

## Úvodem

Milí FYKOSáci,

školní rok se přehoupl do posledního čtvrtletí a s ním přichází šestá a poslední série tohoto ročníku. Někteří z vás mají již nyní diplom úspěšného řešitele jistý a mnozí k němu mají slibně nakročeno. Pokud tedy chcete využít jedné z možností prominutí přijímacích zkoušek na Matfyz nebo pokud si prostě chcete dát diplom za rámeček do výstavky, máte poslední šanci zvýšit svůj bodový zisk. Venku všechno kvete a voní a my přicházíme s letos posledním zadáním, stejně jako s řešeními úloh z minulé série. Za jedno chybějící řešení se hluboce omlouváme, stejně jako za chybějící seriál. Snad nám to odpustíte, seriál bude co nejrychleji zveřejněn na webu, ať můžete řešit. Spoustu výtečných nápadů při řešení přejí vaši

*Organizátoři*



### Zadání VI. série



*Termín uploadu: 8. 5. 2018 23.59*

*Termín odeslání: 7. 5. 2018*

#### Úloha VI.1 ... asi se urazila

3 body

Máme dva hmotné body o stejných hmotnostech  $m$  ve vzdálenosti  $d$  od sebe volně v prostoru bez žádných vnějších gravitačních sil. Jakou minimální rychlost ve směru spojnice obou bodů musíme udělit jednomu hmotnému bodu, aby se od sebe stále vzdalovaly?

#### Úloha VI.2 ... horký drát

3 body

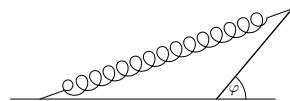
Vypočítejte proud, který by měl procházet kovovým vláknem s průměrem  $d = 0,10$  mm nacházejícím se ve vakuové baňce, aby teplota vlákna měla stálou hodnotu  $T = 2600$  K. Předpokládejte, že povrch vlákna září jako ideální černé těleso. Zanedbejte ztráty tepla způsobené vedením tepla. Rezistivita materiálu vlákna při dané teplotě je  $\rho = 2,5 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{cm}$ .

*Nápověda* Použijte Stefanův-Boltzmannův zákon.

#### Úloha VI.3 ... neanalytická pružinka

6 bodů

Představme si tyč s délkou  $b = 5$  cm a hmotností  $m = 1$  kg a pružinku s klidovou délkou  $c = 10$  cm, s tuhostí  $k = 200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  a se zanedbatelnou hmotností, které jsou na koncích spojeny. Druhé konce tyče a pružinky jsou upevněny ve stejné výšce ve vzdálenosti  $a = 10$  cm od sebe. Kolem obou upevnění i kolem spoje lze libovolně rotovat. Označme  $\varphi$  sklon tyče od horizontálního směru. Najděte všechny hodnoty  $\varphi$ , pro které je soustava v rovnovážné poloze. Které z těchto poloh jsou stabilní a které labilní?



**Úloha VI.4 ... rozměrová analýza**

7 bodů

Matěj si doma vyrobil střelnou zbraň a chce změřit, jakou rychlostí vystřeluje náboje. Bohužel nemá k dispozici jiný měřicí přístroj než pravítko. Našel ale kostku, jež je tvořena z poloviny ocelí a poloviny dřevem. Položí ji na kraj stolu (jehož výška je 100 cm a délka je 200 cm) a horizontálně do ní vystřelí. Kulka se od ocelové strany dokonale pružně odrazí přesně opačným směrem a dopadne do vzdálenosti 50 cm od stolu. Kostka se na stole posune o 5 cm. Potom Matěj kostku otočí a střelí do její dřevěné strany, v níž se kulka zaryje. Nyní naměřil posunutí jen 4 cm. Pomozte mu s výpočtem rychlosti výstřelu. Možná se vám bude hodit, že zjistil, že pohyb rozjeté kostky po stole se nezastaví, pokud jednu stranu stolu zvedne do výšky alespoň 20 cm.

**Úloha VI.5 ... skok z letadla**

8 bodů

Filip o hmotnosti 80 kg vyskočil z letadla, které je ve výšce  $h_1 = 500$  m nad zemí. Ve stejném okamžiku z druhého letadla skočila Danka o hmotnosti 50 kg, ale z výšky  $h_2 = 569$  m nad zemí. Předpokládejme, že oba mají stejný odporový koeficient  $C = 1,2$ , Filipova plocha příčného průřezu je  $S_F = 2,2$  m<sup>2</sup> a Dančina je  $S_D = 1,5$  m<sup>2</sup>. Hustota vzduchu  $\rho = 1,205$  kg·m<sup>-3</sup> se nemění s výškou. Za jakou dobu od výskoku bude Danka ve stejné výšce nad zemí jako Filip?

**Úloha VI.P ... kompenzace vesmírné expanze**

9 bodů

Podle současných pozorování a vesmírných modelů se zdá, že vesmír se rozpíná a rychlost rozpínání se zvyšuje. Co kdyby to tak nebylo? Co kdyby byl vesmír stále stejně velký, ale měnily by se fyzikální zákony/konstanty? Jak by se musely konstanty měnit, aby se nám zdálo, že se vesmír rozpíná, jak ukazují pozorování? Popište co nejvíce zákonů, které by se musely měnit.

**Úloha VI.E ... nehrajte si se sirkami**

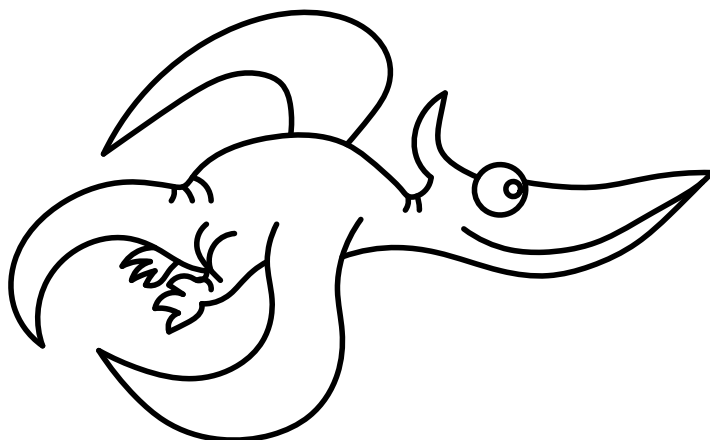
12 bodů

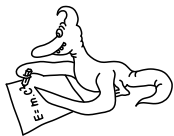
Změřte rychlost hoření špejle v závislosti na úhlu naklonění vůči vodorovné rovině.

**Úloha VI.S ... seriálová úloha**

10 bodů

Zadání seriálové úlohy najdete co nejdříve na našem webu.





## Řešení V. série

## Úloha V.1 ... schodiště na Měsíci

3 body; průměr 2,84; řešilo 43 studentů

Pokud bychom jednou kolonizovali Měsíc, bylo by vhodné na něm používat schody? Představte si na Měsíci klesající schodiště s výškou schodu  $h = 15$  cm a délkou  $d = 25$  cm. Odhadněte počet schodů  $N$ , které by přeletěl člověk, jestliže by před vstupem na schody šel rychlostí  $v = 5,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Tíhové zrychlení na povrchu Měsíce je šestkrát slabší než na povrchu Země. *Dodo čítal Mesiac je drsná milenka.*

Na Mesiaci pôsobí gravitačné zrýchlenie

$$a = \frac{g}{6},$$

kde  $g$  je pozemské tiažové zrýchlenie. Umiestnime počiatok súradnicovej sústavy na hranu najvyššieho schodu (koniec rovnej plochy). Nech os  $x$  je vodorovná v smere od roviny cez schodisko a os  $y$  je zvislá v smere zhora nadol. Potom pre letiaceho pozemšťana platí

$$\begin{aligned}x_p &= vt, \\y_p &= \frac{at^2}{2},\end{aligned}$$

pre vrcholy schodov

$$\begin{aligned}x_s &= Nd, \\y_s &= Nh.\end{aligned}$$

V okamihu dopadu platí

$$\begin{aligned}Nd &= x_s = x_p = vt, \\Nh &= y_s = y_p = \frac{at^2}{2},\end{aligned}$$

z čoho dostávame

$$N = \frac{2hv^2}{ad^2}$$

a po dosadení

$$N = \frac{12hv^2}{gd^2}.$$

Po vyčíslení dostávame  $N \doteq 6,6$ , teda človek pretne priamku spájajúcu vrcholy schodov niekde medzi  $N = 6$  a  $N = 7$ . Čiže po preletení šiestich schodov dopadne na siedmy. Pre Zem by sme dostali, že preletíme jeden schod, čo je v súlade s realitou. Prvý schod totiž zvykneme buď preskočiť, alebo pred schodiskom pribrzdíme. Problematický je totiž práve prechod z pohybu vo vodorovnom smere do pohybu v šikmom smere, nie pohyb šikmo. Na Mesiaci by teda nemusel byť problém používať dlhšie schodisko, ak by pred ním používatelia pribrzdili. Krátke

schodisko sa nevyplatí, pri skoku z výšky jedného poschodia nadobudneme rovnakú rýchlosť ako zo šesťkrát menšej výšky na Zemi, teda asi z pol metra. A to sa nám určite nič nestane.

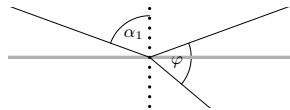
**Jozef Lipták**

liptak.j@fykos.cz

### Úloha V.2 ... paprsky smrti na skle

3 body; průměr 2,81; řešilo 42 studentů

Na skleněnou desku s absolutním indexem lomu  $n = 1,5$  dopadá světelný paprsek. Stanovte jeho úhel dopadu  $\alpha_1$ , jestliže paprsek odražený od rozhraní svírá s lomeným paprskem úhel  $60^\circ$ . Deska je uložena ve vzduchu.



*Danka ráda řeší více problémů najednou.*

Index lomu vzduchu je  $n_0 = 1$ , uhol lomu označíme  $\alpha_2$ . Zo Snellovho zákona vieme, že platí

$$n_0 \sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2 .$$

Zo zákona odrazu a z geometrie situácie vidíme, že

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 60^\circ = 180^\circ .$$

Teda

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 120^\circ .$$

Z tejto rovnosti vyjadríme  $\alpha_2$  a dosadíme do Snellovho zákona

$$\sin \alpha_1 = \frac{n}{n_0} \sin \alpha_2 = \frac{n}{n_0} \sin (120^\circ - \alpha_1) .$$

Použijeme súčtový vzorec pre sínus rozdielu dvoch uhlov  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$

$$\sin (\varphi_1 - \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 .$$

Dostávame

$$\sin \alpha_1 = \frac{n}{n_0} (\sin 120^\circ \cos \alpha_1 - \cos 120^\circ \sin \alpha_1) .$$

Úpravami vyjadríme uhol  $\alpha_1$

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 \left( 1 + \frac{n}{n_0} \cos 120^\circ \right) &= \frac{n}{n_0} \sin 120^\circ \cos \alpha_1 , \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\frac{n}{n_0} \sin 120^\circ}{1 + \frac{n}{n_0} \cos 120^\circ} . \end{aligned}$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 3\sqrt{3} .$$

Teda

$$\alpha_1 \doteq 79^\circ .$$

Uhol dopadu lúča je  $79^\circ$ .

