \Delta u_2 m_2,$$

$$E_{3b} = \frac{1}{2}m\Delta v_4^2 + \frac{1}{2}m_2\Delta u_2^2 = \frac{1}{2}m\Delta v_4^2 + \frac{m^2}{2m_2}\Delta v_4^2.$$

My hledáme takovou hmotnost m_2 , aby celková spotřebovaná energie $E_3 = E_{3a} + E_{3b}$ byla co nejmenší. To najdeme tak, že derivaci E_3 podle m_2 položíme rovnou nule.

$$\frac{dE_3}{dm_2} = -\frac{m^2}{2m_2^2}\Delta v_4^2 + \frac{1}{2}\Delta v_3^2 = 0,$$

$$\frac{m^2}{2m_2^2}\Delta v_4^2 = \frac{1}{2}\Delta v_3^2,$$

$$m^2\Delta v_4^2 = m_2^2\Delta v_3^2,$$

$$m_2 = m \frac{\Delta v_4}{\Delta v_3}.$$

Jde skutečně o minimum, protože v extrémních případech pro velmi malé nebo velmi velké m_2 jde E_3 k nekonečnu a tento výsledek je jakýsi kompromis mezi těmito extrémy. Po dosažení můžeme spočítat energii E_3

$$E_3 = \frac{1}{2}(m + m_2)\Delta v_3^2 + \frac{1}{2}m\Delta v_4^2 + \frac{m^2}{2m_2}\Delta v_4^2,$$

$$E_3 = \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{\Delta v_4}{\Delta v_3} \right) \Delta v_3^2 + \frac{1}{2}m\Delta v_4^2 + \frac{1}{2}m\Delta v_3\Delta v_4 = \frac{1}{2}m(\Delta v_3 + \Delta v_4)^2.$$

Vyšlo nám tedy, že potřebujeme minimálně takovou energii, která by byla potřeba na urychlení tělesa na rychlost $\Delta v_{34} = \Delta v_3 + \Delta v_4$. Tomu se mimochodem říká delta- v budget, což je celkový součet změn rychlosti během manévru a to určuje celkovou potřebnou energii. Součet změn rychlosti je

$$\begin{aligned}\Delta v_{34} &= \Delta v_3 + \Delta v_4 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \left(\sqrt{\frac{2R_A}{R_A + R}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{GM}{R_A}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R}{R + R_A}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{GM}{RR_A(R_A + R)}} \left(\sqrt{2}(R_A - R) + \left(\sqrt{R} - \sqrt{R_A} \right) \sqrt{R_A + R} \right).\end{aligned}$$

Je známo⁷, že se Hlavní pás nachází ve vzdálenosti od 2 AU až po 4 AU, tedy $R_{A\min} = 2R$ a $R_{A\max} = 4R$.

$$\begin{aligned}\Delta v_{34\min} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) \sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 8,46 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}, \\ \Delta v_{34\max} &= \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 13,3 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}.\end{aligned}$$

Z energetického hlediska je tedy nejvýhodnější vyslat těleso na bližší okraj Hlavního pásu. Potřebná energie pak je

$$E_{3\min} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)^2 \frac{GMm}{2R}.$$

Tento způsob vyžaduje ze všech tří nejméně energie, i když je relativně složitý.

Poznámka Někdo by mohl navrhnout použití přechodu pomocí dvou půlelips („bi-elliptic transfer“), který spočívá v uvedení tělesa na eliptickou dráhu, jejíž hlavní poloosa je řádově větší, než poloměr požadované finální orbity v Hlavním pásu. Následně je těleso v aféliu, kde se pohybuje malou rychlostí, zrychleno (na to není potřeba velké množství energie) tak, aby se perihelium nové eliptické trajektorie nacházelo ve vzdálenosti R_A od Slunce. V periheliu je pak těleso zpomaleno, aby zůstalo na kruhové oběžné dráze. Tato trajektorie může být v některých případech opravdu energeticky výhodnější, než Hohmannova trajektorie. Ukazuje se ale⁸, že poměr poloměru konečné a původní trajektorie musí být alespoň 11,94 nebo větší. Takže v našem případě by se to nevyplatilo.

Do Slunce

V předchozích případech jsme těleso urychlovali, teď se nabízí ho zpomalit a nechat ho „spadnout“ do Slunce. Konkrétně ho stačí zpomalit tak, aby jeho eliptická trajektorie měla afélium na původní trajektorii a perihelium na obrácené straně povrchu Slunce (jiné trajektorie vyřešíme později). Při svém pohybu tedy jen „škrtně“ o povrch Slunce, ale to stačí na pohlcení. Označme R_S poloměr Slunce. Znovu použijeme zákon zachování energie.

$$\frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{R_S} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R},$$

⁷https://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavn%C3%AD_p%C3%A1s

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Bi-elliptic_transfer

kde v_2 je rychlost, na kterou jsme těleso zpomalili a v_P je rychlost v periheliu, kterou vyjádříme pomocí druhého Keplerova zákona

$$v_P = \frac{v_2 R}{R_S}.$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2 R^2}{2R_S^2} - \frac{GM}{R_S} &= \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{GM}{R}, \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2GMR_S(R - R_S)}{R(R^2 - R_S^2)}} = \sqrt{\frac{2GMR_S}{R(R + R_S)}}. \end{aligned}$$

Rychlost potřebujeme změnit o

$$\Delta v_2 = v_0 - v_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{2R_S}{R + R_S}}\right) \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx \left(1 - \sqrt{\frac{2R_S}{R}}\right) \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Při porovnání s (1) vidíme, že pokud platí

$$1 - \sqrt{\frac{2R_S}{R + R_S}} > \sqrt{2} - 1,$$

je výhodnější vyhodit těleso ze Sluneční soustavy, než ho poslat do Slunce. Po úpravě nerovnice dostáváme

$$R/R_S > \frac{2}{\sqrt{2} - 1},$$

což platí vždy pro $R_S \ll R$.

Existují ale i jiné, energeticky výhodnější, způsoby, jak poslat těleso do Slunce. Například můžeme poslat těleso do nekonečna (tedy pryč ze Sluneční soustavy) a tam ho o malinko zpomalit. Vhodně zvolené (nekonečně malé) zpomalení způsobí, že jeho celková energie bude záporná a si Slunce ho tedy přitáhne zpět a pohltí. Sice spotřebujeme mnohem menší množství energie (stejně, jako v prvním případě – výstřelu do nekonečna), problém této metody ale spočívá v tom, že zabere nekonečně dlouhý čas.

Zajímá-li nás pouze minimální potřebná energie (a ne čas), je naše delta- v :

$$v_1 = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Chceme-li těleso spálit Sluncem rychleji, stačí ho urychlit o něco menší rychlostí, než v_1 . Tím se dostane na eliptickou trajektorii, jejíž afélium bude velmi daleko, je-li rychlost jen o málo menší, než v_1 . V aféliu pak těleso zpomalíme na (skoro) nulovou rychlost a těleso tak prakticky spadne do slunce. Na to ale spotřebujeme více energie, než na samotný výstřel do nekonečna.

Čím rychleji ho budeme chtít dostat do Slunce, tím větší delta- v bude potřeba a tím více energeticky náročný náš manévr bude. V extrémním případě můžeme těleso vystřelit vysokou rychlostí směrem ke Slunci (resp. trochu vedle, aby se tangenciální složka rychlosti odečetla), čímž by se dostalo do Slunce velmi rychle.

Tvrzení že pro hod do Slunce je nejefektivnější vyslání tělesa do nekonečna a následné zpomalení, je dokázáno v další podkapitole.

A nevyplatilo by se střílet šikmo?

Pojďme případ hození do slunce vyřešit obecněji. Budeme se nyní zabývat jen bielptickým manévrem, který je jednodušší a na teoretický popis nám bude stačit. Jiné typy manévru zahrnují i konstrukci rakety, účinnost jejich motorů, která může záviset na jejich výkonu, a další parametry.

Máme těleso, které obíhá Slunce ve vzdálenosti R rychlostí v_0 . Rychlost si rozdělíme na tři vzájemně kolmé složky

- tečná – ve směru pohybu oběhu okolo Slunce
- radiální – ve směru od Slunce
- axiální – ve směru kolmém na rovinu oběhu

Počáteční rychlost je v tečném směru v_0 , v ostatních směrech je nulová. V okamžiku po výstřelu si složky označíme po řadě v_t, v_r, v_a . Těleso tak navedeme na eliptickou dráhu a v jejím afeliu ho zpomalíme tak, aby spadlo do Slunce. Jelikož je poloměr Slunce velmi malý v porovnání s poloměrem oběhu Země, jenž je menší, než hlavní poloosa vzniklé elipsy, budeme předpokládat, že těleso v afeliu úplně zastavíme. Pak začne padat přímo do středu slunce.

Celá naše Δv spotřeba pak bude

$$\Delta v = v_A + \sqrt{(v_t - v_0)^2 + v_r^2 + v_a^2}, \quad (2)$$

kde v_A je rychlost v afeliu. Tuto spotřebu se snažíme minimalizovat.

Zamyslíme-li se nad tím, jak axiální rychlost ovlivňuje naši trajektorii, tak zjistíme, že jen „naklání“ rovinu elipsy. Potom si stačí změnit souřadnou soustavu a pozorovat pohyb v rovině nakloněné elipsy. Radiální složka v nové soustavě zůstane stejná, axiální složka je nulová a tečná složka je součet původní radiální a tečné

$$v'_t = \sqrt{v_t^2 + v_a^2}$$

Urychlili jsme-li těleso v axiálním směru, způsobili jsme tak jen náklon rotace a zvýšení tečné rychlosti. Stejně jako při výstřelu ze Sluneční soustavy ale víme, že se nám nevyplatí urychlovat těleso v axiálním směru. Dále tedy budeme počítat s $v_a = 0$. Taky si můžeme rozmyslet, že stačí uvažovat $v_t \geq 0$.

Budeme znovu vycházet ze zákona zachování momentu hybnosti a zákona zachování energie

$$v_t R = v_A R_A, \\ v_t^2 + v_r^2 - 2K = v_A^2 - 2K \frac{R}{R_A},$$

kde je vzdálenost v afeliu a v_A rychlost v afeliu. V ZZE jsme rovnou vypustili hmotnost tělesa a zavedli substituci $K = \frac{GM}{R}$. R_A můžeme z rovnic eliminovat

$$v_A^2 - 2K \frac{v_A}{v_t} - v_t^2 - v_r^2 + 2K = 0.$$

Důležité je, že náš model platí pro eliptický pohyb, tedy dodaná rychlost nesmí být větší, než úniková. Vyjádříme v_A a dosadíme do 2

$$v_A = \frac{K}{v_t} - \sqrt{\frac{K^2}{v_t^2} + v_t^2 + v_r^2 - 2K}, \\ \Delta v = \frac{K}{v_t} - \sqrt{\frac{K^2}{v_t^2} + v_t^2 + v_r^2 - 2K} + \sqrt{(v_t - v_0)^2 + v_r^2},$$

kde jsme při řešení kvadratické rovnice zvolili pouze menší řešení (s mínusem před odmocninou), druhé řešení by udávalo rychlost v periheliu (která je vyšší).

Hledáme minimum funkce Δv . Problém je v tom, že závisí na dvou nezávislých parametrech v_t a v_r . To uděláme pomocí parciálních derivací

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial v_r} = -\frac{v_r}{\sqrt{\frac{K^2}{v_t^2} + v_t^2 + v_r^2 - 2K}} + \frac{v_r}{\sqrt{(v_t - v_0)^2 + v_r^2}} = 0,$$

$$\frac{v_r}{\sqrt{\frac{K^2}{v_t^2} + v_t^2 + v_r^2 - 2K}} = \frac{v_r}{\sqrt{(v_t - v_0)^2 + v_r^2}}$$

Vidíme, že jedno řešení je $v_r = 0$. Za v_0 můžeme dosadit \sqrt{K} a pokračovat v úpravách

$$\sqrt{\left(\frac{K}{v_t} - v_t\right)^2 + v_r^2} = \sqrt{(v_t - \sqrt{K})^2 + v_r^2},$$

$$\left|\frac{K - v_t^2}{v_t}\right| = |v_t - \sqrt{K}|,$$

$$\frac{|\sqrt{K} - v_t||\sqrt{K} + v_t|}{v_t} = |\sqrt{K} - v_t|,$$

$$v_t = \sqrt{K} = v_0.$$

Docházíme, tedy k tomu, že pro $v_t = v_0$ je řešením podmínky nulové parciální derivace libovolné v_r . To odpovídá stavu, kdy těleso vystřelíme kolmo na původní kruhovou dráhu; dosazením do Δv vidíme, že $\Delta v = v_0$. Pro jiné v_t může minimum nastat jen pro $v_r = 0$ nebo maximální v_r (tedy výstřel do nekonečna, který jsme už vyřešili).

Zjistili jsme tedy, že je nejvýhodnější nestřílet „šikmo“ a těleso urychlovat pouze v tečném směru. Vztah pro Δv se nám znovu zjednoduší

$$\Delta v = \frac{K}{v_t} - \left|\frac{K}{v_t} - v_t\right| + |v_t - \sqrt{K}|.$$

Řešíme dva případy $v_t < \sqrt{K}$ a $v_t > \sqrt{K}$. Pro $v_t < \sqrt{K}$ je afelium na původní dráze, nemusíme to tedy uvažovat. Pro $v_t > \sqrt{K}$ dostaneme

$$\Delta v = \frac{K}{v_t} + \frac{K}{v_t} - v_t + v_t - \sqrt{K} = \frac{2K}{v_t} - \sqrt{K}.$$

To znamená, že čím vyšší rychlost v_t , tím méně bude potřeba energie na manévr. Ovšem jsme omezeni podmínkou, že rychlost nesmí být vyšší, jak úniková, jinak náš model selže a může vycházet záporná Δv . Nejefektivnější bude znovu výstřel do nekonečna.