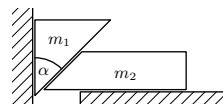
*Daniela Pittnerová*  
daniela@fykos.cz

## Úloha V.3 . . . klín

5 bodů; průměr 2,70; řešilo 30 studentů

Máme dva klíny o hmotnostech  $m_1$ ,  $m_2$  a úhel  $\alpha$  (viz obrázek). Vypočítejte zrychlení levého klínu. Předpokládejte, že nikde nedochází ke tření.

Bonus Uvažujte tření s koeficientem  $f$ .



*Jáchym vykradl skriptu ČVUT.*

Levý klín se může pohybovat pouze ve svislém směru a pravý klín po podložce ve vodorovném směru. Označme zrychlení levého klínu  $a_1$  a zrychlení pravého klínu  $a_2$ . Na levý klín působí ve svislém směru tíhová síla  $m_1g$  a v opačném směru složka  $F_n \sin \alpha$  reakční síly  $F_n$ , která působí mezi našimi klíny a je kolmá k jejich styčné ploše. Celkově tak z druhého Newtonova zákona dostáváme

$$m_1g - F_n \sin \alpha = m_1a_1. \quad (1)$$

Na pravý klín působí ve vodorovném směru složka  $F_n \cos \alpha$  reakční síly, a proto platí

$$F_n \cos \alpha = m_2a_2. \quad (2)$$

Dále využijeme vazbu mezi klíny. Představme si, že se levý klín posune svisle dolů o vzdálenost  $s_1$ . Protože na sebe i nadále klíny musí přiléhat, posune se pravý klín doprava o vzdálenost  $s_2 = s_1 \operatorname{tg} \alpha$ . Dvojitým zderivováním podle času získáme  $a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha$ . Když tento vztah dosadíme do rovnice (2), dostaneme

$$F_n \cos \alpha = m_2a_1 \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Nyní máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Rovnici (3) vynásobíme výrazem  $\operatorname{tg} \alpha$  a sečteme ji s rovnicí (1). Tak se zbavíme členu s neznámou silou  $F_nT$ ,

$$m_1g = m_1a_1 + m_2a_1 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Odtud už snadno vyjádříme

$$a_1 = g \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Jestliže se tedy levý klín bude pohybovat směrem dolů bez tření, jeho výsledné zrychlení bude  $a_1$ .

**Bonus**

Kromě sil zmíněných výše působí na klíny ještě třecí síly s koeficientem tření  $f$ . V případě levého klínu se budeme opět zajímat o velikost svislé komponenty výsledné síly. Připomeňme, že na levý klín působí ve svislém směru tíhová síla  $m_1g$  směrem dolů a síla  $F_n \sin \alpha$  směrem nahoru. Levý klín působí na pravý klín silou  $F_n$ , která je kolmá a jejich styčnou plochu. Tření s pravým klímem způsobí třecí sílu  $fF_n$ , která míří ve směru styčné plochy vzhůru a má svislou komponentu  $fF_n \cos \alpha$ . Celková síla, kterou působí levý klín na svislou stěnu, je součtem síly  $F_n \cos \alpha$  a vodorovné komponenty třecí síly  $-fF_n \sin \alpha$ . Třecí sílu mezi levým klímem a svislou stěnou pak spočítáme jako  $f(F_n \cos \alpha - fF_n \sin \alpha)$ . Celkově tak z druhého Newtonova zákona dostáváme

$$m_1g - F_n \sin \alpha - fF_n \cos \alpha - f(F_n \cos \alpha - fF_n \sin \alpha) = m_1a_1.$$

Na pravý klín působí normálová síla  $F_n$  a třecí síla  $fF_n$ . Jejich vodorovné komponenty jsou  $F_n \cos \alpha$  a  $-fF_n \sin \alpha$ . Dále potřebujeme zjistit velikost výsledné normálové síly působící na

podložku, abychom z ní určili třecí sílu mezi podložkou a pravým klínem. Tato normálová síla se skládá ze svislé složky  $F_n \sin \alpha$  síly  $F_n$ , ze svislé složky  $fF_n \cos \alpha$  třecí síly mezi oběma klíny a z tíhové síly  $m_2g$ . Třecí síla od vodorovné stěny je pak  $f(F_n \sin \alpha + fF_n \cos \alpha + m_2g)$ . Z druhého Newtonova zákona pro pohyb pravého klínu v horizontálním směru platí

$$F_n \cos \alpha - fF_n \sin \alpha - f(F_n \sin \alpha + fF_n \cos \alpha + m_2g) = m_2a_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

kde jsme již dosadili za  $a_2$  z rovnosti  $a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha$ , protože pohyb klínů je na sebe navázaný stejně jako v případě bez tření. Vzniklou soustavu převedeme vhodnými algebraickými úpravami do tvaru

$$\begin{aligned} m_1g - F_n (\sin \alpha + 2f \cos \alpha - f^2 \sin \alpha) &= m_1a_1, \\ -f m_2g + F_n (\cos \alpha - 2f \sin \alpha - f^2 \cos \alpha) &= m_2a_1 \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Obě rovnice vhodně přenásobíme a sečteme

$$\begin{aligned} m_1g (\cos \alpha - 2f \sin \alpha - f^2 \cos \alpha) - f m_2g (\sin \alpha + 2f \cos \alpha - f^2 \sin \alpha), \\ = a_1 (m_1 (\cos \alpha - 2f \sin \alpha - f^2 \cos \alpha) + m_2 \operatorname{tg} \alpha (\sin \alpha + 2f \cos \alpha - f^2 \sin \alpha)). \end{aligned}$$

Dalšími algebraickými úpravami najdeme řešení

$$a_1 = g \frac{1 - f^2 - 2f \operatorname{tg} \alpha - \frac{m_2}{m_1} f (2f + (1 - f^2) \operatorname{tg} \alpha)}{1 - f^2 - 2f \operatorname{tg} \alpha + \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg} \alpha (2f + (1 - f^2) \operatorname{tg} \alpha)}.$$

Všimněme si, že dosazením  $f = 0$  dostaneme stejný vzorec jako v základní úloze.

**Václav Mikeska**  
v.mikeska@fykos.cz

#### Úloha V.4 ... tepelné ztráty

7 bodů; průměr 5,70; řešilo 37 studentů

Na jaké teplotě se ustálí vnitřní prostředí bytu v panelovém domě? Uvažujte, že náš byt sousedí delšími stěnami, stropem a podlahou s dalšími byty, ve kterých je udržována teplota  $22^\circ\text{C}$ . Kratšími stěnami sousedí s okolím, kde je teplota  $-5^\circ\text{C}$ . Vnitřní rozměry bytu jsou: výška  $h = 2,5\text{ m}$ , šířka  $a = 6\text{ m}$  a délka  $b = 10\text{ m}$ . Součinitel měrné teplotní vodivosti stěn je  $\lambda = 0,75\text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ . Vnější stěny a stropy jsou tlusté  $D_{\text{out}} = 20\text{ cm}$  a vnitřní  $D_{\text{in}} = 10\text{ cm}$ .

Jak se změní výsledek, pokud budovu zvenku zateplíme polystyrenem o tloušťce  $d = 5\text{ cm}$  s měrnou tepelnou vodivostí  $\lambda' = 0,04\text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ ?

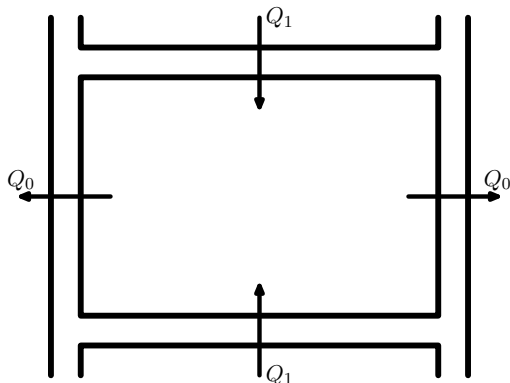
*Karel přemýšlel nad tím, jak to funguje v paneláku...*

Úloha je zameraná na vedenie tepla. Základná rovnica, ktorú využijeme, je

$$Q = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{d} t, \quad (4)$$

kde  $\lambda$  je koeficient tepelnej vodivosti,  $S$  je plocha steny,  $T_1 - T_2$  je rozdiel teplôt a  $t$  je doba tepelnej výmeny. Konštrukcia je na obrázku 1.

Označme  $Q_0$  teplo prenesené do bytu cez vonkajšiu stenu. Ďalej  $Q_1$  sú tepelné prenosy cez steny spoločnými so susednými bytmi a  $Q_2$  sú tepelné prenosy cez podlahu a strop. Po ustálení



Obr. 1: Pohľad na byt zhora.

situácie musí platiť, že za ľubovoľný časový úsek  $t$  bude celkový prírastok energie bytu nulový, teda

$$2Q_0 + 2Q_1 + 2Q_2 = 0,$$

čiže po dosazení z (4) dostávame

$$2\lambda ah \frac{T_{\text{out}} - T}{D_{\text{out}}} t + 2\lambda bh \frac{T_{\text{in}} - T}{D_{\text{in}}} t + 2\lambda ab \frac{T_{\text{in}} - T}{D_{\text{out}}} t = 0,$$

kde  $T_{\text{out}}$  je teplota vonku a  $T_{\text{in}}$  je teplota v okolitých bytoch. Odtiaľ si už môžeme vyjadriť teplotu, na ktorej sa ustáli prostredie vo vnútri bytu

$$T = \frac{ahD_{\text{in}}T_{\text{out}} + bhD_{\text{out}}T_{\text{in}} + abD_{\text{in}}T_{\text{in}}}{ahD_{\text{in}} + bhD_{\text{out}} + abD_{\text{in}}} \doteq 291,91 \text{ K} = 18,76 \text{ }^\circ\text{C}.$$

### Pre zateplené

Zateplením vonkajšej steny sa zmení len hodnota  $Q_0$ . Konkrétne sa zmení hodnota  $R$ , čo je tepelný odpor, pre ktorý platí  $R = \frac{d}{\lambda}$ . Pôvodná rovnica má potom tvar

$$Q = S \frac{T_1 - T_2}{R}.$$

Po zateplení sa výsledný tepelný odpor rovná súčtu<sup>1</sup> tepelných odporov polystyrénu a steny, teda

$$R = \frac{D_{\text{out}}}{\lambda} + \frac{d}{\lambda'}.$$

Čiže dostávame vzťah

$$2ah \frac{T_{\text{out}} - T}{\frac{D_{\text{out}}}{\lambda} + \frac{d}{\lambda'}} t + 2\lambda bh \frac{T_{\text{in}} - T}{D_{\text{in}}} t + 2\lambda ab \frac{T_{\text{in}} - T}{D_{\text{out}}} t = 0,$$

<sup>1</sup>V praxi sa pri výpočte tepelného odporu zohľadňujú aj odpory pri prestupe tepla na vnútornom a vonkajšom povrchu konštrukcie.



z kterého si opět můžeme vyjádřit teplotu, na které sa ustáli prostredie vo vnútri bytu

$$T = \frac{\lambda'ah \frac{T_{\text{out}}}{\lambda'D_{\text{out}} + \lambda d} + bh \frac{T_{\text{in}}}{D_{\text{in}}} + ab \frac{T_{\text{in}}}{D_{\text{out}}}}{\lambda'ah \frac{1}{\lambda'D_{\text{out}} + \lambda d} + bh \frac{1}{D_{\text{in}}} + ab \frac{1}{D_{\text{out}}}} \doteq 294,52 \text{ K} = 21,37^\circ \text{ C}.$$

Vidíme, že teplota v byte už bude veľmi podobná teplote, na ktorú vykukurujú susedi svoje byty.

*Filip Pastierovič*  
pastierf@fykos.cz

## Úloha V.5 ... záludná kapka

8 bodů; průměr 6,21; řešilo 19 studentů

Mějme kulatou kapku o poloměru  $r_0$  tvořenou vodou o hustotě  $\rho_v$ , která shodou okolností padá v mlze v homogenním tíhovém poli  $g$ . Uvažujme vhodnou mlhu se speciálními předpoklady. Tvoří ji vzduch o hustotě  $\rho_{\text{vzd}}$  a vodní kapičky s průměrnou hustotou  $\rho_r$ , když uvažíme, že se rozptýlí zcela rovnoměrně. Jestliže kapka propadne nějakým objemem takové mlhy, vysbírá všechnu vodu, která se v tomto objemu nachází. Na místě zůstane pouze vzduch. Jaká je závislost hmotnosti kapky na vzdálenosti uražené v takovéto mlze?

Bonus Řešte pohybové rovnice.

Karel chtěl zadat něco, kde se bude měnit hmotnost.

Při řešení bonusu vyjdeme z pohybové rovnice  $F = \dot{p} = \dot{m}\dot{x} + m\ddot{x}$ . Na kapku působí jediná síla, a sice tíhová,<sup>2</sup> kterou spočítáme jako  $F = mg$ . Dále můžeme spočítat časovou derivaci hmotnosti

$$\dot{m} = km^{\frac{2}{3}}\dot{x}.$$

Pro pohyb kapky tak platí

$$mg = \dot{m}\dot{x} + m\ddot{x} = km^{\frac{2}{3}}\dot{x}^2 + m\ddot{x},$$

$$g = \frac{k}{\frac{1}{3}kx + \left(\frac{4}{3}\pi\rho_v\right)^{\frac{1}{3}}r_0}\dot{x}^2 + \ddot{x}.$$

Jednoduchými algebraickými úpravami a zjednodušením<sup>3</sup>  $x_0 = \frac{3}{k} \left(\frac{4}{3}\pi\rho_v\right)^{\frac{1}{3}} r_0 = \frac{4e_v}{e_r} r_0$  dostáváme

$$g(x + x_0) = 3\dot{x}^2 + \ddot{x}(x + x_0) \quad (5)$$

Nyní využijeme substituci  $x = y^2 - x_0$ , pro kterou platí

$$\dot{x} = 2y\dot{y},$$

$$\ddot{x} = 2\dot{y}^2 + 2\ddot{y}y.$$

Snadno si můžete ověřit, že dosazení do rovnice (5) vede na

$$g = 14\dot{y}^2 + 2\ddot{y}y.$$

<sup>2</sup>Zanedbáváme vztlakovou sílu a odpor vzduchu. Pokud bychom je chtěli uvažovat, stačilo by pouze změnit některé konstanty, ale rovnice jako takové by zůstaly stejné. Vztlakovou sílu totiž přidáme členem úměrným pouze objemu, ten je zase přímo úměrný hmotnosti. Člen  $mg$  už je ale obsažen díky tíhové síle. Podle Newtonova zákona odporu bychom zase museli brát v úvahu nový člen úměrný druhé mocnině rychlosti, ten je zase shodný se členem, který získáme z časové derivace hybnosti.

<sup>3</sup>Ze vzorce (??) vyplývá, že pokud otočíme směr času, kapka se postupně dostane do jednoho konkrétního bodu, ve kterém je její poloměr nulový. Můžeme si povšimnout, že hodnota  $x_0$  má význam vzdálenosti tohoto bodu od polohy kapky s poloměrem  $r_0$ .

Nyní už konečně využijeme rovnost

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dt} \frac{dy}{dy} = \frac{d\dot{y}}{dy} \frac{dy}{dt} = \dot{y} \frac{d\dot{y}}{dy},$$

kteřá nám umožní předchozí diferenciální rovnici separovat. Řešíme integrál

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2\dot{y}d\dot{y}}{g - 14\dot{y}^2},$$

$$\ln y = -\frac{1}{14} \int \frac{-28\dot{y}d\dot{y}}{g - 14\dot{y}^2} = -\frac{1}{14} \ln |g - 14\dot{y}^2| + C.$$

Dosazením z předchozích vztahů ukážeme, že

$$g - 14\dot{y}^2 = \frac{1}{6} (7\ddot{x} - g),$$

tedy že podmínka  $g > 14\dot{y}^2$  je ekvivalentní s podmínkou  $7\ddot{x} > g$ . Jelikož na počátku platí  $\ddot{x} = g$ , podmínka je (alespoň na začátku) zřejmě splněna. Později však budeme muset ověřit, zda platí po celou dobu.

Z počátečních podmínek si vyjádříme integrační konstantu

$$C = \frac{1}{14} \ln (gx_0^7),$$

tedy po zpětném dosazení do výsledku integrálu máme

$$\ln y^{14} = -\ln (g - 14\dot{y}^2) + \ln (gx_0^7),$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2g}{7}} \left( (x + x_0) - x_0^7 (x + x_0)^{-6} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{7} \left( 1 + 6x_0^7 (x + x_0)^{-7} \right).$$

Druhou časovou derivací jsme získali  $\ddot{x}$ , pomocí čehož jsme si dosazením do (5) ověřili, že jsme postupovali správně. Navíc zřejmě platí  $7\ddot{x} > g$ , takže podmínka z předchozí části řešení bude splněna vždy.

Další postup je jasný, předchozí rovnice pro  $\dot{x}$  je separovatelná diferenciální rovnice, kterou stačí pouze zintegrovat

$$t = \sqrt{\frac{7}{2g}} \int \left( (x + x_0) - x_0^7 (x + x_0)^{-6} \right)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Bohužel, tato lahůdka jen pro ty největší integrální gurmány nemá analytické řešení. Lze ho vyjádřit pomocí hypergeometrické funkce, ale to je jen nekonečná suma, kterou stejně musíme spočítat numericky. Nicméně si můžeme povšimnout, že pro dostatečně velké  $x$  jde výraz  $x_0^7 (x + x_0)^{-7}$  velmi rychle k nule, tedy zrychlení se shora blíží hodnotě  $\frac{g}{7}$ . Zvolme nějaký

dostatečně velký čas  $t_0$ , potom můžeme pro čas  $t > t_0$  pohyb kapky aproximovat rovnoměrně zrychleným pohybem

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &\approx \frac{g}{7}, \\ \dot{x}(t) &\approx \frac{gt}{7} + \dot{x}(t_0), \\ x(t) &\approx \frac{gt^2}{14} + \dot{x}(t_0)t + x(t_0),\end{aligned}$$

kde  $x(t_0)$  a  $\dot{x}(t_0)$  jsou dráha a rychlost kapky v čase  $t_0$ . Jejich hodnoty musíme samozřejmě určit numericky, ale všechny další  $x(t)$  už pak z předchozích rovnic snadno spočítáme analyticky. Jedná se sice pouze o aproximaci, ale pro dostatečně velké  $t_0$  můžeme dosáhnout libovolné přesnosti. Navíc, vzhledem k tomu, jak vysoké mocniny se v původních rovnicích vyskytují, dostáváme i pro relativně malé hodnoty  $t_0$  velmi přesné výsledky.

*Jáchym Bártík*  
tuaki@fykos.cz

## Úloha V.P ... plovoucí rtuť

9 bodů; průměr 6,42; řešilo 31 studentů

*Vymyslete co nejvíce fyzikálních „figlů“, díky kterým by rtuť, alespoň po omezenou dobu, plavala na kapalně vodě. Čím trvalejší řešení naleznete, tím lépe.*

*Karel chtěl otočit Archiméda na ruby.*

Nejprve uvedeme několik zajímavých konstant. Podle publikace Matematické, fyzikální a chemické tabulky Státního nakladatelství v Praze (ano, ty staříčké tabulky, které většina z vás má doma) je hustota rtuti  $\rho_{\text{Hg}} = 13\,546 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , hustota vody  $\rho_{\text{Aq}} = 998 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , teplota tání rtuti  $t_t = -38,8 \text{ }^\circ\text{C}$  a teplota varu rtuti  $t_v = 356,6 \text{ }^\circ\text{C}$ , součinitel teplotní objemové roztažnosti rtuti při  $20^\circ\text{C}$   $\beta = 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ , povrchové napětí rtuti při  $20^\circ\text{C}$   $\sigma_{\text{Hg}} = 491 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ , povrchové napětí vody při  $20^\circ\text{C}$   $\sigma_{\text{Aq}} = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Zadaný problém rozebereme z několika úhlů pohledu. Snížení hustoty rtuti tak, aby plavala na vodě, je nejpřímochařejší řešení, které napadne snad každého. To ovšem není nijak jednoduché. Mohli bychom rtuť dát do (vhodně velké, přesné parametry necháme na čtenáři) nádoby se vzduchem a ten potom všechn odsát, aby vznikl podtlak. Rtuť by pak izotermicky vyplnila nádobu a tím pádem by jí klesla hustota. Po návratu do prostředí s běžným tlakem by se ale hustota velmi rychle vrátila zpět na běžnou hodnotu, ani bychom ji na vodu nestihli nalít. Ekvivalent se stlačením vody by nefungoval ze stejného důvodu, pokud by něco takového bylo vůbec možné. Stejně tak se můžeme pokusit izobaricky změnit hustotu tím, že ji ohřejeme. Může se nám povést ji přivést na požadovanou hustotu dříve, než začne vařit a vypaří se? Tentokrát precizně ověříme, že se nám to povést nemůže, v ostatních ukázkách takto precizní nebudeme a pouze nastíníme postup.

Součinitel teplotní objemové roztažnosti se při malých změnách teploty chová skoro konstantně. Uvažujme tedy, že se nemění. Zhruba odhadneme potřebnou teplotu zdola. Aby rtuť měla menší hustotu než voda, potřebujeme její objem při dané hmotnosti zvětšit více než třináctkrát. Je-li  $\delta t$  rozdíl teplot, potom se počáteční objem  $V_0$  změní na  $V_1 = V_0(1 + \beta\delta t)$ . Aby se takto objem rtuti zvětšil více než třináctkrát, musí určitě platit  $\beta\delta t > 12$ , tedy  $\delta t > 12/\beta > 66\,000 \text{ K}$ , což je vysoko nad teplotou varu rtuti, i kdyby počáteční teplota soustavy byla  $0^\circ\text{C}$ .