Pojďme se ještě zamyslet nad tím, kdybychom nepoužili bieliptický přesun ale pouze bychom těleso z oběžné dráhy vystřelili tak, že perihelium jeho trajektorie bude uvnitř slunce (resp. na jeho okraji ve vzdálenosti R_S , protože určitě bude výhodnější, těleso zpomalit/urychlit tak, aby se dostalo na povrch Slunce, než někam dovnitř). Stejnou úvahou, jako v předchozím případě, dojdeme k tomu, že nemá smysl dodávat tělesu axiální složku rychlosti. Znovu vyjdeme z rovnic pro zákon zachování energie a momentu hybnosti

$$v_P^2 - 2K \frac{R}{R_S} = v_t^2 + v_r^2 - 2K,$$

$$v_t R = v_P R_S.$$

Označíme poměr $R/R_S = r$ a eliminujeme rychlost v periheliu v_p

$$v_t^2 = v_t^2 r^2 - 2Kr - v_t^2 + 2K. \quad (3)$$

Dosadíme do vztahu pro Δv , který nyní nezahrnuje rychlost v_A , protože nepotřebujeme nikde brzdit

$$\Delta v = \sqrt{(v_t - \sqrt{K})^2 + v_t^2},$$

$$\Delta v = \sqrt{(v_t - \sqrt{K})^2 + v_t^2 r^2 - 2Kr - v_t^2 + 2K} = \sqrt{v_t^2 r^2 - 2v_t \sqrt{K} + (3 - 2r)K}.$$

Hledáme nyní takovou rychlost v_t , pro kterou je Δv nejmenší. Výraz pod odmocninou je kvadratická funkce, víme tedy, že minimum má pro $v_t = \sqrt{K}r^{-2} = v_0 r^{-2}$. Toto minimum je ale vždy záporné; podíváme-li se ale na rovnici (3), zjistíme, že není splněna podmínka řešitelnosti pro v_t (v_t^2 vychází taky záporné).

Fyzikální význam je takový, že ZZE určuje minimální možnou rychlost v periheliu a tedy i minimální možnou hodnotu tečné složky rychlosti; pokud zvolíme tečnou rychlost menší, neexistuje dráha s periheliem na povrchu Slunce. Rychlost v_t tedy musíme zvýšit z hodnoty $v_0 r^{-2}$ tak, aby v_t^2 bylo nezáporné. Protože minimalizujeme kvadratickou funkci, víme, že je optimální zvýšit v_t minimálně, čímž dostaneme znovu $v_t = 0$. To je případ, který jsme počítali výše, kdy těleso pouze (tečně) zpomalíme a necháme ho spadnout po elipse.

Víme ale, že výhodnější zůstává stejně případ vyhození do nekonečna a ještě výhodnější vyhození do Hlavního pásu.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha II.5 ... skleněný déšť

7 bodů; (chybí statistiky)

Dělník si na stavbu mrakodrapu přinesl vak se skleněnkami, aby se s nimi mohl pochlubit svým kolegům. A co se nestane – vak se vysype a kuličky padají skrze lešení směrem k zemi. Lešení se skládá z jednotlivých poschodí o výšce h . Podlaha každého poschodí se skládá ze stejných mříží, ve kterých díry zaujímají $k\%$ z celkové plochy mříže. Uvažujme zjednodušený model propadávání kuliček lešením, kdy, pokud kulička spadne na díru v lešení, tak projde bez ovlivnění, a pokud spadne na pevnou část mříže, tak se její rychlost sníží na 0 a ihned začne dále padat (tj. velikost kuliček je zanedbatelná vůči velikosti děr v lešení, kuličky se od lešení nijak neodráží a po dopadu na pevnou část mříže se ihned skutálí do díry a dále začínají padat). Nakonec neuvážujme ani potenciální srážky kuliček mezi sebou. Předpokládejte, že kuličky se z tašky sypou s konstantním hmotnostním průtokem Q . Jakou silou budou kuličky působit na každé patro lešení, až se situace ustálí? *Mirek chtěl převést Ohmův zákon do mechaniky.*

Patro, ve kterém dělník upustí kuličky, označíme číslem 0. Zároveň předpokládejme, že počáteční rychlost všech kuliček je nulová. Pro maximální rychlost v n -tém patře bez lešení potom platí rovnice

$$v_n = gt_n,$$

$$nh = \frac{1}{2}gt_n^2,$$

jejichž řešením je vztah $v_n = \sqrt{2ngh}$.

Každá kulička může v každém patře buď narazit, nebo pokračovat dál. To znamená, že její cestu až do n -tého patra můžeme jednoznačně popsat pomocí řetězce jedniček a nul o délce $n - 1$. Například 0100 bude znamenat, že kulička v prvním patře nenarazila, ve druhém ano, ve třetím ne a ve čtvrtém opět ne. Do n -tého patra se tak každá kulička mohla dostat 2^{n-1} způsoby. Vydělme k stovkou; pravděpodobnost, že kulička propadne patrem, pak je k , zatímco pravděpodobnost, že narazí, je $(1 - k)$. Pro pravděpodobnost cesty do n -tého patra ve tvaru 0100 tak platí $P(0100) = k(1 - k)k \cdot k = k^3(1 - k)$. V praxi to znamená, že cestou 0100 se vydá hmotnostní tok $Q_{0100} = P(0100)Q = k^3(1 - k)Q$.

Počet nul na konci zápisu cesty kuličky do n -tého patra označíme d , v tomto případě např. platí $d(0100) = 2$. To znamená, že předtím, než daná kulička dopadla do n -tého patra, narazila nejpозději přesně v $(n - d - 1)$ -tém patře. Její rychlost v n -tém patře tedy bude v_{d+1} . Je zřejmé, že $d \in \langle 0, n - 1 \rangle$.

Pokud kulička narazí, veškerá její hybnost se změní na nulu. Pokud tedy za čas t dopadnou na patro lešení kuličky s celkovou hmotností $m = Q't$ a rychlostí v , působí tím silou

$$F = m \frac{v}{t} = Q'v.$$

Hmotnostní tok pro kuličky popsané řetězcem i je rovný $Q' = QP(i)$.

Nyní už dokážeme popsat všechny možné cesty kuliček do n -tého patra a víme, jaký hmotnostní tok jimi bude proudit. Zároveň umíme vyjádřit rychlost, kterou se dané kuličky budou pohybovat, a víme, jak z toho spočítat výslednou sílu. Ještě je potřeba dodat, že jen $(1 - k)$ kuliček se v n -tém patře zastaví, takže celkovou sílu působící na dané patro můžeme spočítat sumou

$$F_n = Q(1 - k) \sum_{i \in M_{n-1}} P(i) v_{d(i)+1}, \quad (4)$$

kde M_{n-1} je množina všech řetězců jedniček a nul s délkou $n - 1$.

Tato suma obsahuje celkem 2^{n-1} sčítanců. Rozdělíme si je na n skupin tak, aby všechny členy v jedné skupině měly stejnou hodnotu d . Díky tomu můžeme člen v_{d+1} z každé skupiny vytknout a potom počítat jen sumu členů $P(i)$ v dané skupině. Všechny řetězce z jedné skupiny mají $n - 1$ číslic a končí na číslici 1, následovanou d nulami.⁹ To znamená, že ještě nemáme určených prvních $n - d - 2$ číslic. V každé skupině budou přítomny jejich všechny možné kombinace. Sumu všech členů z jedné skupiny tak můžeme vyjádřit výrazem

$$S(d) = v_{d+1}(1 - k)k^d \sum_{j \in M_{n-d-2}} P(j), \quad (5)$$

který ovšem neplatí pro skupinu s $d = n - 1$. Ta obsahuje jen samé nuly, takže pro ní platí $S(n - 1) = v_n k^{n-1}$.

Připomeňme si, že množina M_{n-d-2} obsahuje všechny možné řetězce jedniček a nul o celkové délce $n - d - 2$. Pro každý řetězec j z této množiny potom platí $P(j) = k^\alpha(1 - k)^\beta$, kde α je

⁹S výjimkou skupiny s $d = n - 1$, ve které je jen jeden řetězec tvořený samými jedničkami.

počet nul v této sekvenci a $\beta = n - d - 2 - \alpha$ je počet jedniček v této sekvenci. Pokud známe binomickou větu, neměla by nás překvapit rovnost

$$\sum_{j \in M_{n-d-2}} P(j) = (k + (1-k))^{n-d-2} = 1,$$

kteřá nám umožní přepsat vzorec (5) do tvaru $S(d) = v_{d+1}(1-k)k^d$ pro $d \neq n-1$ a $S(n-1) = v_n k^{n-1}$.

Všechny členy ze sumy ve vzorci (4) jsme si rozdělili do několika skupin podle d a poté jsme spočítali součet všech členů v každé této skupině. Celkovou sumu z (4) tak můžeme nahradit sumou těchto jednotlivých součtů a dostaneme

$$F_n = Q(1-k) \sum_{d=0}^{n-1} S(d) = Q(1-k) \left(v_n k^{n-1} + (1-k) \sum_{d=0}^{n-2} v_{d+1} k^d \right)$$

$$F_n = Q\sqrt{2gh}(1-k) \left(k^{n-1}\sqrt{n} + (1-k) \sum_{i=1}^{n-1} k^{i-1}\sqrt{i} \right).$$

Tento vzorec je řešením úlohy, protože sumu v něm obsaženou už není možné dále zjednodušit¹⁰. Tento vztah by sme takmer dokázali napísať inšpekciou: prvý člen v zátvorke je prípad kedy guľička padne priamo až na poschodie n , jej hybnosť je teda úmerná \sqrt{n} , druhý člen sú prípady kedy guľička padá priamo z výšky i nad n -tým poschodím; na to aby padla z výšky i , musela prekonať $i-1$ poschodí, preto k^{i-1} , a dopadnúť na poschodie predtým, z čoho máme $(k-1)$, jej hybnosť je úmerná \sqrt{i} , teda rátama vážený priemer \sqrt{i} . Pre overenie, ak zo zátvorke vypustíme členy s odmocninami, teda nebudeme rátať súčet hybností, ale len súčet guľičiek, dostaneme v zátvorke 1 tak ako by sme čakali (všetky guľičky sa dostanú na n -té poschodie).

Můžeme si všimnout zajímavé skutečnosti – pro velká n suma konverguje ke kladnému reálnému číslu, zatímco výraz $k^{n-1}\sqrt{n}$ konverguje k nule. Díky tomu se i F_n blíží k nějaké konkrétní hodnotě, což je přesně to, co bychom z fyzikálního hlediska čekali a co lze vidět v grafu 1 pro různé hodnoty k .

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha II.P ... ó Oganesson

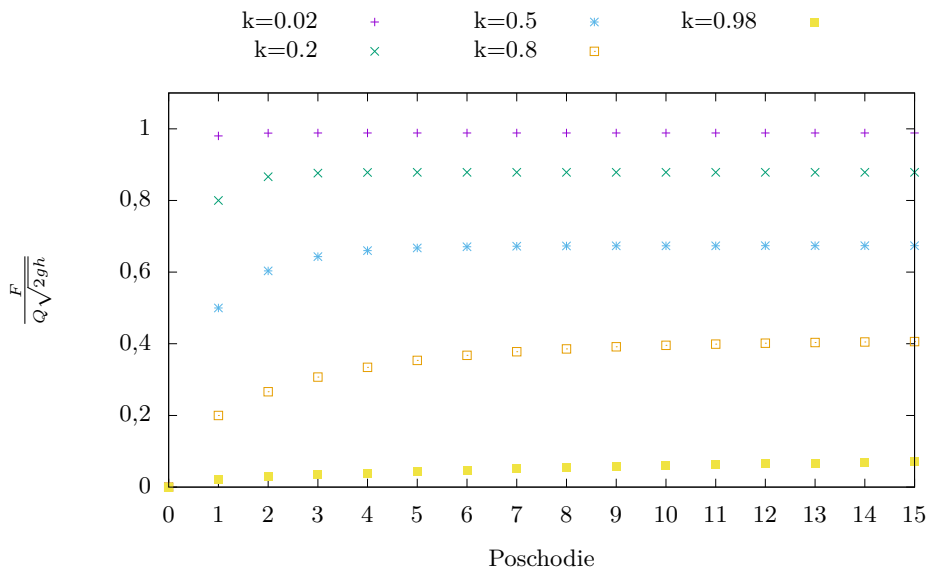
10 bodů; (chybí statistiky)

Jaké vlastnosti má 118. prvek periodické soustavy prvků? Respektive jaké by asi měl, kdyby byl stabilní? Diskutujte alespoň tři fyzikální vlastnosti. Karel chtěl zadat něco na extrapolaci.

Prvek s protonovým číslem 118 již byl objeven. Nicméně i tak se o něm zase mnoho neví, protože jeho objev byl potvrzen v roce 2016 na základě potvrzených a naměřených rozpadů tří (možná čtyř) atomů oganessonu, jak se tento prvek nyní nazývá. Je pojmenován po ruském jaderném vědci Juriji Colakovičovi Oganessianovi. Vzhledem k tomu, že tento prvek patří do posledního sloupce tabulky, mělo by se jednat o vzácný plyn. Minimálně vzácný opravdu je.

Naměřený izotop měl 294 nukleonů. Nicméně pokud bychom se zajímali o různé další odhady a spekulace nad tím, jaké prvky by mohly být stabilní a jaké jejich nukleonová čísla by mohla

¹⁰dá se pouze vyjádřit pomocí speciálních funkcí

Obr. 1: Síla působící na jednotlivá patra pro různé hodnoty k .

být vhodná, pak teoreticky modely odhadují, že by stabilnější mohly být takto těžké prvky, pokud by měly ještě vyšší počet neutronů. Nicméně ty se zatím nějak nepodařilo naměřit, takže jde zatím pouze o nepotvrzenou teorii. Nicméně hned atomová hmotnost by mohla být zajímavou fyzikální vlastností k prozkoumání.

Pro naše extrapolace budeme využívat program Wolfram Mathematica 11 a údaje o prvcích budeme získávat přímo z knihovny ElementData. Pro různé fyzikální vlastnosti bude různé účelné extrapolovat na základě buď přímo protonového čísla nebo na základě řádku, ve kterém daný prvek vyskytuje. Logicky pokud se budeme zajímat o hmotnost, tak bude spíše rozhodující protonové číslo. Pokud se ale zajímáme o nějaké chemické vlastnosti, tak se stává potenciálně zajímavější číslo řádku. My budeme provádět pouze jednoduché odhady vlastností prvku 118 na základě známých fyzikálních vlastností jiných prvků a to jednoduchou extrapolací. Nebudeme tedy uvažovat nějaké složitější fyzikální modely na vysokoškolské úrovni, spíše se budeme snažit prokládat hodnoty grafu nějakými rozumnými závislostmi a na základě toho tak trochu tipovat. Ono se totiž může ukázat, že závislost, která do nějaké doby byla docela dobře lineární se pak prudce změní kvůli tomu, že se začne projevovat například nějaký jiný fyzikální jev silněji.

Prokládat se budeme snažit co nejjednoduššími závislostmi, protože máme velice málo dostupných bodů. Maximálně budeme mít 6 hodnot předcházejících prvků. Proč? Protože se ukazuje, že podobné vlastnosti mají prvky, které jsou ve stejném sloupci (2 - helium, 10 - neon, 18 - argon, 36 - krypton, 54 - xenon, 86 - radon). Proto nebudeme v našich extrapolacích uvažovat jiné prvky než vzácné plyny. Pro některé fyzikální vlastnosti, jako například pro teplotu tuhnutí, pak budeme mít těchto bodů i méně, protože například helium (alespoň za normálního tlaku) netuhne.

Naše metoda bude opravdu tím pádem opravdu relativně prostá. Budeme se prostě dívat na

data, snažit se odhadnout, jestli nám na ně „dobře sedí“ třeba lineární závislost nebo kvadratická a to ještě jestli nám to sedí líp na protonová čísla nebo index řádku prvku.

Vraťme se k určování relativní atomové hmotnosti oganessonů. Vzhledem k tomu, že hmotnost bude záviset na počtu nukleonů, která je závislá příměji na protonovém čísle než jenom na čísle řádku. Body pak sedí velice dobře na přímce ($R = 0,998$). Je jasné, že pokud použijeme kvadratickou aproximaci, tak dostaneme lepší výsledek - alespoň, co se týče intrapolace. My ovšem extrapolujeme, což je víc závislé na důvěře toho, jak naše funkce bude fungovat i mimo oblast, kde máme data. Obecně je pak zvýšení stupně polynomu používaného v aproximaci a extrapolaci docela rizikové, protože polynom vysokého stupně má tendenci mimo intrapolovanou oblast rychle růst či klesat. Pokud se ovšem podíváme na graf, tak se zdá, že kvadratická závislost je výrazně lepší a opravdu, pokud se podíváme spolehlivost odhadu, tak je $R = 0,99995$. Tedy náš nejlepší odhad relativní atomové hmotnosti prvku 118 bude zhruba 323. Relativní atomová hmotnost izotopu prvku 118, který byl objeven, je ovšem známá a je to 294 (respektive přesněji bude někde mezi 293 a 294 a vlastně je také spočítaná). To je docela velký rozdíl. To nám hned ukazuje, že asi naše odhady nebudou úplně přesné. Nicméně minimálně se očekává, že těžší izotopy oganessonů budou stabilnější, nicméně zatím se je nepodařilo připravit.¹¹ Právě i vzhledem k tomuto nedostatku experimentálního ověření však nemůžeme náš, byť primitivnější odhad, považovat za zcela špatný. I když experimentální neúspěchy zase ukazují, že je trochu podezřelý, jak je těžké vyrobit ta těžší jádra.

Dále se můžeme zabývat například teplotou tání. Jak jsme již zmínili, tak přijdeme o helium jako jeden z bodů, ale budeme se zabývat pouze pěti ostatními vzácnými plyny. Teplota tání už přecijen trochu více souvisí s „chemií“ daného prvku, tedy s elektronovým obalem. Proto je také lépe vidět nějaká jednoduchá závislost z grafu, který je vytvořen v závislosti na řádku, ve kterém se prvek nachází. Pokud proložíme přímkou dostáváme teplotu tání -26°C při spolehlivosti $R = 0,993$, pro kvadratické proložení dostáváme -37°C při spolehlivosti $R = 0,995$. Vzhledem k tomu, že se spolehlivost moc neliší, bude pravděpodobně přesnější lineární odhad. Pokud bychom se podívali na nějaké další pravidelnosti, pak naměřená teplota tání je nejprve pod přímkou, pak nad, pak pod, zase mírně nad a nakonec opět pod. Z toho by se dalo usoudit, že možná bude opět mírně nad a na základě tohoto „věštění z křišťálové koule“ bychom mohli říci, že bude kolem -25°C .

Podobnou vlastností jako teplota tání je teplota varu. Tak se hned podívejme, jak to bude s teplotou varu. Helium nám alespoň kapalní, takže se nám do našich úvah opět vrací. Opět budeme brát jako důležitější číslo řádku daného prvku. Pokud si to tedy proložíme přímkou dostáváme teplotu varu oganessonů -22°C při spolehlivosti $R = 0,992$ a lineárním prokládání, respektive -13°C se spolehlivostí $R = 0,993$ s kvadratickým proložení. Opět bude asi rozumnější vzít lineární položení a to prohlásit za náš odhad.

Co kdybychom se ale chtěli zabývat o nějakou „složenu“ dvou fyzikálních vlastností? Hned první, která by nás mohla napadnout by mohl být teplotní rozdíl mezi teplotou tání a teplotou varu. Ten se ukáže až tak zajímavým, že z toho nedokážeme nic odhadnout. Proč? Protože pro neon je to 2,5 K, pro argon 3,5 K a krypton 4,1 K. To by bylo ještě dobré, ale pak nám tento rozdíl klesne na 3,8 K u xenonu a zase docela dramaticky vzroste na 9,3 K u radonu. Takže z těchto málo bodů se dá říci, že se závislost nedá nijak jednoduše odhadnout a ukazuje to, že nějaké složitější vlastnosti asi půjde odhadnout jenom velice špatně.

A co srovnání se současnými teoriemi? No vypadá to, že se právě u tohoto prvku už má

¹¹https://cs.wikipedia.org/wiki/Ostrov_stability

nejspíše začít projevovat „nová fyzika“, protože podle jednoho článku¹² by teplota varu měla být kolem 80 °C s tím, že při pokojové teplotě by tento prvek měl být pevný. Nicméně jsou to také zatím pouze neověřené teorie.

Dále bychom mohli zkoumat další fyzikální vlastnosti, které by vás napadly. A právě i proto čekáme na přijatá řešení, abychom do komentářů k došlým řešením uvedli, o které fyzikální vlastnosti jste se zajímali nejčastěji a které byly nejzajímavější.

Reference

Informace o prvku samotném

<https://cs.wikipedia.org/wiki/Oganesson>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Oganesson>

ElementData Source Information (zdroje dat, ze kterých byly ve Wolfram Mathematice extrapolovány vlastnosti oganessonu)

* ElementData is based on a wide range of sources,with enhancement at the Wolfram Research Companies by both human and algorithmic processing.Among principal sources for ElementData are:Atomic Mass Data Center.”NUBASE.” 2003.

* Barbalace,K.”Periodic Table of Elements.” 2007.

* Cardarelli,F.Materials Handbook:A Concise Desktop Reference.Springer,2000.

* Lide,D.R.(Ed.).CRC Handbook of Chemistry and Physics.87th ed.CRC Press,2006.

* Speight,J.Lange’s Handbook of Chemistry.McGraw-Hill,2004.

* United Kingdom National Physical Laboratory.”Kaye and Laby Tables of Physical and Chemical Constants.” 2007.

* United States National Institute of Standards and Technology.”Atomic Weights and Isotopic Compositions Elements.” 2005.

* United States National Institute of Standards and Technology.”NIST Chemistry Web-book.” 2005.

* Winter,M.”WebElements.” 2007.

Karel Kolář

karel@fykos.cz

Úloha II.E ... sypká

12 bodů; (chybí statistiky)

Změřte sypný úhel alespoň 2 látek běžně používaných v kuchyni (např. mouka, cukr, sůl apod.).

Michal se málem sesypal.

Teória

Ako je dobre známe, nasypaná látka vytvorí kužel s uhlom sklonu stien (voči vodorovnej rovine) α – to je hľadaný sypný uhol. Na stenu kužela sa môžeme pozrieť ako na naklonenú rovinu s koeficientom trenia μ ; z rovnováhy medzi tiažovou a trecou silou dostávame známy vzťah

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha .$$

Nejde o úplne realistický model, lebo zrnká môžu držať aj v strmšom kuželi, ak sa na seba vhodne „naskladajú“. Dalo by sa teda čakať, že látka s drsnejšími alebo väčšími zrnami bude mať sypný uhol väčší.

¹²Nash, Clinton S. (2005). "Atomic and Molecular Properties of Elements 112, 114, and 118". Journal of Physical Chemistry A. 109 (15): 3493– 3500. doi:10.1021/jp050736o. PMID 16833687.

Tab. 1: Nameraný sklon stien nasypaného kužela.

i	hl. múka		hr. múka		cukor		sol		mak	
	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$
1	34,5	45,0	40,1	37,5	41,2	41,7	42,2	45,3	40,9	38,2
2	47,8	43,5	38,7	35,2	43,3	37,3	44,1	41,5	40,8	40,1
3	48,6	41,7	37,8	39,6	41,8	39,6	42,7	41,0	38,4	38,1
4	41,1	48,4	39,9	38,3	46,7	39,2	40,2	40,0	38,6	39,2
5	49,1	48,8	38,8	38,0	35,4	44,0	41,2	36,5	40,3	38,4
6	46,0	43,5	43,9	39,0	42,9	41,3	36,6	40,8	37,2	38,8
7	56,4	54,1	37,6	38,4	41,1	39,7	40,4	37,7	38,9	36,5
8	57,5	52,2	37,5	38,0	41,9	40,3	39,9	41,4	37,6	36,1
9	49,8	47,5	38,0	37,0	38,9	41,8	47,3	35,0	42,6	37,5
10	50,0	49,5	38,4	40,8	40,6	40,3	39,7	39,6	37,7	38,4
$\bar{\alpha}$	48°		38,6°		41,0°		40,7°		38,7°	
σ_A	1°		0,4°		0,6°		0,7°		0,4°	

Postup pri experimente

Sypný uhol budeme merať pre nasledujúce látky: hladká múka, hrubá múka, (kryštalový) cukor, sol, mak.

Danú látku $N = 10$ -krát nasypeme na rovný tanier z čo najmenšej výšky a jemne zatrasieme. Výsledný kužel zbokou odfoťme, na strany kužela na fotke nakreslíme priamky a nájdeme uhly, ktoré zvierajú s vodorovnou osou. Zo všetkých $2N$ hodnôt pre ľavé a pravé strany kuželov vypočítame priemerný uhol $\bar{\alpha}$ a jeho štandardnú odchýlku (štatistickú) podľa vzťahu

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2N} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{2N(2N - 1)}}.$$

Odhadneme systematickú chybu jedného merania $\Delta\alpha$, z ktorej vypočítame štandardnú odchýlku (systematickú)

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{2N}} \Delta\alpha;$$

celkovú štandardnú odchýlku potom vypočítame podľa vzťahu

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}.$$

Výsledky merania

V tabuľke 1 je uvedený nameraný uhol α pre jednotlivé látky spolu s priemerom. Na obr. ?? až ?? sú fotky kôpok použitých pri experimentoch.

Chybu určenia uhla α odhadneme na $0,5^\circ$. Potom je systematická odchýlka priemeru rovná $\sigma_B \doteq 0,1^\circ$; vidíme, že je oproti štatistickej zanedbateľná, celková odchýlka teda bude približne rovná štatistickej.