Člověka také napadne rtuť nebo vodu s něčím smíchat (např. vodu osolit a tím jí zvýšit hustotu), ale to bohužel nespĺňuje parametry zadání (pak už to není voda, ale nějaká směs).

Přímocharým řešením je rtuť hodně ochladit. Ona pak kolem sebe vytvoří led, na kterém chvíli poplave. Na podobném principu funguje řešení rtuť rozžhavit. Díky vodním páráům, které se okolo začnou tvořit, se chvíli udrží na hladině. Je diskutabilní, zda toto řešení splňuje zadání. Podle nás spíše nespĺňuje, ale nějaké body jsme přesto dávali, protože tento způsob napadl mnoho z vás.

Další hodně přímocharé řešení je rtuť zmrazit třeba ve tvaru lodičky. Rtuť pak bude plavat, dokud neroztaje. Abychom dodrželi zadání (vizte předchozí odstaveček), musíme vodu pod lodičkou ohřívát, což trvanlivost lodičky značně snižuje.

Jiné řešení je soustavu dát do skleněné nádoby ve tvaru úzkého válce, přímo kapiláry, který bude tak tenký, že rtuť se díky svému odstávání od stěn nádoby prostě nestlačí natolik, aby se potopila (tzn. aby kolem ní pronikla voda, která sice vzlíná, ale ani to jí nepomůže). Zároveň ale nádoba musí být tak široká, abychom rtuť ještě dostali dovnitř. Díky vazbám mezi atomy vody (vzlínává vrstva musí mít nějakou tloušťku a snaží se být souvislá) tyto dvě hranice nejsou stejné, ale budeme muset měřit hodně přesně.

Další už ne tak zjevný postup je rtuť roztrfšit na malícké kuličky, které se díky povrchovému napětí vody udrží na hladině. Toto řešení může být trvalé, pokud hladina vody vydrží v klidu a kuličky se k sobě nebudou přibližovat. Každá kulička kolem sebe totiž vytvoří prohlubeň, které způsobí, že pokud se kuličky dostanou moc blízko k sobě, seběhnou se, spojí a vytvoří tak větší kuličku. Příliš velké kuličky se kvůli své hmotnosti na hladině neudrží a potopí se. Velikosti kuliček lze určit jednoduchým výpočtem, který je cvíčením na vzájemné působení sil a který ponecháme laskavému čtenáři. Hlavní myšlenka je ale poměrně jednoduchá. Vazby mezi atomy rtuti jsou silnější než vazby mezi atomy vody (rtuť díky tomu bude víceméně držet tvar kuličky) a nanočástice se zřejmě nepotopí (povrchové napětí vody je silnější, to vidíme třeba na tom, že na hladině může plavat ocelová jehla).

Další možností je rtuti stále pomáhat, aby se udržela na hladině. Třeba ji mechanicky šoupat po hladině (např. do ní z boku foukat) nebo ji shora vysávat. Nebo zařídit, aby kapalina proudila tak rychle, že se rtuť nemá šanci potopit.

Můžeme také pod kapkou rtuti vytvořit trysku, která bude nahoru stále posílat proud vody a kapka, pokud z něj nesklouzne a bude dost malá, aby se nerozpadla, se na něm udrží. Tady řešíme ten problém, že kapička je jednak křehká, jednak je tato konfigurace hodně nestabilní a stačí malý podnět, aby objekt z fontánky sklouzl. Částečným řešením může být zmrazení kapičky. Bude-li proud vody dost silný, nebude se ani tvořit led (kvůli spouště kinetické energie). Také můžeme kapičku na místě nějak přidržovat.

Relativní magnetická permeabilita rtuti je za normálních podmínek nižší než u vody (rtuť má něco jako  $1 - 31 \cdot 10^{-6}$ , voda  $1 - 9 \cdot 10^{-6}$ ), takže ji magnetické pole odpuzuje více než vodu. Proto můžeme udržovat kapičku rtuti na hladině pomocí magnetu umístěného pod nádobou. Rozdíl relativních magnetických permeabilit je ale malícký, takže by se muselo jednat o hodně silný magnet, aby to fungovalo.

Rtuť podchlazená na teplotu blízko teplotě absolutní nuly je supravodivá, takže s tím lze také pracovat. Tato metoda má ale extrémní až nespĺnitelné nároky na dodávání/odebrání tepla, má-li voda zůstat kapalná.

Při řešení této úlohy se objevilo ještě mnohem více nápadů, některé dokonce vypadaly proveditelně. Abychom to uzavřeli, říglu je spousta, ale většinou se jedná o výměnu mezi množstvím

a energetickou náročností. Které řešení je nejlepší, to necháme na názoru každého z vás.

*Markéta Calábková*  
calabkovam@fykos.cz

## Úloha V.S ... rostou nám diferenciální rovnice

10 bodů; průměr 3,73;

řešilo 11 studentů

- Řešte problém dvou těles pomocí Verletovy a Rungovy-Kuttovy metody 4. řádu přes několik (mnoho) period. Krok přitom volte tak velký, aby se projevil numerické chyby, a pozorujte, jakým způsobem se chyby v obou případech projevují na tvaru trajektorie.
  - Řešte pohyb tlumeného lineárního harmonického oscilátoru, který je dán rovnicí  $\ddot{x} + 2\delta\omega\dot{x} + \omega^2x = 0$ , kde  $\omega$  je úhlová frekvence a  $\delta$  tlumící člen. Parametry měňte a sledujte změny v chování oscilátoru. Pro jaké hodnoty parametrů se oscilátor utlumí nejrychleji?
  - Modelujte růst povrchu metodou balistické depozice a studujte statistické chování hrubosti povrchu. Nalezněte mocniny  $\alpha$  a  $\beta$  popisující růst před saturací a po saturaci (viz seriál). Vyděte z kódu v seriálu. Volte takový počet kroků, abyste byli schopni dobře studovat oba režimy hrubnutí. Lineární rozměr povrchu volte alespoň  $L = 256$ . (Upozornění: simulace mohou trvat i několik hodin.)
  - Simulujte na čtvercové mřížce šíření zhoubného nádoru pomocí Edenova modelu. Uvažujte přitom následující obměnu: s pravděpodobností  $p_1$  dojde k nákaze zdravé buňky v kontaktu s nádorovou a s pravděpodobností  $p_2$  dojde k uzdravení nakažené. Volte nejprve  $p_1 \gg p_2$ , pak  $p_1 > p_2$  a nakonec  $p_1 < p_2$ . Na počátku necht' je nakaženo pět buněk do tvaru kříže. Kvalitativně popište, co pozorujete.
  - Přepište kód ze seriálu pro růst fraktálního krystalu (DLA model) na hexagonální mřížce na růst na čtvercové mřížce a spočítejte dimenzi výsledného fraktálu.
- Poznámka Využití kódy přiložené k seriálu není nutné, ale doporučeno.

*Algebru už Mirek s Lukášem vypěstovali, nyní mají jiné osivo.*

- Nejprve musíme odvodit správné pohybové rovnice, přičemž pro jednoduchost budeme celou dobu pracovat v kartézských souřadnicích. Gravitační síla, kterou první bod o hmotnosti  $m_1$  působí na druhý hmotný bod o hmotnosti  $m_2$ , je

$$\mathbf{F}_g = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12},$$

kde  $\mathbf{r}_{12}$  je polohový vektor druhého bodu vůči prvnímu bodu a  $r_{12}$  je jeho velikost. Silou o stejné velikosti, ale s opačným znaménkem, pak působí bod 2 na bod 1. Zrychlení bodu pak obdržíme vydělením síly hmotností daného bodu. Protože druhý Newtonův zákon má (ve verzi s konstantní hmotností) tvar  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}$ , máme sestaveny pohybové rovnice, jen je potřeba je upravit do tvaru vhodného pro danou metodu. U Verletovy metody máme splněno, neboť je očekávána diferenciální rovnice právě v tomto tvaru. Pro Rungovu-Kuttovu metodu musíme rovnici upravit na soustavu rovnic prvního řádu. To docílíme substitucí  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ , díky čemuž automaticky obdržíme i okamžité rychlosti bodů, které budeme potřebovat při výpočtu

energie. Pro Verletovu metodu musíme rychlosti získat oklikou, například aplikací numerické derivace dle času na funkci polohy.<sup>4</sup> Výsledná soustava rovnic tedy je

$$\ddot{x}_1 = \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{|(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2|^{\frac{3}{2}}}, \quad \ddot{y}_1 = \frac{Gm_2(y_2 - y_1)}{|(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2|^{\frac{3}{2}}},$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{Gm_1(x_1 - x_2)}{|(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2|^{\frac{3}{2}}}, \quad \ddot{y}_2 = \frac{Gm_1(y_1 - y_2)}{|(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2|^{\frac{3}{2}}}$$

pro Verletovu metodu a

$$\dot{v}_{x1} = \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{|(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2|^{\frac{3}{2}}}, \quad \dot{v}_{y1} = \frac{Gm_2(y_2 - y_1)}{|(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2|^{\frac{3}{2}}},$$

$$\dot{v}_{x2} = \frac{Gm_1(x_1 - x_2)}{|(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2|^{\frac{3}{2}}}, \quad \dot{v}_{y2} = \frac{Gm_1(y_1 - y_2)}{|(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2|^{\frac{3}{2}}},$$

$$\dot{x}_1 = v_{x1}, \quad \dot{y}_1 = v_{y1},$$

$$\dot{x}_2 = v_{x2}, \quad \dot{y}_2 = v_{y2}$$

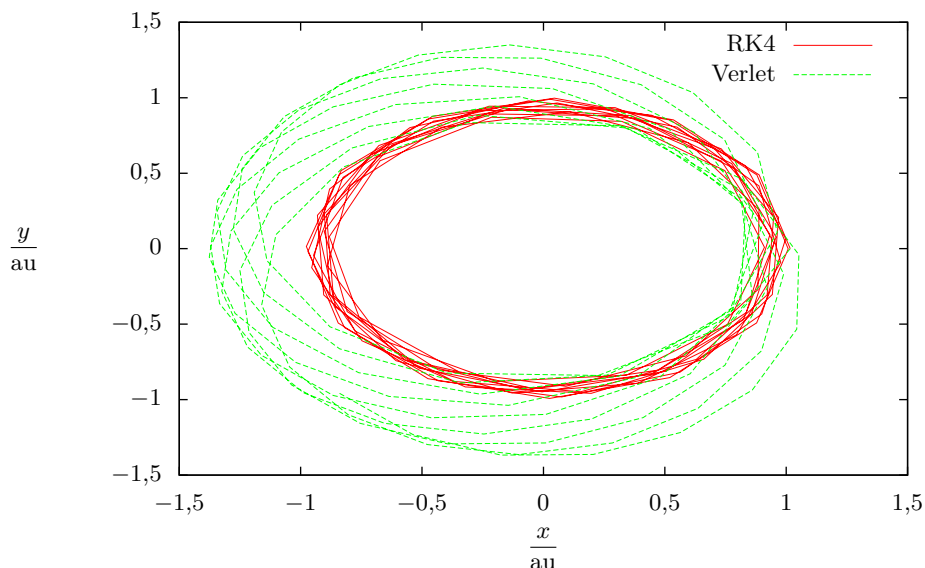
pro Rungovu-Kuttovu metodu. Tyto rovnice platí v inerciální soustavě spojené s těžištěm. Bylo by samozřejmě možné simulaci provádět i v jiné soustavě, bylo by ale potřeba příslušně transformovat polohy a rychlosti a v případě neinerciálních soustav započítat vliv setrvačných sil. Příkladem vhodné transformace je umístění jednoho z těles do počátku (nerotující) souřadné soustavy, pak totiž stačí simulovat pohyb pouze jednoho tělesa vůči druhému, což ve výsledku vede k menším numerickým chybám.

Pro porovnání vlastností metod si nyní problém zjednodušíme a budeme uvažovat, že platí  $m_1 \gg m_2$ , tedy například pohyb planety okolo Slunce. Slunce pak můžeme napevno posadit do středu a simulovat pouze pohyb planety.

V grafu 2 vidíme výsledek takové simulace po dobu 10 oběhů s poměrně velkým krokem. Na první pohled je vidět nesrovnalost ve velikosti velké poloosy mezi oběma metodami. Ta je způsobena tím, že Verletovu algoritmu je nutno dodat počáteční podmínky ve formě dvou poloh místo polohy a rychlosti, jako v případě Rungovy-Kuttovy metody. Pro výpočet tohoto prvního kroku byl (z důvodu lenosti) použit Eulerův algoritmus, který s tímto velkým krokem způsobil značnou chybu. Pokud bychom byli při volbě počátečních podmínek pečlivější, tato chyba by nevznikla, dále ji tedy budeme ignorovat.

Druhá věc, které si všimneme, je stáčení dráhy vypočtené Verletovou metodou, zatímco dráha vypočtená Rungovou-Kuttovou metodou je víceméně stále stejná. To je způsobeno tím, že Verletova metoda je metodou druhého řádu, zatímco použitá Rungova-Kuttova metoda je řádu čtvrtého, pro daný krok má tedy menší chybu. Všimněme si ale, že dráha je touto chybou pouze stáčena, nemění se její rozměry. To je právě důsledkem časové reverzibility a následného zachování energie u Verletovy metody. Pokud se podíváme na časovou závislost energie planety (vztažené na jednotkovou hmotnost planety) v grafu 2, vidíme, že v případě Verletovy metody energie osciluje s periodou jednoho oběhu. Není tedy vždy na zcela správné hodnotě, v průběhu času ale nikam nedriftuje, i s takto hrubým krokem se tedy bude takto držet, i kdybychom simulovali třeba 10 000 oběhů. Energie v případě Rungovy-Kuttovy metody oproti tomu v tomto úseku simulace drží lépe díky vyššímu řádu metody,

<sup>4</sup>V případě, že potřebujeme znát rychlosti, lze také použít metody, které jsou Verletovi ekvivalentní, jako leap-frog, či rychlostní Verlet. O těchto a dalších metodách jsme se v seriálu nezmiňovali, můžete si je ale dohledat.



Obr. 2: Simulace oběhu Země kolem Slunce pomocí Verletovy a Rungovy-Kuttovy metody 4. řádu s krokem 30 dní.

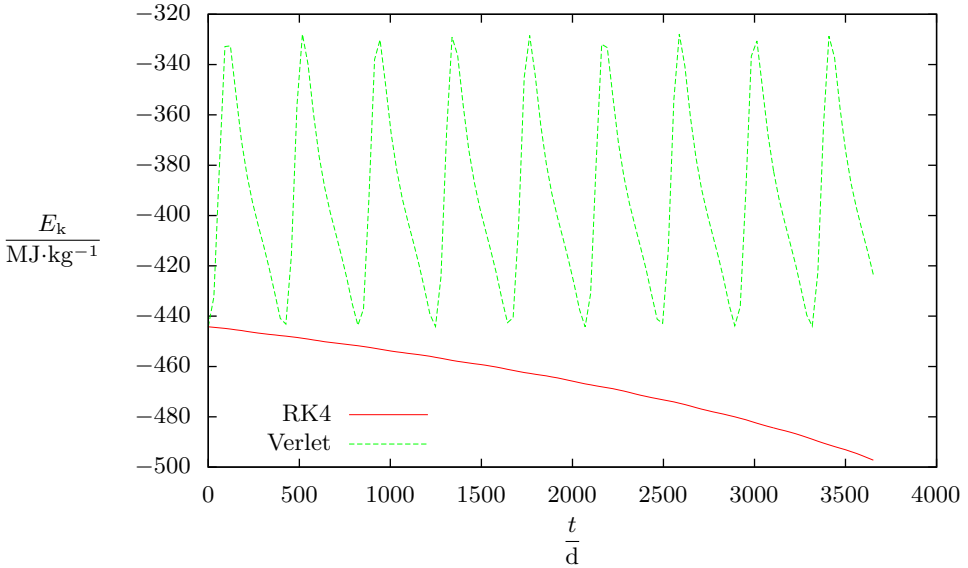
postupně se ale mění (a čím dál rychleji), po mnoha periodách by tedy vůbec neodpovídala skutečnosti.

- b) Po substituci  $\dot{x} = v$  dostáváme diferenciální rovnici  $\dot{v} = -2\delta\omega v - \omega^2 x$ , čímž jsme obdrželi systém dvou rovnic prvního řádu. Na jeho řešení použijeme Rungovu-Kuttovu metodu 4. řádu, protože je na rozdíl od Adamsových-Bashforthových-Moultonových metod jednodušší, není jí tedy potřeba startovat, navíc je Rungova-Kuttova metoda 4. řádu dokonce vhodnější z hlediska stability.<sup>5</sup> Naopak explicitní Eulerovu metodu zde použít nemůžeme, neboť pro netlumený oscilátor  $\delta = 0$  je řešení nestabilní pro libovolně malý krok. Tvrzení opět souvisí s oblastí stability – tento pojem se pokusíme objasnit v příštím díle seriálu. Nicméně i bez těchto teoretických znalostí lze z chování řešení od pohledu usuzovat na jeho (ne)stabilitu. Nestabilita totiž znamená, že se chyby neúměrně zvětšují, řešení tedy roste k nekonečnu (či osciluje mezi kladným a záporným nekonečnem)<sup>6</sup> Jak takové nestabilní chování vypadá, vidíme na obrázku 4, kde je vykresleno nestabilní řešení rovnice  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  explicitní Eulerovou metodou a pro porovnání stabilní řešení Rungovou-Kuttovou metodou. Kromě počátečních podmínek, které mají jasný význam počáteční rychlosti a polohy, můžeme měnit další dva parametry, úhlovou rychlost  $\omega$  a tlumící člen  $\delta$ . S trochou experimentování zjistíme, že mají význam odpovídající jejich názvu, parametr  $\omega$  ovlivňuje periodu kmitů, zatímco  $\delta$  řídí rychlost exponenciálního útlumu.<sup>7</sup> Jak jsme již zjistili, hodnota  $\delta = 0$  odpo-

<sup>5</sup>Má větší tzv. oblast stability, můžeme tedy volit o něco větší krok pro dané parametry při zachování stability.

<sup>6</sup>Je samozřejmě třeba dát pozor, jestli divergence není očekávaným správným řešením dané rovnice.

<sup>7</sup>Ve skutečnosti  $\delta$  také ovlivňuje periodu kmitů a  $\omega$  rychlost útlumu, jak si rozebereme dále.



Obr. 3: Simulace oběhu Země kolem Slunce pomocí Verletovy a Rungovy-Kuttovy metody 4. řádu s krokem 30 dní – vývoj celkové energie.

vídá kmitům bez tlumení. Čím větší pak faktor je, tím je tlumení silnější. Je ale zajímavé, že silnější tlumení nutně neznamená, že výchylka rychleji klesne k nule, jak můžeme vidět na obrázku 5, kde jsou vyneseny časové závislosti výchylky pro hodnotu parametru  $\delta = 0,7$ ,  $\delta = 1$  a  $\delta = 1,3$ . Je patrné, že nejrychleji se utlumí oscilátor při  $\delta = 1$ . Nejde jen o náš tip na základě experimentování s hodnotou parametru, ale jde o obecný výsledek. Říkáme, že takový oscilátor koná *mezní aperiodický pohyb*. Pokud je  $\delta < 1$ , oscilátor není zcela utlumen během jednoho kmitu, tlumení k nulové výchylce tedy trvá déle. Oscilátor koná *periodický* pohyb. Naopak pokud  $\delta > 1$ , oscilátor je přetlumený tak, že „tlumí i tlumení výchylky k nule“, výchylka tedy klesá pomalu, ale nepřekmitne a u nuly se ustálí, pohyb je *aperiodický*.

Doplňme, že pro tuto diferenciální rovnici lze nalézt analytické řešení ve tvaru

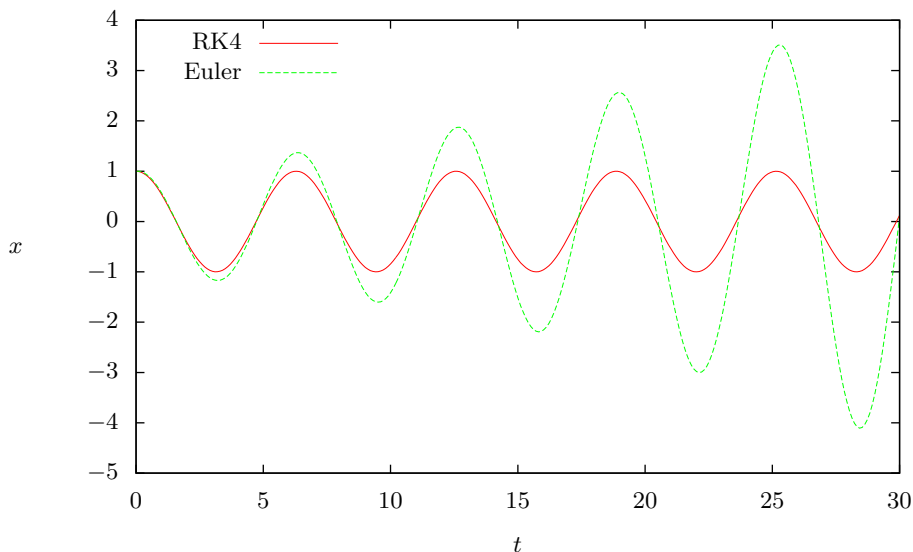
$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t},$$

kde  $\lambda_{1,2} = -\delta\omega \pm \omega\sqrt{\delta^2 - 1}$  a  $A$  a  $B$  jsou integrační konstanty (odvoditelné z počátečních podmínek). Pro  $\delta \in (0, 1)$  je výraz pod odmocninou záporný, odmocnina má tedy komplexní hodnotu. Pak platí  $\lambda_{1,2} = -\delta\omega \pm i\omega\sqrt{1 - \delta^2}$ , řešení tedy pomocí úpravy přes Eulerův vzorec pro komplexní exponenciálu a triku využívajícího fakt, že součet dvou různých řešení je také řešení, můžeme přepsat do tvaru

$$x(t) = e^{-\delta\omega t} \left( C \cos(t\omega\sqrt{1 - \delta^2}) + D \sin(t\omega\sqrt{1 - \delta^2}) \right), \quad (6)$$

kde  $C$  a  $D$  jsou reálné integrační konstanty. Z tohoto výsledku vidíme, že tlumení působí s faktorem  $\delta\omega$  a oscilace mají úhlovou frekvenci  $\omega\sqrt{1 - \delta^2}$ . Pro mezní případ  $\delta = 1$  pak