Tab. 2: Sypný uhol jednotlivých látok.

látka	sypný uhol
hladká múka	$(48 \pm 1)^\circ$
hrubá múka	$(38,6 \pm 0,4)^\circ$
cukor	$(41,0 \pm 0,6)^\circ$
soľ	$(40,7 \pm 0,7)^\circ$
mak	$(38,7 \pm 0,4)^\circ$

Diskusia

Nameraný uhol α môže byť väčší ako skutočný kvôli naskladaniu zrníek. Kužeľ nasypanej látky by mal byť ale stabilný aj pri ľubovoľnom menšom uhle, čo sa hlavne prejaví v prípade, že sypeme z väčšej výšky a padajúce zrnká majú dostatočnú kinetickú energiu na to, aby sa zosypali nižšie.

Ďalej experiment ovplyvňuje to, že nevznikne dokonalý kužeľ – nedá sa sypať presne z jedného bodu, pri podstave a vrchole bude kužeľ viac zaoblený kvôli padajúcim zrnkám a všeobecne bude nepravidelný tam, kde sa zrnká viac naskladajú na seba. Určiť presne povrch kužeľa je tiež problém kvôli rozmerom zrníek.

Prípadný sklon fotografie eliminujeme tým, že sčítavame uhly pre pravú a ľavú stenu kužeľa. Na meranie ale vplýva to, že pri fotení z konečnej diaľky alebo nedokonale z boku neodfotíme presne prierez kužeľa.

Pri hladkej múke sa objavuje ten problém, že ľahko tvorí hrudky, ktoré sa vedia nakopiť do dosť veľkej výšky. To spôsobuje, že je sypný uhol vcelku vysoký a ťažko sa meria (steny kužeľa sú dosť nepravidelné). U ostatných meraných látok to nepozorujeme, napr. pri práškovom cukre áno. Pravdepodobne sú hrudkovité len veľmi jemné látky.

Vidíme tiež, že pre mak a hrubú múku je sypný uhol veľmi podobný – v rámci odchýlky merania rovnaký – a pre cukor a soľ je tiež dosť podobný. Podobnosť medzi týmito dvojicami je v tvare zrn (mak a hrubá múka majú vcelku guľový tvar, cukor a soľ sú kryštalické); na druhej strane veľkosť zrn nemá pozorovateľný vplyv.

Ďalším nežiaducim efektom je vlhkosť, ktorá by mala zvýšiť sypný uhol, je ale ťažké odhadnúť o koľko. Použitá soľ bola dosť navlhnutá, ostatné látky boli suché.

Záver

Nameraný sypný uhol pre jednotlivé látky je uvedený v tabuľke 2.

Látky s podobným tvarom zrn sa správajú podobne, veľkosť zrn nie je veľmi podstatná. Veľmi jemné látky, ktoré vytvárajú hrudky, budú mať zasa veľký sypný uhol.

Jakub Šafín
xellos@fykos.cz

Úloha II.S ... derivace a Monte Carlo integrace

10 bodů; (chybí statistiky)

- a) Vykreslete závislost chyby na velikosti kroku pro metodu

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + f(x-2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h)}{12h}$$

odvozenou pomocí Richardsonovy extrapolace v textu seriálu. Jaký je optimální krok a minimální chyba? Porovnejte s centrovanou a dopřednou diferencí. Jako derivovanou funkci použijte $\exp(\sin(x))$ v bodě $x = 1$.

Bonus Vypočítejte pro tuto metodu teoretickou velikost optimálního kroku pomocí odhadu chyb.

- b) Na webu se nachází soubor s experimentálně zjištěnými t , x a y souřadnicemi poloh hmotného bodu. Pomocí numerické derivace naleznete časovou závislost složek rychlosti a zrychlení a vynesete obě závislosti do grafu. Jaký fyzikální děj bod nejspíše konal? Numerickou metodu si zvolte sami, svoji volbu ale odůvodněte.

Bonus Existuje v tomto případě přesnější varianta získání rychlosti a zrychlení, než přímočará aplikace numerické derivace?

- c) Máme zadán integrál $\int_0^\pi \sin^2 x dx$.

1. Naleznete hodnotu integrálu z geometrické úvahy za pomoci Pythagorovy věty.

2. Naleznete hodnotu integrálu pomocí Monte Carlo simulace. Určete směrodatnou odchylku výsledku.

Bonus Vyřešte Buffonovu úlohu ze seriálu (odhad hodnoty čísla π) pomocí MC simulace.

- d) Naleznete vztah pro výpočet objemu šestidimenzinální koule pomocí metody Monte Carlo. Nápověda Pythagorovu větu lze využít k měření vzdáleností i ve vyšších dimenzích.

Mírek a Lukáš čtou dokumentaci k Pythonu.

- a) Abychom měli chybu podle čeho určovat, potřebujeme znát analyticky vyjádřenou derivaci testovací funkce.¹³ Z pravidla o derivaci složené funkce snadno zjistíme, že platí

$$(\exp(\sin(x)))' = \cos(x) \exp(\sin(x)).$$

Program, který vypíše různé kroky h a příslušné chyby tedy vypadá např. takto.

```
import math
def diff4(f,x,h):
    return (-f(x+2*h)+f(x-2*h)+8*f(x+h)-8*f(x-h))/(12*h)
h=1.
x=1.
points=100
f=lambda x: math.exp(math.sin(x))
df=lambda x: math.cos(x)*math.exp(math.sin(x))
for i in range(points):
    print("{} {}".format(h, math.fabs(df(x)-diff4(f,x,h))))
    h/=2
```

Závislost chyby na velikosti kroku je pak vynesena v grafu 7. Z grafu vidíme, že optimální krok je $h_{\text{opt}} \doteq 5 \cdot 10^{-4}$ a odpovídající chyba numerické derivace $1 \cdot 10^{-13}$, což je méně, než pro centrovanou a dopřednou diferencí. Optimální krok je naopak v souladu s tvrzením v

¹³Pokud bychom ji neznali, lze jako odhad použít numerickou metodu vyššího řádu.

seriálu větší, než u dopředné a centrované diference. Také si všimněme, že chyba metody klesá jako $O(h^4)$, což jsme očekávali.

Nyní zmiňme řešení bonusu. Zaokrouhlovací chybu spočítáme obdobně jako v textu seriálu. Platí pro ni

$$\Delta f'(x) = \frac{-f(x+2h)\varepsilon_1 + f(x-2h)\varepsilon_2 + 8f(x+h)\varepsilon_3 - 8f(x-h)\varepsilon_4}{12h},$$

$$\Delta f'(x) \approx \frac{18\varepsilon|f(x)|}{12h} = \frac{3|f(x)|}{2h},$$

kde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ a ε_4 jsou skutečné relativní chyby vyčíslení funkce a $\varepsilon \approx \varepsilon_{1..4}$ je strojová přesnost. Všimněme si, že pro zaokrouhlovací chybu opět platí $\Delta f'(x) \propto h^{-1}$.

Chyba metody pak z Taylorova rozvoje je

$$\delta = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} h^4 \approx \frac{|f^{(4)}(x)|}{24} h^4,$$

kde ξ je nějaké (správné) číslo mezi x a $x+h$. Z podmínky pro minimální chybu $\delta \approx \Delta f'(x)$ máme

$$h_{\text{opt}} \approx \sqrt[5]{36\varepsilon \frac{|f(x)|}{|f^{(4)}(x)|}} \sim \varepsilon^{1/5} \sim 10^{-3},$$

což řádově odpovídá našemu „experimentálně“ získanému výsledku. Konkrétně pro $x = 1$ (v radiánech) ještě můžeme dopočítat $f(x) \doteq 2,3$, $f^{(4)}(x) \doteq 0,95$ a $h_{\text{opt}} \doteq 1,5 \cdot 10^{-3}$.

- b) Přístupme k řešení problému obráceně, nejprve vypočtíme rychlost a zrychlení pomocí dopředné a centrované diference a poté se výsledky pokusme interpretovat.

Jak vidíme z grafů rychlosti 8 a zrychlení 9, 10, v x -ovém směru bod vykonává rovnoměrný pohyb rychlostí asi $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a v y -ovém směru rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb s počáteční rychlostí asi $27 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a zrychlením asi $-10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, přičemž zrychlení nedokážeme díky šumu vyčíst rovnou z grafu zrychlení, ale dokážeme jej určit výpočtem z grafu rychlosti. Vidíme tedy, že se jedná o případ vrhu v homogenním tíhovém poli.

Také vidíme, že centrovaná diference má menší rozptyl než dopředná diference. Protože druhá a vyšší derivace funkce $x(t) = 30 \cdot t$ podle času je rovna nule, dělíme ve vztahu pro optimální krok dopředné i centrované diference nulou a optimální krok tedy neexistuje, vždy jsme v režimu převládající zaokrouhlovací chyby. Obdobně pro $y(t)$ je nulová až třetí derivace, dopředná diference tedy má (pro $t = 1 \text{ s}$) $h_{\text{opt}} \approx 10^{-8} \text{ s}$, ale centrovaná diference opět optimální krok nemá. To si můžete lehce ověřit vyřešením předchozí podúlohy pro testovací funkce $x(t) = v_x t$ a $y(t) = v_y t - 1/2 g t^2$, kde v_x, v_y a g jsou konstanty.

Protože pro $x(t)$ jsou obě metody v režimu s převládající zaokrouhlovací chybou, měly by mít srovnatelnou přesnost, což ale očividně neplatí. To napovídá, že zde existuje nějaký efekt, který je daleko větší, než vliv zaokrouhlovací chyby a chyby metody. Pokud se pozorně podíváme na předchozí data, či si pořádně přečteme zadání, zjistíme, že neleží přesně na teoretické závislosti, ale, jako správná experimentální data, se kolem ní vyskytují s nějakou nepřesností měření. Centrovaná diference je pak přesnější, jak je vidět z následujícího příkladu. Představme si, že by naše závislost polohy byla konstantní (ale stále s „experimentálním“ rozptylem σ). Pevně si nyní zvolme si nyní nějakou vysokou pravděpodobnost P , třeba 99%. Pak existuje číslo $n > 0$ takové, že dva po sobě následující body leží s pravděpodobností P na bočních stranách obdélníku o podstavě h a výšce $n\sigma$. Pokud je spojíme úsečkou, bude mít tato úsečka směrnici, a tedy i chybu derivace, menší než $n\sigma/h$. Pokud ale

použijeme centrovanou diferenci,¹⁴ používáme body „ob jedna“, které s pravděpodobností P leží na bočních stranách obdélníku o podstavě $2h$ a výšce $n\sigma$. Směrnice jejich spojnice bude nanejvýš $n\sigma/(2h)$, chyba tedy bude poloviční.

Obecně dle výše uvedeného by mělo platit, že čím je metoda vyššího řádu, tím lépe bude fungovat. Tomu navíc pomůže to, že metody vyššího řádu pracují s funkčními hodnotami ve více než dvou bodech, efektivně tedy v sobě obsahují obdobu váženého průměru, který by měl napomoci vyrušení rozptylu hodnot.

Všimněme si také, že rozptyl původních hodnot polohy je velmi malý, odpovídá měření s relativní odchylkou 0,02 %, což je velmi přesné měření. Přesto se tato odchylka aplikací derivace nesmírně zvětší. To je způsobeno tím, že numerická derivace není dobře podmíněná úloha, použité metody tedy nemohou být numericky stabilní.

Pokud bychom chtěli náš výsledek zpřesnit, mohli bychom toho docílit různými způsoby. Dle výše uvedeného by mělo pomoci zvětšení kroku přeskokováním některých hodnot, či použití metody vyššího řádu, přičemž druhá možnost by měla fungovat lépe. Další možností je na data před derivací nejprve aplikovat tzv. klouzavý průměr¹⁵, čímž bychom zredukovali rozptyl hodnot. Jak již ale bylo zmíněno, metody vyšších řádů už v sobě jistý způsob průměrování efektivně obsahují, jednoduchým neváženým klouzavým průměrem bychom tedy nejspíš lepších výsledků nedosáhli. Ve chvíli, kdy známe teoretickou závislost, podle které se data mají chovat, je asi nejlepším řešením data touto závislostí nafitovat a poté analyticky derivovat teoretickou závislost s koeficienty určenými z fitu.

- c) Zadaný integrál lze snadno spočítat například za pomoci goniometrického vztahu $\sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$ a substituce $y = 2x$. Dostaneme

$$I = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} dx - \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos y dy = \frac{\pi}{2}.$$

Zadání nám však ukládá postupovat bez znalosti integrálního počtu, pojďme se o to tedy pokusit.

1. Pro kartézské souřadnice a , b bodu na jednotkové kružnici, představující délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku, platí Pythagorova věta ve tvaru $a^2 + b^2 = 1$. Neboli, vyjádřeno pomocí úhlu při středu kružnice mezi přeponou a jednou odvěsnou x , $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dále víme, že určitý integrál I vyjadřuje obsah útvaru vymezeného funkcí $\sin^2 x$ a osou x na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, tj. obsah jednoho „kopečku“ funkce $\sin^2 x$.

Když k funkci $\sin^2 x$ všude připočteme funkci $\cos^2 x$, dostaneme díky Pythagorově větě místo kopečku obdélník o stranách π a 1, tedy o obsahu π . Nyní si už jen zbývá uvědomit, že funkce sinus a kosinus jsou identické až na posun o $\pi/2$ v ose x (a tedy i jejich kvadráty). Jeden kopeček kosinu na druhou má tedy stejný obsah jako kopeček sinu na druhou. Na obrázku ?? je názorně ukázáno, že celý obdélník sestává z jednoho sinového kopečku a jednoho převráceného kosinového kopečku rozděleného napůl. Jeden kopeček má tedy obsah přesně dvakrát menší než obdélník, a tedy $I = \pi/2 \doteq 1,5708$, což je v souladu s výsledkem výše.

2. K numerickému výpočtu použijeme kód na Monte Carlo integraci ze seriálu.¹⁶ Generujeme dvojice pseudonáhodných čísel $\langle x, y \rangle$ na intervalech $\langle 0, \pi \rangle$ a $\langle 0, 1 \rangle$, kritériem pro zásah

¹⁴Stejný efekt by měla i dopředná diference s dvojnásobným krokem.

¹⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Moving_average

¹⁶Veškeré kódy použité v řešení této seriálové úlohy naleznete na našem webu.

je $y < \sin^2 x$. Ve výpočtu směrodatné odchytky je nyní $V = \pi$ a $O = \pi/2$, relativní směrodatnou odchytkou pak vyjádříme jako

$$\frac{\sigma}{O} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{(V/O - 1)} = 0,001.$$

Pro jeden konkrétní běh programu s $N = 10^6$ jsme dostali výsledek 1,569 s relativní odchylkou od průměru 0,0012.

Při řešení bonusové úlohy, odhad π pomocí házení jehly, si také vystačíme s mírnou úpravou kódu ze seriálu. Budeme volit $a = b = 1$, tzn. stejnou šířku pásu jako délku jehly.¹⁷ Čím menší jehlu bychom volili, tím méně častěji by prořala hranici pásů a tím déle by musela simulace běžet, abychom dosáhli dané přesnosti. Dále víme, že stačí generovat dvojice pseudonáhodných čísel $\langle \vartheta, x \rangle$ z intervalů $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ a $\langle 0, 1/2 \rangle$, neboť tak pokryjeme všechny možné horizontální polohy středu jehly a veškerá možná její natočení. Není potřeba uvažovat další pásy, protože se periodicky opakují. Stejně tak nepotřebujeme rozlišovat, zda jehla leží napravo nebo nalevo o hranice, kterou prořala. Kritérium protnutí vyjádříme tak, že horizontální souřadnice levého konce jehly $x - (\cos \vartheta)/2$ je menší než nula.

Ze seriálu víme, že pro $a = b = 1$ je pravděpodobnost protnutí $2/\pi \doteq 0,6366$. Pro jeden běh programu s $N = 10^6$ jsme dostali výsledek 0,6368 s relativní směrodatnou odchylkou (teoretickou) 0,0008 a relativní odchylkou od průměru 0,0004.

- d) Objem koule v libovolné dimenzi musí záviset pouze na jejím poloměru R , neboť žádnou jinou informaci o kouli nemáme. Z jednotkových důvodů musí být poloměr umocněn na číslo udávající dimenzionalitu, v našem případě máme R^6 . Tento mocniný výraz bude vynásoben konstantním faktorem, který obecně může být různý pro každou dimenzi. Volbou $R = 1$ se naše úloha omezuje na hledání tohoto faktoru.

Objem n -dimenzionální koule o poloměru R lze vyjádřit vzorcem

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^n,$$

kde Γ je gama funkce. Nebudeme se zde zabývat její definicí, pouze si řekněme, že pro přirozené číslo n lze psát $\Gamma(n + 1) = n!$. Nás zajímá dimenze 6, argumentem gama funkce tedy bude přirozené číslo a můžeme psát

$$V_6 = \frac{\pi^3}{3!} R^6.$$

Hledaný faktor je tedy roven $\pi^3/3! \doteq 5,1677$.

S uvedeným faktorem nyní srovnáme výsledek získaný metodou Monte Carlo. Použili jsme kód ze seriálu pro výpočet obsahu čtvrtkruhu s mírnými úpravami. Počet bodů jsme zvýšili na 10^7 a pomocí funkce random nyní nevytváříme dvojice, ale šestice náhodných čísel. V boxu o hraně 1 (šestidimenzionální krychle) nyní není uzavřena čtvrtina kruhu, ale $1/2^6$ z objemu koule. Kritériem zásahu dovnitř objemu koule je výraz

$$\sum_{i=1}^6 x_i^2 < 1,$$

¹⁷V seriálu jsme psali podmínku $a < b$, ale vzhledem k omezené přesnosti reprezentace čísel v počítači toto nemá smysl rozlišovat.

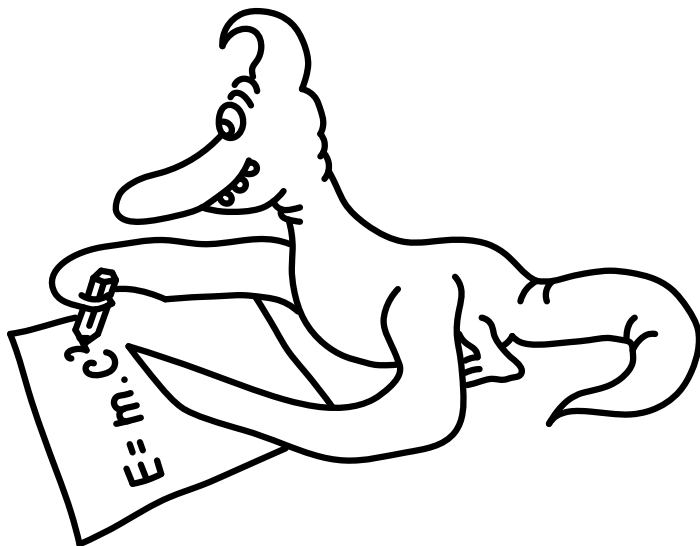
kde x_i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jsou kartézské souřadnice náhodných bodů. Na základě znalosti přesného výsledku můžeme vypočítat směrodatnou odchylku

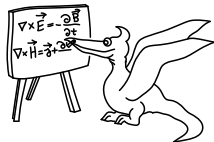
$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{O(V - O)},$$

kde $V = 1^6 = 1$ a $O = \pi^3 \cdot 2^{-6} \cdot 3!$, číselně tedy získáme relativní odchylku $\sigma/O \doteq 0.0011$. Zde vidíme, že poměr O/V je již celkem nevýhodný a museli jsme proto volit o řád větší počet bodů (v porovnání s 2D případem), abychom dosáhli směrodatné odchylky $\sim 10^{-3}$. Výsledkem jednoho běhu programu byla průměrná hodnota hledaného faktoru 5,172 (relativní odchylka od průměru je 0,0008).

Lukáš Timko
lukast@fykos.cz

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz





Seriál: Numerické metody a počítačové simulace

V minulém díle jsme se seznámili s numerickou derivací a se základy stochastické metody Monte Carlo, jmenovitě MC integrací. Nyní navážeme obecnějším výkladem numerické integrace, ale předtím se ještě podíváme na matematický pojem náhodná procházka. Náhodné procházky využijeme jednak v pokročilých metodách MC integrace, ale také například při simulaci Brownova pohybu.

Náhodné procházky

Na počátku studia fyziky se studenti obvykle seznámí s mechanikou a Newtonovými zákony. Pomocí nich se naučí spočítat, kterým směrem a jakou rychlostí se bude pohybovat hmotný bod v důsledku sil na něj působících. Tento přístup ovšem selhává, pokud budeme chtít předpovědět například trajektorii prachového zrnka ve vzduchu. Abychom našli polohu částice o byt jen několik nanosekund později, potřebovali bychom vyřešit statistice srážek – musíme totiž znát také aktuální polohu všech molekul, které by se s naší částicí mohly srazit. Tento výpočetně náročný přístup využívá v simulacích molekulová dynamika.

Snížíme-li své nároky a budeme chtít nalézt pouze střední vzdálenost nebo jinou statistickou veličinu, odemyká se nám možnost použít stochastické simulace. Základní myšlenkou je zde předpoklad, že okolní molekuly se pohybují náhodnými směry a rychlostmi (v případě klasického plynu určenými gaussovským rozdělením). Toto molekulární pozadí vyjmeme ze svých výpočtů a budeme se věnovat pouze pohybu těžké částice, který bude v důsledku náhodného hemžení na pozadí také náhodný. Pro pohyb těžké částice v důsledku chaotického pohybu molekul okolní tekutiny se ustálil název *Brownův pohyb*. Tento fyzikální pohyb můžeme aproximovat diskretním matematickým modelem zvaným *náhodná procházka*, který v každém časovém kroku posune částici náhodným směrem o pevně zvolenou vzdálenost. Náhodná procházka spadá do širší rodiny Markovových procesů, na které se nyní podíváme podrobněji.

Markovovy procesy

V prvním dílu seriálu jsme se seznámili s pojmem náhodná proměnná. Jednalo se o proměnnou, jejíž hodnota není předem známa (tj. není to konkrétní číslo), pouze známe pravděpodobnosti nabývání hodnot z určité množiny. Tyto pravděpodobnosti byly dány pravděpodobnostním rozdělením, např. náhodná proměnná „hod kostkou“ mohla nabývat hodnot 1 až 6 z diskretního rovnoměrného rozdělení. Pokud uspořádáme náhodné veličiny do řetězce, tj. přiřadíme náhodným veličinám indexy $1, 2, \dots, n$, nazýváme tento řetězec *náhodný proces*. Příkladem náhodného procesu je třeba série hodů mincí.¹⁸ *Realizací* tohoto náhodného procesu je uspořádaná množina, jejíž každý prvek nabývá hodnoty „panna“ nebo „orel“ – například jsme vytvořili pomocí pěti hodů korunovou mincí realizaci náhodného procesu

{panna, panna, panna, orel, panna}.

¹⁸Konkrétně se jedná o tzv. Bernoulliho proces s pravděpodobnostmi $p = 1/2$ a $1 - p = 1/2$.

V uvedeném procesu jsou prvky řetězce představovány navzájem nezávislými a shodně rozdělenými¹⁹ náhodnými veličinami. Obecně však mohou být veličiny závislé a různě rozdělené. Uvažte třeba takovýto proces (A): Házím mincí, dokud nepadne panna, a pak házím kostkou, dokud nepadne šestka; pak házím mincí, dokud nepadne panna, a pak házím kostkou, dokud ... Jiný příklad (B): Házím šestistěnnou kostkou a počítám oka tak dlouho, dokud nezískám součet větší nebo roven 20; poté vyměním šestistěnnou kostku za desetistěnnou a pokračuji v přičítání, dokud nedosáhnou součtu 40; poté se vrátím k šestistěnné kostce atd.

Nyní uvažujme speciální případ náhodného procesu, kdy jsme schopni určit stav v následujícím kroku bez znalosti historie procesu. Jinými slovy, pravděpodobnost realizace hodnoty x náhodné veličiny X_{i+1} dokážu jednoznačně určit na základě realizace y náhodné veličiny X_i . Této vlastnosti říkáme přilehavě *bezpaměťovost* a příslušný náhodný proces se nazývá *Markovův*.²⁰ Formálně tuto vlastnost (pro diskretní náhodné veličiny) zapíšeme

$$P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_i = x_i) = P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i) \quad (6)$$

a čteme: Pravděpodobnost, že náhodná veličina X_{i+1} nabývá hodnoty x_{i+1} za podmínky, že v prvním kroku nabyla veličina X_1 hodnoty x_1 , v druhém kroku nabyla veličina X_2 hodnoty x_2 atd. je stejná jako pravděpodobnost, že X_{i+1} nabude hodnoty x_{i+1} za podmínky, že v předešlém kroku nabyla X_i hodnoty x_i . Znalost řetězce na rozsahu indexů 1 až $i-1$ je tedy úplně zbytečná, můžeme ji zapomenout.

Série hodů mincí je triviálním případem *bezpaměťového* řetězce, kdy není potřeba znát ani stav v kroku i (toto platí pro každý řetězec navzájem nezávislých náhodných veličin). Proces A je také Markovův proces, další krok se řídí vždy současným stavem. *Bezpaměťový* je i proces B – pro určení stavu v kroku B nám postačí znalost aktuálního součtu a typu kostky, kterou jsme naposled házeli. Vymyslet proces, který není Markovův, je snadné, například: Házím kostkou a počítám hodnoty, pokud padnou dvě šestky za sebou, přičtu k součtu v následujícím kroku bonus 10. Pro určení stavu v následujícím kroku je zjevně potřeba znát alespoň dva předchozí stavy, předpoklad (6) je porušen.

Náhodná procházka v 1D

Náhodná procházka je náhodný proces daný součtem nezávislých a shodně rozdělených náhodných veličin. Nejjednodušším příkladem je opět házení mincí, na rozdíl od příkladu výše však není aktuální stav určen posledním hodem, ale součtem všech dosavadních hodů (přitom uvažujeme panna = -1 , orel = 1). Název *náhodná procházka* vychází z představy, kdy součtu realizací náhodných veličin přiřadíme význam vzdálenosti od počátku – máme tedy objekt, který se v každém kroku pohne náhodně doleva, nebo doprava, a takto se prochází po přímce.

Možná si vzpomenete na úlohu z prvního dílu seriálu, kdy Mirek s Lukášem hráli o Fykosův trička, přičemž o vítězi trička se v každém kroku rozhodovalo na základě hodů mincí. Tehdy jsme jako „hru“ označili sekvenci obsahující počty triček jednoho z hráčů. „Hra“ bylo tedy označení pro realizaci náhodné procházky končící pro některého hráče nulou (stav, kdy jeden hráč měl všechna trička nebo žádné, představoval *absorpční bariéru* = konec hry).