Obr. 4: Porovnání stabilního a nestabilního řešení rovnice  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  se stejnými počátečními podmínkami, s krokem 0,1 a  $\omega = 1$ .

z rovnice (6) oscilace vymizí a zůstane jen tlumící exponenciála. Zároveň ale<sup>8</sup> bude řešením rovnice i  $x(t) = Kte^{-\omega t}$ , kde  $K$  je konstanta. A protože součet řešení homogenní diferenciální rovnice je také řešením, je celkové řešení pro případ  $\delta = 1$  rovno

$$x(t) = (F + Gt)e^{-\omega t},$$

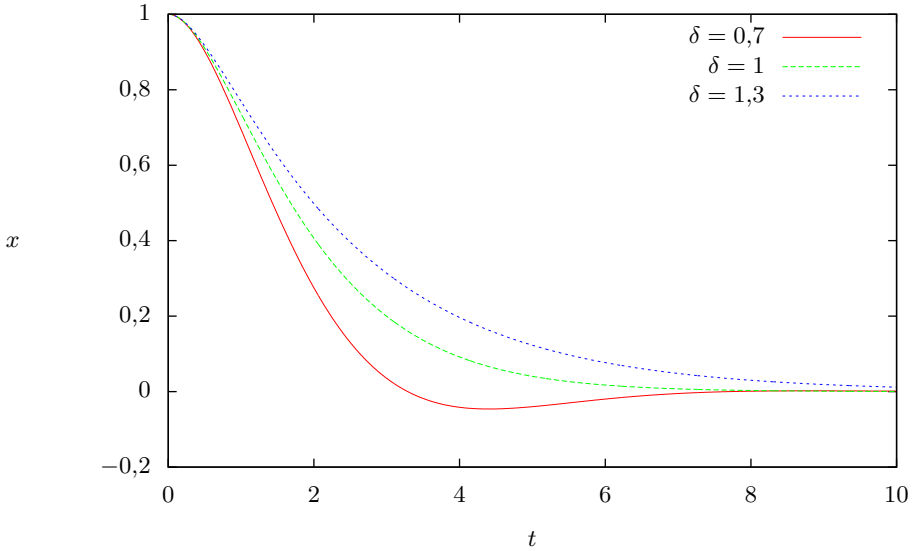
kde  $F$  a  $G$  jsou integrační konstanty. Můžete si derivováním ověřit, že toto řešení klesá k nule monotónně a (pro stejné počáteční podmínky) rychleji než periodické řešení nebo součet dvou exponenciál z aperiodického řešení.

Celou dobu jsme měli představu mechanického oscilátoru, například závaží na pružině. Uvědomme si ale, že stejná rovnice popisuje i jiné, neméně významné systémy, například RLC obvod, kde výchylka odpovídá elektrickému náboji (který je úměrný napětí) na kondenzátoru a rychlost proudu protékajícímu obvodem.

- c) V této úloze je zásadní dodržet limit na minimální velikost mřížky, nebo lépe použít ještě větší rozměry<sup>9</sup>  $L = 512$  či  $L = 1024$ . Lze si snadno rozmyslet, že pro  $L = 2$  a podobně malé mřížky bude balistická depozice vykazovat jiné odlišné chování od velkých mřížek. Chceme-li tedy získat správné hodnoty škálovacích parametrů, musíme volit tak velkou mřížku, aby se neprojevovala její konečnost.

<sup>8</sup>Protože jde o případ s vícenásobnými kořeny tzv. charakteristického polynomu dané ODR. Detaily teoretického řešení dif. rovnic si můžete dohledat ve vhodné literatuře.

<sup>9</sup>Že se jedná o mocniny dvojky není příliš podstatné, leda že bychom chtěli využít způsob ukládání čísel do paměti.



Obr. 5: Časová závislost výchylky lineárního harmonického oscilátoru pro tři různé hodnoty parametru  $\delta$  při  $\omega = 1$  a stejných počátečních podmínkách.

Podívejme se nejprve na kritický škálovací koeficient  $\alpha$  a prozradme si dopředu, že exaktní analytické řešení diferenciální rovnice příslušné balistické depozice vede na  $\alpha = 0.5$ . S využitím kódu v seriálu nyní vypočteme vývoj hrubosti pro dvě mřížky  $L_1 = 256$  a  $L_2 = 512$ . Jelikož v asymptotě velkých časů platí  $W(L) \sim L^\alpha$ , srovnáním dvou simulací dostaneme

$$\frac{W(L_2)}{W(L_1)} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^\alpha,$$

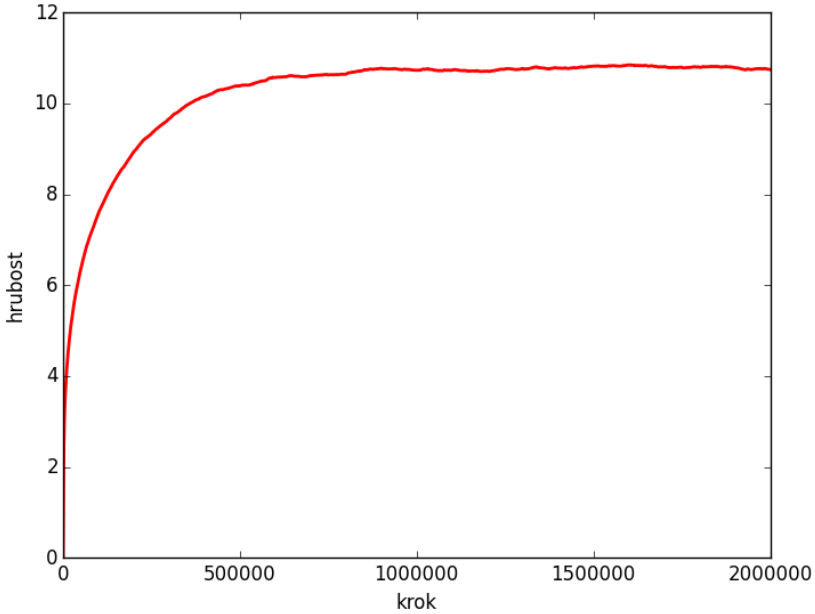
neboli

$$\alpha = \log_2 \frac{W(L_2)}{W(L_1)}. \quad (7)$$

Abychom splnili podmínku  $t \gg t_x$ , tj. že se pohybujeme v časech výrazně větších, než je charakteristický čas přechodu od růstu k saturaci, vykreslíme si graf a odhadneme, kdy už je hrubost saturována. Jako příklad uvádíme obr. 6, kde jsme vykreslili pro mřížku  $L_2$  hrubost zprůměrovanou přes  $5 \cdot 10^3$  běhů na  $2 \cdot 10^6$  krocích. Vidíme, že po  $10^6$  krocích je hrubost již bezpečně saturována. Také si můžeme všimnout, že i přes průměrování není graf zcela hladký. Jelikož není v našich časových možnostech provést tolik běhů, budeme za saturovanou hrubost považovat průměr hrubostí na intervalu  $10^6 < t < 2 \cdot 10^6$ , který je v našem případě roven  $\overline{W}(L_2) = 10,76$ . Simulaci provedeme též pro  $L_1$  a podobným zpracováním získáme  $\overline{W}(L_1) = 7,82$ . Ze vztahu (7) pak vypočteme<sup>10</sup>  $\alpha = 0,46$ . To není úplně špatný výsledek,

<sup>10</sup>Pravděpodobně jste si všimli, že jsme v seriálu již před delší dobou upustili od počítáním směrodatných odchylek. Je to proto, že nás obvykle více trápí nejistoty způsobené nastavením naší simulace než nejistoty způsobená statistikou.

ale pořád se od exaktního výsledku nezanedbatelně odchylujeme. Pro  $L_3 = 1024$  dostaneme porovnáním s  $L_2$  koeficient  $\alpha = 0,48$ .

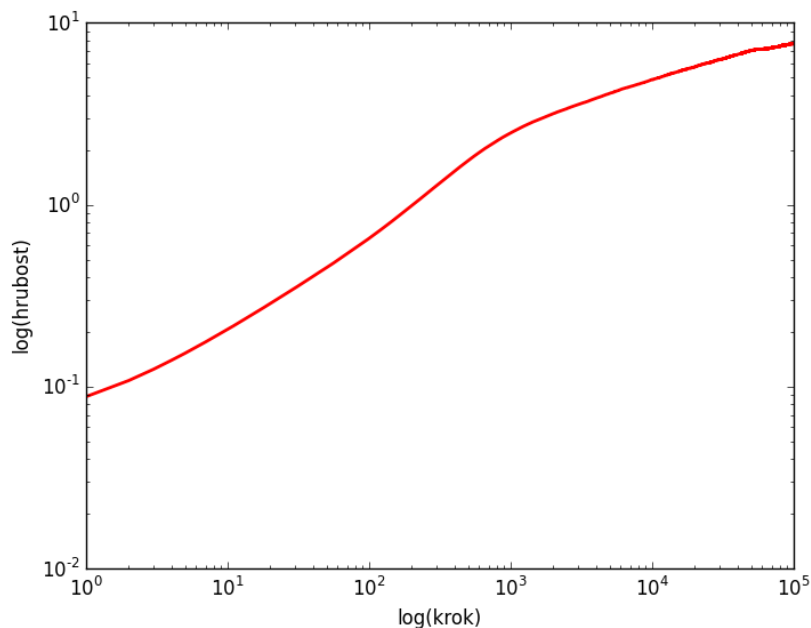


Obr. 6: Vývoj hrubosti povrchu spočtený na základě modelu balistické depozice na mřížce délky  $L = 512$ , průměrováno přes 5 000 běhů.

Pro nalezení škálovacího parametru  $\beta$  nepotřebujeme porovnávat více mřížek, stačí pouze fitovat evoluce hrubosti v oblasti  $t \ll t_x$  (jak v Pythonu fitovat jsme se učili v třetím díle seriálu, který se věnoval náhodným procházkám). Z lineárního grafu však jen špatně odhadneme, kdy se ve vztahu  $W(t, L) \sim t^\beta$  začíná exponent měnit. Proto si nakreslíme log-log graf (obě osy logaritmické), viz obrázek 7. Krok indexujeme od 1, čímž se taky vyhneme logaritmování nuly. Jelikož děláme simulaci pouze pro  $10^5$  kroků na mřížce  $L_1 = 256$ , mohli jsme si dovolit nefiltrovat body v grafu. Průměrovali jsme přes 1000 běhů.