Nadále budeme často zaměňovat pojmy *náhodná procházka* a *realizace náhodné procházky*, je však dobré mít na paměti, že se principiálně liší.

¹⁹V anglické literatuře se můžete setkat se zkratkou *iid* – independent and identically distributed.

²⁰Občas se v učebnicích můžete setkat i s označením *markovský* či *markovovský* proces, v obou případech jde o podobnostní přídavné jméno odvozené od ruského matematika Andreje Andrejeviče Markova.

Oblíbenou učebnicovou úlohou je „opilcová procházka“: Opilec se o půlnoci vrací domů z hospody. Dům, kde na něj čeká rozčílená manželka, se nachází ve vzdálenosti a od hospody. Druhým směrem se ve vzdálenosti b od hospody nachází řeka. Opilec se s každým krokem posune o vzdálenost $+1$ (k řece), nebo -1 (k domovu), přičemž oba směry jsou stejně pravděpodobné. Zajímat nás budou následující otázky:

- Jaká je pravděpodobnost, že opilec dojde dřív domů než do řeky?
- Jaká je pravděpodobnost, že se opilec po n krocích nachází v bodě k ?
- Jaká je střední poloha opilce?
- Jaká je střední vzdálenost opilce od hospody?

Než začneme úlohu řešit, zdefinujeme si procházku formálněji. Každý krok je náhodná veličina S_i , která nabývá hodnoty $+1$ s pravděpodobností $0,5$ a hodnoty -1 s pravděpodobností také $0,5$. Součet n těchto náhodných veličin označíme

$$W_n = \sum_{i=1}^n S_i.$$

Posloupnost $\{W_n\}$ potom představuje náhodnou procházku, přesněji *jednoduchou* náhodnou procházku. Přitom bez újmy na obecnosti volíme počáteční polohu $W_0 = 0$.

Při studování náhodné procházky z pohledu Markovových řetězců nás zajímá pravděpodobnost přechodu mezi stavy. Prostorem stavů je v případě jednorozměrné náhodné procházky množina celých čísel \mathbb{Z} . $P_{i,i+1}$ značí pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu $i+1$, tj. pravděpodobnost, že uděláme krok vpravo. Pro procházku, kde je krok na obě strany stejně pravděpodobný, píšeme $P_{i,i+1} = 1/2 = P_{i,i-1}$. Toto lze vyjádřit také pomocí matice přechodu

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

kteřou jsme zde omezili na množinu $\{1, 2, 3, 4\}$, ale v obecnosti je nekonečná.

První otázku jsme již zodpověděli v prvním dílu seriálu, když jsme se ptali, s jakou pravděpodobností vyhraje Mírek nad Lukášem ve hře o trička. Pravděpodobnost, že opilec dojde dřív domů, je $b/(a+b)$, a podobně pravděpodobnost, že dřív spadne do řeky, je $a/(a+b)$. Důkaz naleznete ve vzorovém řešení seriálové úlohy.

Abychom vyřešili druhou otázku, potřebujeme si rozmyslet, kolika různými způsoby můžeme po n krocích dojít do bodu k . V prvním kroku můžeme jít nalevo nebo napravo a skončit v bodě -1 nebo 1 . V druhém kroku již máme více možností: buďto se z bodů $1, -1$ vrátíme zpět do nuly (tj. po dvou krocích jsme se dokážeme dostat nuly dvěma různými způsoby), nebo z bodu 1 vykročíme do 2 , nebo z bodu -1 vykročíme do -2 . Takto můžeme pokračovat a vytvořit schéma, které pro řetězec délky 4 vypadá následovně:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 1 & . \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

Řádky udávají délku řetězce n , sloupce polohu k (nula uprostřed) a čísla v tabulce počty možností, jak se do bodu dostat. Konstruujeme tedy Pascalův trojúhelník, přičemž po sudém počtu kroků můžeme být vždy pouze ve vzdálenosti od počátku dané sudým číslem, podobně pro lichý počet kroků lichým číslem. Prvky v tomto Pascalově trojúhelníku lze vyjádřit pomocí kombinačního čísla

$$\binom{n}{(n-k)/2}.$$

Pravděpodobnost realizace jednoho konkrétního řetězce je $1/2^n$, hledaná pravděpodobnost, že po n krocích se nacházíme v bodě k , je tedy

$$2^{-n} \binom{n}{(n-k)/2}.$$

Nalézt střední polohu opilce je velice jednoduché.²¹ Platí

$$E(W_n) = E\left(\sum_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n E(S_i) = 0,$$

kde jsme využili toho, že střední hodnota součtu nezávislých veličin je rovna součtu jejich středních hodnot. Tento výsledek není nijak překvapivý, neboť každý řetězec délky n končící v bodě k k sobě má symetrický řetězec okolo počátku končící v bodě $-k$.

Poslední otázka je poněkud komplikovanější. Hledáme střední hodnotu $E(|W_n|)$, což je určitě nenulová hodnota. Odhadnout²² chování tohoto výrazu lze pomocí odmocniny ze střední hodnoty kvadrátu (střední kvadratická hodnota, *root mean square*), kterou opět díky vlastnostem střední hodnoty zapíšeme jako

$$E(W_n^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(S_i S_j).$$

Pro $i = j$ máme $E(S_i^2) = 1$, pro $i \neq j$ je střední hodnota nulová, protože jde o součin nezávislých veličin, celkově tedy

$$\sqrt{E(W_n^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} = \sqrt{n}.$$

Řešení uvedených čtyř otázek nám poskytlo základní vhled do chování náhodných procházek, ale zdaleka se nejednalo o vyčerpávající rozbor. Studium náhodných procházek má význam v algebře, numerických metodách, ekonomii a dalších oborech. Dodnes před námi stojí mnoho nevyřešených otázek, především ohledně chování vícedimenzionálních procházek, a na ty se nyní podíváme.

²¹Při velkém obsahu alkoholu v krvi bude tato střední poloha pravděpodobně horizontální.

²²Je ovšem možné spočítat $E(|W_n|)$ i přesně. Můžete si to zkusit.

Náhodná procházka ve více dimenzích

Definice náhodné procházky ve více dimenzích přináší dodatečnou komplikaci. Zatímco v 1D existovaly pouze dva možné směry, kam vykročit, nyní jich je nekonečně mnoho. Abychom si situaci ulehčili, budeme předpokládat, že v každém kroku je možné pohnout se pouze ve směru nebo proti směru jedné z kartézských os. Takže ve dvou dimenzích budeme mít čtyři možnosti pohybu, ve třech osm, \dots , obecně 2^d směrů, kde d je dimenze v prostoru. Specificky ve dvou dimenzích (v těch se budeme pohybovat především) jsou možné polohy v prostoru reprezentovány uzly čtvercové sítě.

Náhodná veličina K_i , která představuje jeden krok, může ve 2D nabývat čtyř hodnot, které si označíme třeba l, r, u, d (*left, right, up, down*). Také se na tuto veličinu můžeme dívat jako vektor se dvěma složkami, který může nabývat hodnot $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ a $(0, -1)$, každé s pravděpodobností jedna čtvrtina. Náhodnou procházku pak definujeme opět přes součet

$$W_n = \sum_{i=1}^n K_i,$$

přičemž proces náhodné procházky $\{W_n\}$ je nyní tvořen posloupností vektorových náhodných veličin.

Otázky, které jsme řešili pro případ 1D procházky, lze přeformulovat i pro vícedimenzionální případ, ale nalezení odpovědi je již komplikovanější. Omezíme se pouze na otázky c) a d). Lze si rozmyslet, že střední polohou bude opět počátek, a to v jakémkoli počtu dimenzí. V souboru všech možných (realizací) procházek najdeme ke každé procházce právě jednu další symetrickou okolo počátku a střední poloha této dvojice je nulová, tedy i střední hodnota pro celý soubor bude nulová. Střední vzdálenost opět pouze odhadneme pomocí střední kvadratické hodnoty

$$\sqrt{E(W_n^2)} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(K_i \cdot K_j) \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n E(K_i \cdot K_i) \right)^{1/2} = \sqrt{n}.$$

Dostali jsme stejný výsledek jako pro jednu dimenzi díky skutečnosti, že skalární součin dvou identických vektorů K_i je roven jedné. Vzdáleností se zde myslí eukleidovská vzdálenost

$$|(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{1/2},$$

skalární součin pak udává čtverec vzdálenosti. Samotná střední vzdálenost je (v asymptotickém smyslu, tedy pro $n \rightarrow \infty$) ještě násobena faktorem, který se blíží určité malé hodnotě z intervalu $(0, 1)$.

Pro algebraiky je důležitou otázkou, zda se procházka někdy navrátí do svého počátku. Bez důkazu zde uvedme, že dvoudimenzionální procházka v limitě nekonečného počtu kroků alespoň jednou dosáhne každého bodu, a tedy i toho počátečního. Konvergence pravděpodobnosti návratu k hodnotě 1 je ale velmi pomalá, proto v oblasti simulací není příliš důležitá. Pro 1D procházky platí silnější tvrzení, že v limitě nekonečného počtu kroků projdeme každým bodem nekonečněkrát.

Jako motivaci pro studium náhodných procházek jsme na začátku uvedli Brownův pohyb. Avšak správný model Brownova pohybu by měl být v čase spojitý. Provedeme-li pro náhodnou

procházku s časovým krokem Δt limitu $\Delta t \rightarrow 0$, dostaneme tzv. Wienerův proces. Na počítači však není možné provést simulaci, která je v čase spojitá. Jelikož však naše definice náhodné procházky pevně svazuje časový krok Δt a délku kroku v prostoru Δl , můžeme se Wienerově procesu (a tedy i Brownově pohybu) přiblížit přeškálováním rozměru procházky. Jinými slovy, limitu $\Delta t \rightarrow 0$ nahradíme limitou $\Delta l \rightarrow 0$. Abychom toto chování ozřejmili, ukážeme si nyní, jak vypadají výsledky simulace náhodné procházky.

Pro simulaci jednoduché 2D procházky jsme použili následující kód psaný v Pythonu:

```
# nacteme matematickou knihovnu a knihovnu s generatory nahodnych cisel,
# numerickou knihovnu a grafickou knihovnu
import math
import random
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

# zadame delku nahodne prochazky a pocet opakovani
max_krok = 10000
max_pocet = 10000
pocet = 0
# definujeme pole, do ktereho budeme ukladat stredni vzdalenost od pocatku
vzd = np.zeros(max_krok+1, dtype=np.float)

while pocet < max_pocet:
    pocet += 1
    # definujeme pole, do kterych budeme ukladat trajektorii posledni prochazky
    xs = np.zeros(max_krok+1, dtype=np.float)
    ys = np.zeros(max_krok+1, dtype=np.float)
    # resetujeme aktualni pocet kroku
    krok = 0
    while krok < max_krok:
        krok += 1
        # generujeme dve nahodna cisla z mnoziny {0,1}, ktera rozhodnou,
        # zda se budeme pohybovat po vertikale, nebo horizontale
        # a jestli v kladnem, nebo zapornem smeru
        hv = math.floor(random.random()+0.5)
        pm = math.floor(random.random()+0.5)
        # naplnime dalsi element pole trajektorii predchozi hodnotou
        xs[krok] = xs[krok-1]
        ys[krok] = ys[krok-1]
        # posuneme se o jeden krok
        if hv == 0:
            if pm == 0:
                xs[krok] += -1
            else:
                xs[krok] += 1
        else:
            if pm == 0:
                ys[krok] += -1
            else:
                ys[krok] += 1
        # pricteme vzdalenost aktualni prochazky po aktualnim poctu kroku
        vzd[krok] += math.sqrt(xs[krok]**2. + ys[krok]**2.)

# pole vzdalenessi vydělíme počtem procházek, abychom dostali průměr
vzd = vzd/float(max_pocet)
```

Tento kód generuje `max_pocet` náhodných procházek o délce `max_krok`, přičemž vzdálenost procházky v každém kroku od počátku ukládá do pole `vzd`. Na konci každý prvek tohoto pole obsahuje součet vzdáleností po počtu kroků rovnému pozici prvku. Vydělením tohoto pole počtem všech procházek dostaneme závislost průměrné vzdálenosti na počtu kroků. Průměrování

velkého počtu procházek je důležité – zvolíme-li malou hodnotu `max_pocet`, může vzdálenost od počátku i klesat, pokud se v našem souboru zrovna vyskytne více procházek, které se vrací k počátku.

Pro uvedené hodnoty jsme zjistili, že průměrná vzdálenost po 10 000 krocích je 89,2. To docela dobře odpovídá asymptotické hodnotě²³ 88,6. Spíše by nás však zajímalo, jak vypadá závislost střední vzdálenosti na počtu kroků a jak vůbec vypadá realizace náhodné procházky (trajektorie). Na konec kódu výše proto přidáme následující:

```
# fitujeme přímku v log-log grafu na posledních (fit_body) bodech
fit_body = 1000
fit_range = np.linspace(max_krok-fit_body+1,max_krok,fit_body)
log_range = [math.log10(y) for y in fit_range]
log_vzd = [math.log10(y) for y in (vzd[max_krok-fit_body+1:])]
fit,cov = np.polyfit(log_range,log_vzd,1,cov=True)
print('Smernice fitu v je {} se smerodatnou odchylkou {}'.format(fit[0],
    math.sqrt(cov[0,0])))

# nakreslime graf prumernych vzdalenosti a trajektorie posledni prochazky
vzdplot = plt.plot(range(max_krok+1),vzd,'r',linewidth=2)
plt.show()
prochplot = plt.plot(xs,ys,linewidth=1)
plt.show()
```

Ze závislosti vzdálenosti na počtu kroků vezmeme posledních 1 000 bodů, provedeme logaritmickou transformaci a fitujeme daty polynom prvního řádu (přímku). Proměnná `fit` v sobě obsahuje koeficienty a , b lineárního fitu $f(x) = ax + b$ a proměnná `cov` je matice,²⁴ na jejíž diagonále leží rozptyly odpovídající koeficientům a , b . Po dostatečném počtu kroků n by se měla vzdálenost od počátku chovat jako \sqrt{n} , směrnice přímky by tedy měla být rovna exponentu $1/2$. Výstupem jednoho běhu programu byl koeficient $a = 0,4890 \pm 0,0004$, což je poměrně blízko očekávané hodnotě 0.5 .²⁵ Poslední řádku kódu vykreslují graf závislosti vzdálenosti na počtu kroků, abychom mohli asymptotické chování ověřit vizuálně (obr. 12), a také vykreslují trajektorii poslední vygenerované procházky. Příklady procházek o délkách 10 000 a 200 000 kroků jsou na obrázcích 13 a 14. V druhém případě již nedokážeme rozeznat jednotlivé kroky – trajektorie se blíží realizaci spojitého Brownova pohybu.

Kromě jednoduché procházky, které jsme se doteď věnovali, lze definovat ve 2D různé modifikace, které neměly v jedné dimenzi dobrý smysl. *Procházka bez návratu* v sobě zahrnuje dodatečný požadavek, že pokud nabývá K_i určité hodnoty, např. $(1, 0)$, nemůže K_{i+1} nabývat hodnoty opačné, $(-1, 0)$. *Procházka bez křížení* zakazuje, abychom do jakéhokoli bodu vstoupili výše než jednou. Na obrázku 13 bychom tedy viděli jednoznačný začátek a konec. Platí zajímavé²⁶ tvrzení, že pravděpodobnost, že se náhodná procházka vrátí do počátečního bodu, roste s počtem kroků k jedné. Z toho nutně plyne, že každá procházka bez návratu jednou skončí. Nemá proto smysl studovat asymptotické chování střední vzdálenosti od počátku, ale můžeme například hledat střední délku procházky.

²³Využili jsme znalosti multiplikativního faktoru pro dimenzi dvě, který má hodnotu $\sqrt{\pi}/2$. V řešení seriálových úloh nepožadujeme dohledávat tyto faktory.

²⁴Jedná se o kovarianční matici. Pokud se o kovarianci chcete dozvědět více, doporučujeme 3. díl seriálu z 30. ročníku FYKOSu.

²⁵Pokud bychom chtěli zkusit provést výpočet pro delší procházky, trval by jeden běh programu již poměrně dlouho (minuty a více). Nezájímáme-li se o trajektorie procházek, můžeme si místo polí `xs` a `ys` ukládat pouze aktuální vzdálenost, čímž se běh programu výrazně zrychlí.

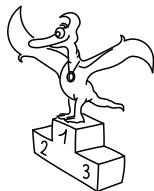
²⁶Má využití například při maticovém zápisu integrálních rozvojų nebo při řešení Laplaceovy rovnice ve 2D.

Další možnou variací procházky je změna sítě, na které se pohybujeme. Řekněme, že použijeme například hexagonální mřížku. Potom z mikroskopického hlediska, tj. pro malý počet kroků, budeme pozorovat odlišnosti od případu s čtvercovou mřížkou. S rostoucím počtem kroků však tyto odlišnosti postupně mizí a procházka postupně konverguje k Brownovu pohybu. K tomuto chování dojde vždy, zachováme-li potřebnou symetrii ve volbě kroků.

Náhodné procházky ve třech dimenzích²⁷ a vyšších nejsou příliš dobře prozkoumané, alespoň z analytického hlediska. Jedním z analytických výsledků je, že s rostoucí dimenzí postupně klesá pravděpodobnost návratu k nule, zatímco v jedné i ve dvou dimenzích je rovna jedné, jak jsme zmiňovali výše. Pomocí počítačových simulací lze získat představu o asymptotickém chování délky procházky, pravděpodobnosti dosažení absorpční bariéry apod. To si vyzkoušíte v seriálové úloze. Ve velmi vysokých dimenzích nedokážeme simulacemi získat dobrou statistiku a nastupují zpět analytické metody.

Numerická integrace

²⁷Ti, kdo zažili éru Windows 95/98, si pravděpodobně vzpomenou na spořič obrazovky vykreslující spleť potrubí (Pipes screensaver). Jednalo se o 3D náhodnou procházku bez křížení s reflexivními okrajovými podmínkami vykreslovanou pomocí knihovny OpenGL. Problémem tohoto spořiče bylo, že mnohdy vytěžoval obrazovku i procesor více než běžná kancelářská práce.



Pořadí řešitelů po II. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	6	6	6	6	7	10	12	10	63	100	127
1. Robert Gemrot	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	46
2. Martina Daňková	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	36
3.–4. Lubor Čech	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	81	34
3.–4. Patrik Kašpárek	Katolické gymnázium Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	34
5. Viktor Fukala	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	100	28	
6. Jan Raja	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	27
7.–8. Soňa Husáková	G, Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	23
7.–8. Lucie Urbanová	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	23
9. Hana Slámová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	100	22	
10.–11. Karolína Letochová	G Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	21
10.–11. Marco Souza de Joode	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	84	21
12. Šárka Štěpánková	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	18
13. Jiří Szołkowski	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	12
14. Michaela Valkova	G Česká, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	7
15. Aleš Socha	G a SOŠ, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6

Kategorie druhých ročníků

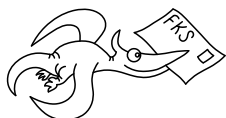

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
		6	6	6	6	7	10	12	10	63	100	127
1. <i>Martin Schmiéd</i>	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	83	43
2.–3. <i>Jakub Jobus</i>	G PdC, Piešťany	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81	42
2.–3. <i>Adam Křivka</i>	Cyrilomet. G a SOŠ pg., Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81	42
4.–5. <i>Radka Křížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	39
4.–5. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	-	-	87	39
6. <i>Jonáš Havelka</i>	G Jírovcova, České Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	86	36
7. <i>Jan Benda</i>	G, Litoměřická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	32
8. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	74	31
9. <i>Pavla Rudolfová</i>	G, Vídeňská, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	86	30
10. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Wintra, Rakovník	-	-	-	-	-	-	-	-	-	52	27
11. <i>Lukáš Hronek</i>	G, Písek	-	-	-	-	-	-	-	-	-	104	26
12. <i>Aneta Vacková</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	88	23
13.–14. <i>Adam Grunt</i>	G, Trutnov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	71	20
13.–14. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	105	20
15. <i>Filip Wagner</i>	G Tišnov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76	19
16. <i>Marek Nestěra</i>	G K. Sladkovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	84	16
17. <i>Daniel Krátký</i>	G, Trutnov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	36	15
18.–20. <i>Kateřina Barotová</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	117	14
18.–20. <i>Jan Svoboda</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	74	14
18.–20. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	14
21.–24. <i>Lucie Ambrožová</i>	G, Svitavy	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	13
21.–24. <i>Soňa Curylová</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	13
21.–24. <i>Václav Svoboda</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	13
21.–24. <i>Marcel Zdeněk</i>	SPŠ strojnická a SOŠ profesora Š	-	-	-	-	-	-	-	-	-	59	13
25. <i>Milan Tichavský</i>	Slezské G, Opava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	86	12
26.–27. <i>Marek Čermoch</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	10
26.–27. <i>Filip Novotný</i>	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53	10
28. <i>Lucia Krajčovičchová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	80	8
29. <i>Matěj Holubička</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	54	7
30.–31. <i>Josef Polášek</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	6
30.–31. <i>Jakub Pravda</i>	ŠpMNDAg, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	6

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	6	6	7	10	12	10	57	100	115
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	-	-	-	-	-	-	-	-	-	107	49
2. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	104	48
3. <i>Ladislav Trnka</i>	G, Havlíčkův Brod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	93	43
4. <i>Josef Minařík</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	-	-	87	40
5. <i>Vojtěch Klímeš</i>	G, Třeboň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	85	39
6. <i>Jindřich Jelínek</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	36
7.–8. <i>Tomáš Drobil</i>	G Dačice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	73	29
7.–8. <i>Ivan Hudák</i>	ESŠ, Lip. Mikuláš	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81	29
9.–10. <i>Marko Bermell</i>	Slovanské G, Olomouc	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	26
9.–10. <i>Marek Jankola</i>	G M. Hattalu, Trstená	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	26
11.–12. <i>Filip Koňářík</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	86	25
16.–12. <i>Lucie Kunderatová</i>	G, nám. TGM, Zlín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	25
13.–15. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	-	-	92	24
13.–15. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	24
13.–15. <i>Petr Zahradník</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	92	24
16.–17. <i>Samuel Amrích</i>	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	73	22
16.–17. <i>Daniel Staník</i>	G Uničov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	22
18. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	15
19. <i>Mária Poláčková</i>	G Velká okružná, Žilina	-	-	-	-	-	-	-	-	-	75	12
20.–21. <i>Marie Grunová</i>	G Moravský Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	42	11
20.–21. <i>Jakub Smolka</i>	Slezské G, Opava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55	11
22.–23. <i>Tereza Prokopová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	83	10
22.–23. <i>Martin Škoudlil</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	59	10
24. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	9
25. <i>Richard Veselý</i>	G, Budějovická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	38	5
26.–29. <i>Dominik Beňo</i>	G L. Svobodu, Humenné	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3
26.–29. <i>Bibiána Hroncová</i>	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3
26.–29. <i>Michal Jůza</i>	G, Benešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3
26.–29. <i>Daniel Pitoňák</i>	G a SOŠP, Čáslav	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3
30. <i>Veronika Vohníková</i>	Nový PORG, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	1

Kategorie čtvrtých ročníků

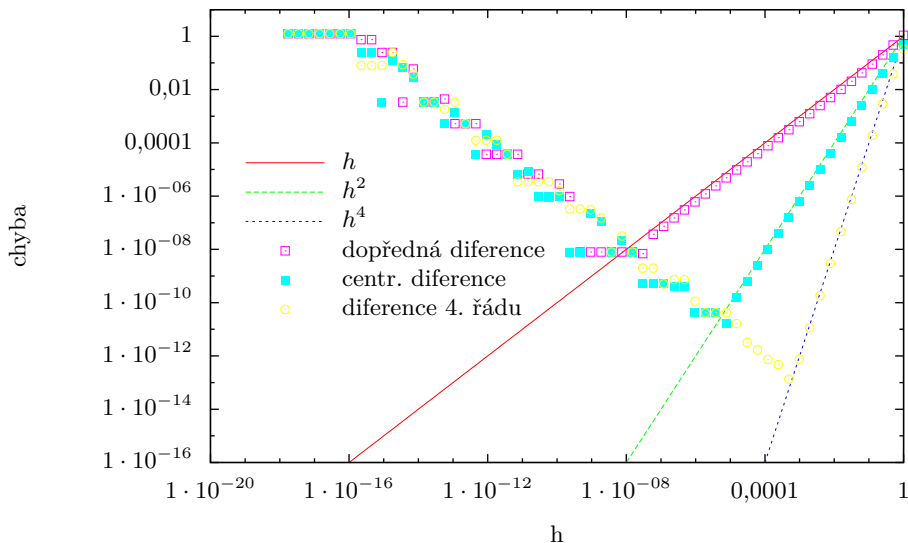
jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	6	6	7	10	12	10	57	100	115
1. <i>Viktor Rosman</i>	G, Pelhřimov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	117	42
2. <i>Šimon Pajger</i>	G Velká okružná, Žilina	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	36
3. <i>Tomáš Dulava</i>	Matiční G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76	35
4.–5. <i>Katarína Častulíková</i>	1. súkromné G v Bratislave	-	-	-	-	-	-	-	-	-	94	34
4.–5. <i>David Němec</i>	G, Tanvald	-	-	-	-	-	-	-	-	-	74	34
6. <i>Jan Kučera</i>	G, Písek	-	-	-	-	-	-	-	-	-	86	31
7. <i>Tomáš Červeň</i>	G V. P. Tótha, Martin	-	-	-	-	-	-	-	-	-	74	29
8. <i>Miroslav Hrabal</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	80	24
9. <i>Jáchym Bareš</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	23
10. <i>Dominik Starý</i>	G, Benešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	106	17
11. <i>Zuzana Řichterová</i>	G, Pelhřimov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53	16
12. <i>Ján Pavlech</i>	G sv. Jozefa Nové Mesto n. V.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	74	14
13. <i>Martin Repčík</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46	12
14. <i>Soňa Burešová</i>	G J. Heyrovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	110	11
15. <i>Filip Keller</i>	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	-	-	90	9
16. <i>Vít Beran</i>	Masarykovo G, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	7
17. <i>Dominick Ivan</i>	ŠG PinkHarmony, Zvolen	-	-	-	-	-	-	-	-	-	14	1