Vidíme, že hrubost v naší simulaci vykazuje na počátku komplikovanější chování. Během prvních několika desítek kroků vidíme lineární chování a v oblasti několika tisíců až desetitisíců kroků také, ale v obou případech s jiným sklonem. Dále již graf plynule přechází k saturaci (není zde vyobrazeno, ale víme z obr. 6). Fitováním prvního lineárního úseku na intervalu 20–50 kroků získáme koeficient  $\beta_1 \doteq 0,50$ , na druhém úseku získáme na intervalu 8 000–20 000 kroků  $\beta_2 \doteq 0,26$ . Koeficient  $\beta_1$  není ten, který hledáme. Pro takto malé počty kroků je totiž malá pravděpodobnost, že se nová částice trečí do blízkosti nějaké předešlé, a chování je proto téměř nezávislé na modelu.<sup>11</sup> Pro čtyřnásobně velkou mřížku se intervaly

<sup>11</sup>Podle tzv. narozeninového paradoxu víme, že tohle chování bychom měli pozorovat pro řádově prvních  $\sqrt{L}$



Obr. 7: Vývoj hrubosti povrchu spočtený na základě modelu balistické depozice na mřížce délky  $L = 256$ , v logaritmickém grafu. Průměrováno přes 1000 běhů.

linearity posunou v čase doprava,  $\beta_1$  se nezmění, ale dostaneme  $\beta_2 = 0,28$ . Pokud půjdeme ještě dál a provedeme výpočet na mřížce velikosti 4096, dostaneme koeficient  $\beta_2 = 0,29$ , pro mřížku velikosti 65536 pak  $\beta_2 = 0,32$ . I v tomto případě existuje analytické řešení, které dává  $\beta = 1/3$ . Vidíme, že konvergence je velice pomalá,<sup>12</sup> navíc pro menší mřížky je obtížné najít lineární interval pro fitování koeficientu  $\beta$ .

Všimněme si také chování křivky mezi našimi dvěma lineárními oblastmi. Její sklon nejdříve z 0,5 roste a pak prudce poklesne na  $\approx 1/3$ , přičemž v grafu udělá (na obr. 7 kolem tisíce kroků) kopeček. Toto chování je celkem atypické a nevíme, jak ho teoretický model, ze kterého plyne  $\alpha$  a  $\beta$ , vysvětlí. Nejde pouze o chybu způsobenou malým  $L$  – pro větší  $L$  je sice křivka „rovnější“, ale kopeček mezi dvěma oblastmi linearity je stejně výrazný.

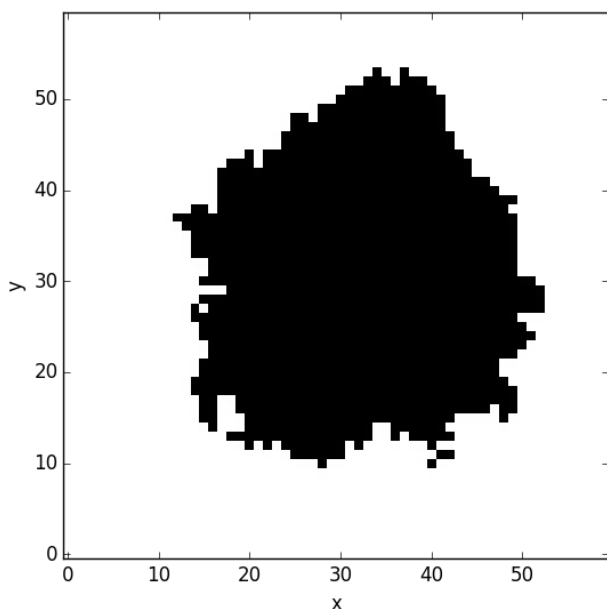
Alternativním numerickým přístupem, kterým taky vyřešíme těžce pozorovatelnou vlnitost křivky, může být výpočet numerické derivace naší log-log křivky a hledání intervalu, ve kterém je tato derivace konstantní. U balistické depozice je ale problém v tom, že numerická derivace výrazně osciluje a musíme hrubost průměrovat přes příliš mnoho běhů (nebo počítat derivaci přes hodně sousedních bodů) na to, aby byla pro výpočet koeficientu  $\beta$  použitelná. Obecně můžeme říct, že jsme u této úlohy narázeli na problém s výpočetním časem. Pro

kroků.

<sup>12</sup>Viz např. <http://www.thp.uni-koeln.de/krug/teaching-Dateien/SS2012/Farnudi2011.pdf>

seriózní simulační výpočty se proto nepoužívají interpretované jazyky jako Python, ale C, C++ či Fortran.

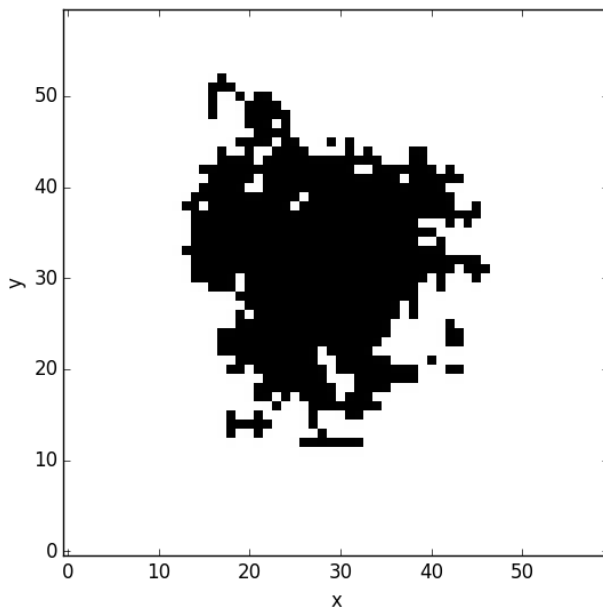
- d) Uzdravování nakažených buněk implementujeme do modelu jednoduše: před řádky kódu provádějící nakažení jedné ze sousedních buněk necháme vygenerovat náhodné číslo od 0 do 1 a pokud je menší než pravděpodobnost uzdravení, právě vybraná buňka se uzdraví a vybíráme jinou buňku. Také již nebudeme označovat nemocné buňky obklopené nemocnými indexem 2. Navíc předpokládáme  $p_1 + p_2 = 1$ ; nemá smysl uvažovat kroky, kdy nedojde k nakažení žádné buňky, protože v simulaci nesledujeme skutečný čas (tj. s klidem vyřazujeme kroky, kdy se nic neděje).



Obr. 8: Stav nakažených buněk po 1500 krocích Edenova modelu s pravděpodobností uzdravení 0,1.

Pokud zvolíme  $p_1 < p_2$ , tedy že pravděpodobnost nakažení je menší než pravděpodobnost uzdravení, dojde v několika málo krocích (čím větší  $p_2$ , tím méně kroků) k uzdravení všech buněk a simulace končí. Pokud zvolíme  $p_1 \gg p_2$ , například  $p_1 = 0,9$ , nebude se výsledek příliš lišit od případu  $p_1 = 1$ , pouze mírně naroste porozita a rozeklanost povrchu, viz obrázek 8. Zajímavý je případ  $p_1 \gtrsim p_2$ . Pro volbu  $p_1 = 0,55$  jsme dostali obrázek 9, přičemž simulace měla pětkrát více kroků než v případě  $p_1 = 0,9$ . Porozita je mnohem vyšší, dokonce vznikají oddělené ostrůvky nakažených buněk. Celý vývoj nákazy si můžete prohlédnout v animaci na webu.<sup>13</sup>

<sup>13</sup><http://fykos.cz/rocnik31/ulohy/serie5>

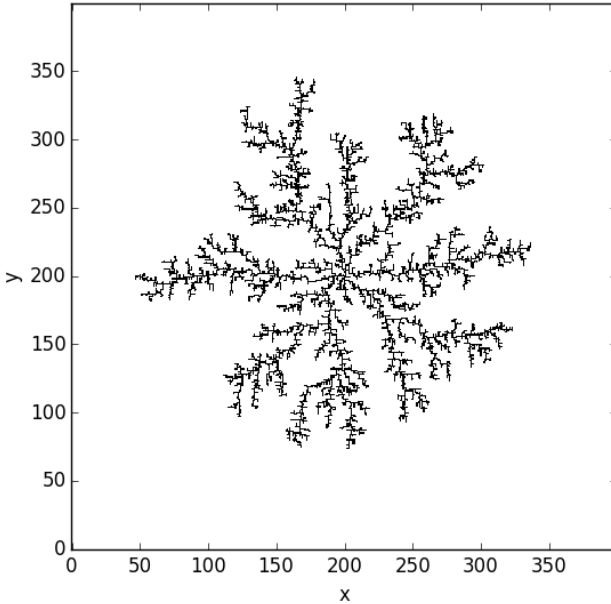


Obr. 9: Stav nakažených buněk po 7500 krocích Edenova modelu s pravděpodobností uzdravení 0,45.

- e) Model pro simulaci DLA obsahuje dva parametry, jejichž hodnoty se výrazně projeví na výsledku. Jsou to počáteční vzdálenost každé difundující částice a velikost oblasti, mimo kterou nesmí částice utéct.<sup>14</sup> Také vyvstává otázka, jak měřit vzdálenost částice od počátku. Na šestiúhelníkové mřížce jsme radiální vzdálenost interpretovali jako „šestiúhelníkovou slupku“ – ta má svým tvarem již poměrně blízko ke kružnici. Měli bychom počáteční vzdálenost na čtvercové mřížce interpretovat jako poloměr kružnice, nebo rozměr čtverce?

Položená otázka nemá jednoznačnou odpověď, oba přístupy mohou přinést zajímavý výsledek. Jelikož je ale cílem naší simulace napodobit přírodní jev růstu krystalů z roztoku, necháme startovat částice na kružnici a podobně jako u úloh s náhodnými procházkami budeme předpokládat, že pro simulace velkých rozměrů přestane hrát roli, že jsme skutečný všesměrový pohyb omezili na mřížku. Co se týče dvou zmíněných parametrů, jedná se o trade-off mezi rychlostí a přesností simulace. Čím dále bude částice startovat a čím méně omezíme její pohyb, tím přesnější výsledek dostaneme – na druhou stranu, náročnost simulace bude prudce růst. Zde jsme zvolili počáteční vzdálenost jako  $1,2r_{\max}$  a šíření jsme zastavili, když částice utekla za  $1,5r_{\max}$ . Zde použitý kód naleznete jako přílohu u řešení na webu, na obrázku 10 je pak výsledný krystal složený z 8 000 částic. Na základě vzorečku

<sup>14</sup>Existují samozřejmě alternativní postupy, například místo omezení pohybu na určitou oblast můžeme zavést limit na délku trajektorie difundující částice.



Obr. 10: Výsledek simulace růstu podle DLA modelu na čtvercové mřížce. Počet částic v krystalu je 8 000.

z seriálu<sup>15</sup>

$$D_{\text{DLA}} = \frac{\log N}{\log r_{\text{max}}}, \quad (8)$$

jsme určili fraktální dimenzi  $D = 1,79$ ; opakováním simulace si můžeme ověřit, že se první tři platné číslice nemění. Řešení diferenciálních rovnic definujících DLA, kde se částice pohybují Brownovým pohybem (tj. nejsou vázány na mřížku), vede na hodnotu dimenze  $D = 1,71$ . Všimněte si, že na čtvercové mříži jsme dostali vyšší hodnotu dimenze než na šestiúhelníkové v seriálu (1,75). Mohli bychom se tedy domnívat, že povolení pohybu do více směrů přibližuje náš odhad výsledku pro skutečnou, na mřížku nevázanou difúzi. Nesmíme však zapomenout, že u obou simulací jsme výrazně omezili prostor, ve kterém se částice smí pohybovat, nemáme tedy dostatečně dobrý podklad pro vyvozování podobných závěrů.