**FYKOS****UK, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/Fykos>

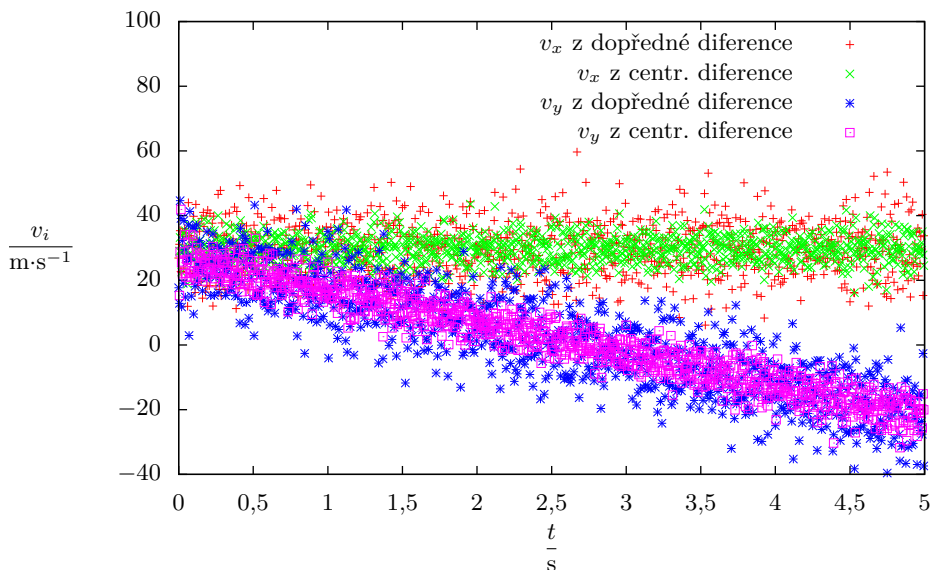
Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

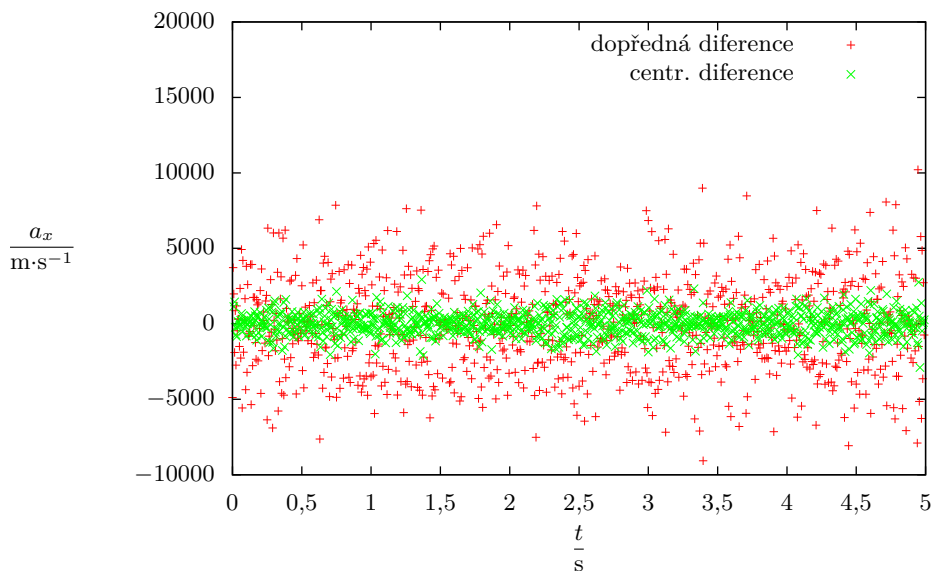
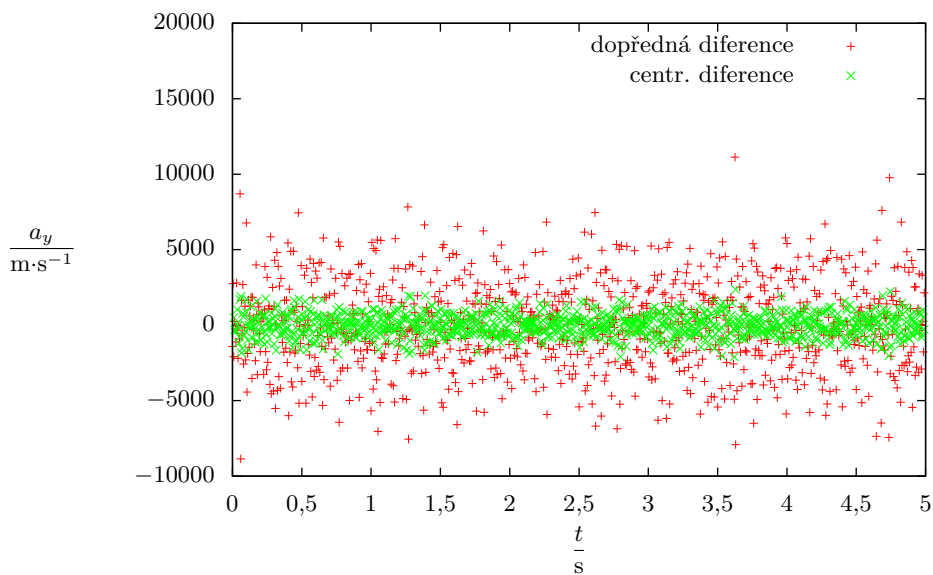


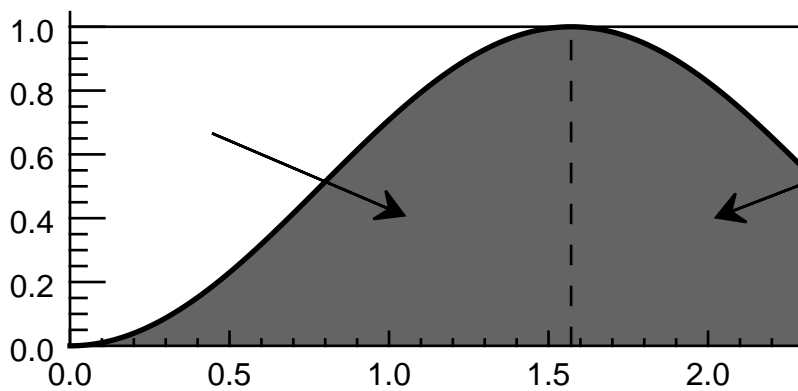


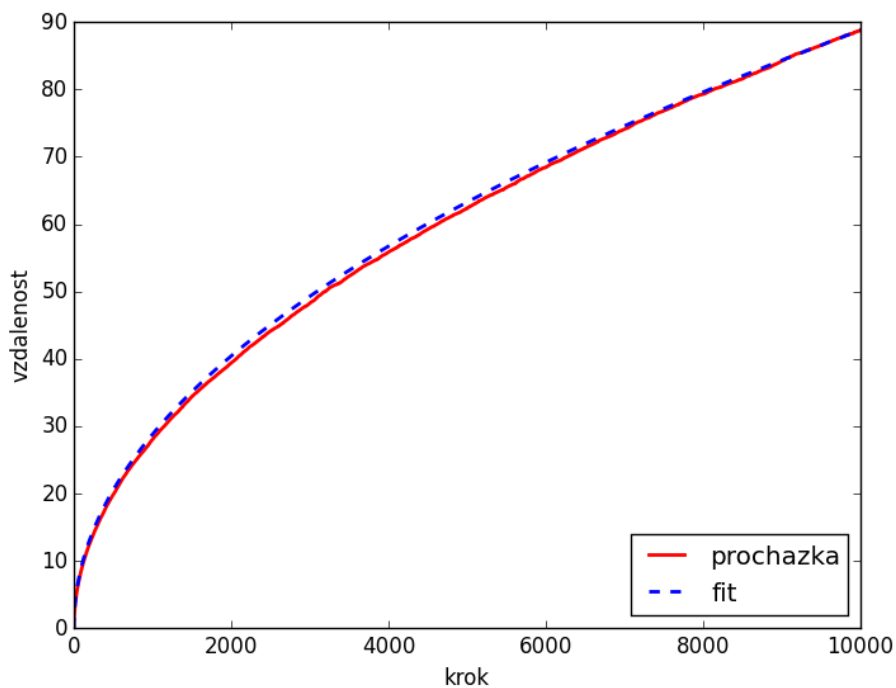
Obr. 7: Závislost chyby derivace na kroku h pro různé metody. Jako testovací funkce byla zvolena $f(x) = \exp(\sin(x))$ v bodě $x = 1$.



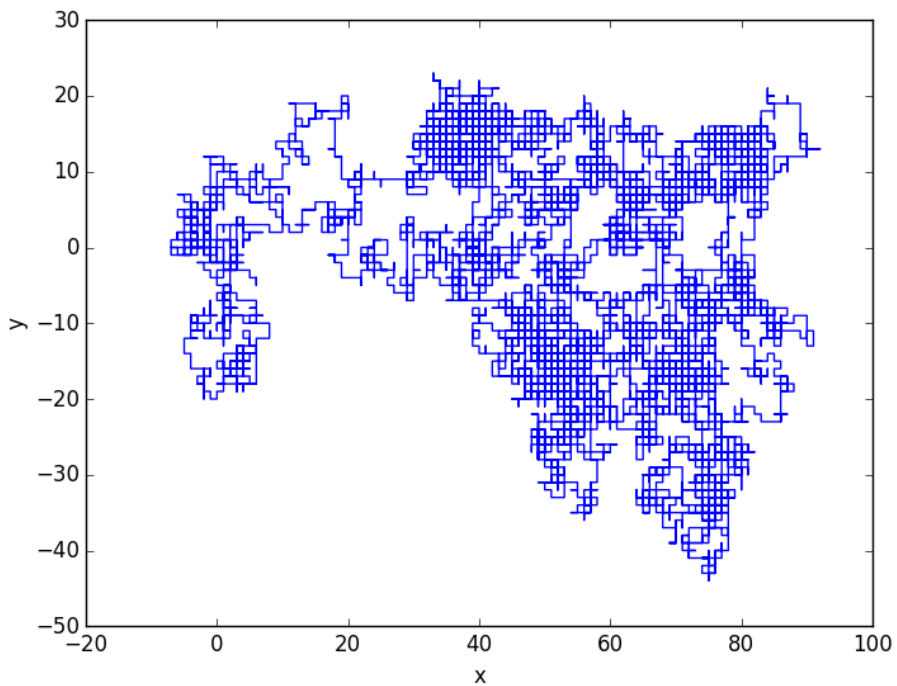
Obr. 8: Závislost složek rychlosti na čase získaná dopřednou a centrovanou diferencí.

Obr. 9: Závislost x -ové složky zrychlení na čase získaná dopřednou a centrovanou diferencí.Obr. 10: Závislost y -ové složky zrychlení na čase získaná dopřednou a centrovanou diferencí.

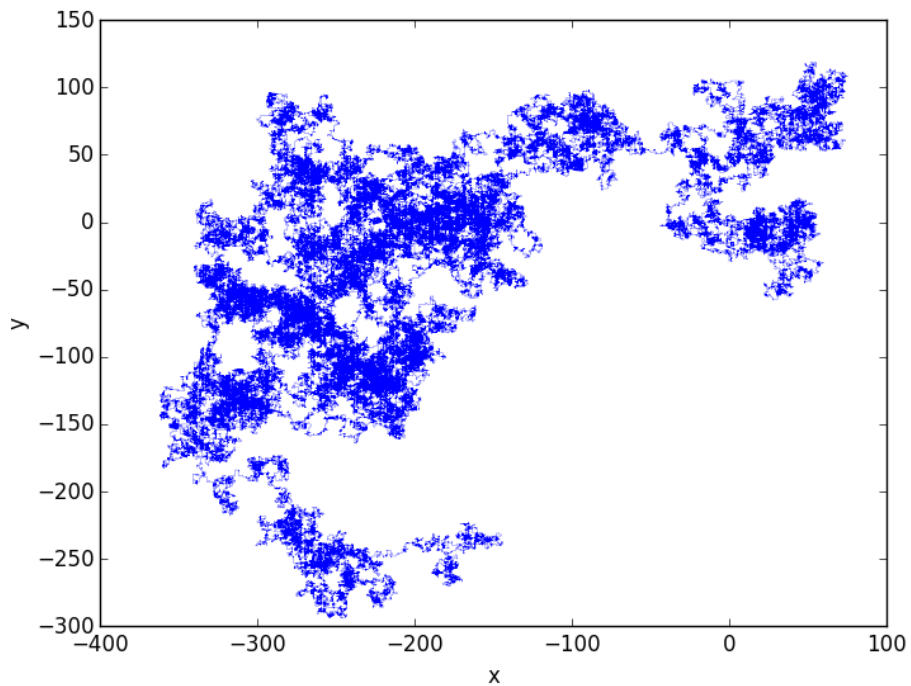




Obr. 12: Vzdálenost 2D procházky od počátku v závislosti na počtu kroků. Graf vznikl průměrováním 10 000 procházek o délce 10 000 kroků. Mocninový fit byl proveden na posledních 1 000 bodech, v levé části grafu proto vidíme, že fit příliš nesedí – nevykazuje asymptotické chování.



Obr. 13: Trajektorie 2D procházky o délce 10 000 kroků. V grafu jsou dobře vidět jednotlivé pravoúhlé kroky, je tedy zřejmé, že se nejedná o spojitý proces.



Obr. 14: Trajektorie 2D procházky o délce 200 000 kroků. Diskrétní mřížka již není patrná, procházka se blíží spojitému procesu.