Ještě uvedme, že existují různé modifikace DLA. Například můžeme zavést pravděpodobnost navázání částice na krystal. Pokud je výrazně menší než 1, může se částice dostat hlouběji

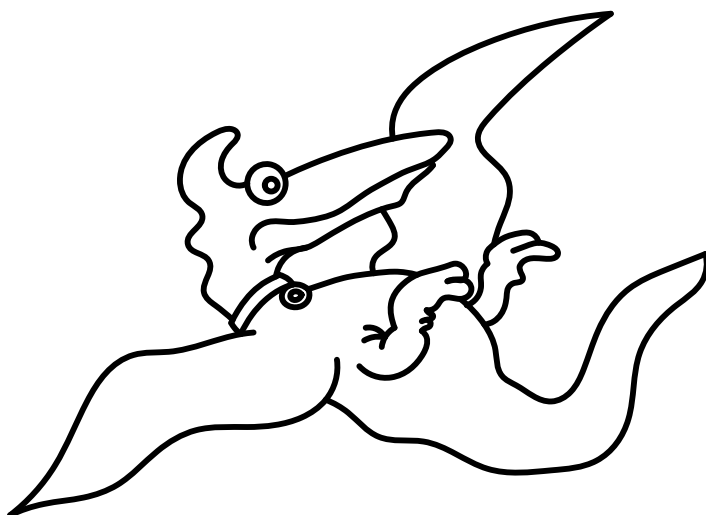
<sup>15</sup>V seriálu bylo napsáno, že zatímco v případě Kochovy vločky měříme velikost strany trojúhelníku, u DLA měříme rozměr krystalu. Nebylo tam však již zmíněno, že tato záměna má být provedena podle jako  $1/\varepsilon \rightarrow r_{\text{max}}$ . Pokud prostě dosadíme místo  $\varepsilon$  hodnotu  $r_{\text{max}}$ , dostaneme výsledek s opačným znaménkem. Proto za řešení uvádějící chybné znaménko nebyly strhávány body. Matematická definice dimenze ovšem může být libovolná, jde pouze o to, jak interpretujeme výsledky – klidně bychom dimenzi mohli zadefinovat tak, aby byla pro fraktál jako Kochova vločka, který neroste, ale „houstne“, záporná.

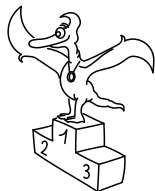
do keříčků krystalu. Fraktál pak začíná být geometricky hustý, tzn. jeho dimenze se blíží hodnotě 2 (dimenze prostoru, ve kterém se pohybujeme).

*Miroslav Hanzelka*  
mirek@fykos.cz

*Lukáš Timko*  
lukast@fykos.cz







## Pořadí řešitelů po V. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

| jméno                    | škola                             | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P  | E  | S  | V  | %   | Σ   |
|--------------------------|-----------------------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|
| <i>Student Pilný</i>     | MFF UK                            | 6 | 6 | 5 | 7 | 8 | 9  | 12 | 10 | 63 | 100 | 316 |
| 1. Robert Gemrot         | G Komenského, Havířov             | 6 | 6 | 1 | 7 | 5 | 10 | 7  | –  | 42 | 83  | 255 |
| 2. Martina Daňková       | Klasické a španělské G, Brno      | 6 | 6 | 1 | 7 | – | 5  | 8  | 6  | 39 | 80  | 212 |
| 3. Marco Souza de Joode  | G Nad Štolou, Praha               | 6 | 6 | 0 | 6 | 8 | 10 | 8  | –  | 44 | 75  | 184 |
| 4. Lubor Čech            | G Brno, tř. Kpt. Jaroše           | 6 | 6 | 2 | 7 | 2 | 7  | 6  | –  | 36 | 66  | 175 |
| 5. Patrik Kašpárek       | Katolické gymnázium Třebíč        | 6 | 6 | 1 | 3 | – | 6  | 8  | –  | 30 | 66  | 153 |
| 6. Šárka Štěpánková      | G J. Ressela, Chrudim             | 4 | 6 | – | 4 | – | 4  | 4  | –  | 22 | 58  | 132 |
| 7. Hana Slámová          | G Brno, tř. Kpt. Jaroše           | – | – | – | – | – | –  | –  | –  | –  | 80  | 96  |
| 8. Karolína Letochová    | G Šternberk                       | – | – | – | – | – | 6  | –  | –  | 6  | 54  | 76  |
| 9. Viktor Fukala         | G Jana Keplera, Praha             | – | – | – | – | – | –  | –  | –  | –  | 94  | 65  |
| 10. Soňa Husáková        | G, Českolipská, Praha             | 6 | – | – | – | – | –  | –  | –  | 6  | 48  | 44  |
| 11. Jan Raja             | G, Nymburk                        | – | – | – | – | – | –  | –  | –  | –  | 67  | 35  |
| 12. Jiří Szołkowski      | G, Karviná                        | – | – | – | – | – | –  | –  | –  | –  | 83  | 29  |
| 13.–14. Adam Huštava     | European School Luxembour<br>g II | 6 | 4 | 1 | – | – | 8  | 1  | –  | 20 | 60  | 27  |
| 13.–14. Michaela Valkova | G Česká, Bratislava               | – | – | – | – | – | –  | –  | –  | –  | 48  | 27  |
| 15. Lucie Urbanová       | G Chotěboř                        | – | – | – | – | – | –  | –  | –  | –  | 77  | 23  |
| 16. Aleš Socha           | G a SOŠ, Frýdek-Místek            | – | – | – | – | – | –  | –  | –  | –  | 38  | 22  |
| 17.–18. Lucia Gintnerová | G Sv. Františka, Žilina           | – | – | – | – | – | –  | –  | –  | –  | 83  | 10  |
| 17.–18. Martin Polyácsko | G Alejová, Košice                 | 6 | 4 | – | – | – | –  | –  | –  | 10 | 83  | 10  |

## Kategorie druhých ročníků

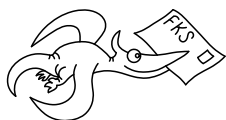
| jméno                           | škola                                 | 1   | 2  | 3 | 4 | 5 | P | E  | S  | V  | %   | Σ   |
|---------------------------------|---------------------------------------|-----|----|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| <i>Student</i>                  | <i>Pilný</i>                          | MFF | UK |   |   |   |   |    |    |    |     |     |
|                                 |                                       | 6   | 6  | 5 | 7 | 8 | 9 | 12 | 10 | 63 | 100 | 316 |
| 1. <i>Martin Schmied</i>        | G Jihlava                             | 6   | 6  | 0 | 5 | 7 | 6 | 1  | 1  | 32 | 71  | 225 |
| 2. <i>Jakub Jobus</i>           | G PdC, Piešťany                       | 6   | 6  | 1 | 5 | 6 | 6 | 7  | 4  | 41 | 69  | 218 |
| 3. <i>Viktor Materna</i>        | G Brno, tř. Kpt. Jaroše               | 6   | 6  | 1 | 6 | – | 7 | 5  | –  | 31 | 80  | 198 |
| 4. <i>Radka Křížová</i>         | G J. Heyrovského, Praha               | 6   | 6  | 4 | 7 | – | – | 7  | –  | 30 | 68  | 172 |
| 5. <i>Martin Vavřík</i>         | G, Šumperk                            | 6   | 6  | 5 | 7 | 8 | 9 | 12 | –  | 53 | 88  | 164 |
| 6. <i>Jan Benda</i>             | G, Litoměřická, Praha                 | 6   | 6  | 2 | 5 | 8 | 9 | 8  | –  | 44 | 81  | 162 |
| 7. <i>Jiří Zelenka</i>          | G Z. Wintra, Rakovník                 | –   | 4  | 2 | 4 | – | 5 | 11 | –  | 26 | 66  | 156 |
| 8. <i>Jonáš Havelka</i>         | G Jírovцова, České Budějovi-<br>ce    | 6   | –  | – | 7 | – | – | –  | –  | 13 | 82  | 134 |
| 9. <i>Pavla Rudolfová</i>       | G, Vídeňská, Brno                     | 6   | 6  | – | 2 | – | 2 | 3  | –  | 19 | 67  | 108 |
| 10. <i>Eva Vochozková</i>       | Biskupské G, Brno                     | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 67  | 81  |
| 11. <i>Lukáš Hronek</i>         | G, Písek                              | 6   | 6  | – | – | – | – | –  | –  | 12 | 84  | 76  |
| 12. <i>Adam Grunt</i>           | G, Trutnov                            | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 61  | 62  |
| 13. <i>Jan Vondra</i>           | G Týn nad Vltavou                     | 4   | 0  | – | 3 | – | – | –  | –  | 7  | 41  | 61  |
| 14. <i>Matěj Holubička</i>      | G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice             | 2   | 6  | – | – | – | 3 | –  | –  | 11 | 51  | 55  |
| 15. <i>Aneta Vacková</i>        | Jiráskovo G, Náchod                   | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 78  | 53  |
| 16. <i>Adam Křivka</i>          | Cyrilomet. G a SOŠ pg., Brno          | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 80  | 51  |
| 17. <i>Jakub Pravda</i>         | ŠpMNDaG, Bratislava                   | 4   | 6  | 1 | 4 | – | 7 | –  | –  | 22 | 72  | 46  |
| 18. <i>Milan Tichavský</i>      | Slezské G, Opava                      | 6   | 2  | 3 | 6 | – | – | –  | –  | 17 | 78  | 40  |
| 19. <i>Kateřina Barotová</i>    | G, Olomouc-Hejčín                     | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 108 | 26  |
| 20. <i>Václav Svoboda</i>       | G J. Š. Baara, Domažlice              | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 46  | 22  |
| 21. <i>Jan Svoboda</i>          | G J. Š. Baara, Domažlice              | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 57  | 20  |
| 22.–23. <i>Soňa Curylová</i>    | G F. Palackého, Val. Mez.             | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 61  | 19  |
| 22.–23. <i>Filip Wagner</i>     | G Tišnov                              | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 76  | 19  |
| 24. <i>Daniel Krátký</i>        | G, Trutnov                            | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 33  | 18  |
| 25. <i>Marek Nestěra</i>        | G K. Sladkovského, Praha              | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 84  | 16  |
| 26. <i>Josef Polášek</i>        | G Jana Keplera, Praha                 | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 63  | 15  |
| 27. <i>Marcel Zdeněk</i>        | SPŠ strojnická a SOŠ profeso-<br>ra Š | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 50  | 14  |
| 28. <i>Lucie Ambrožová</i>      | G, Svitavy                            | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 50  | 13  |
| 29.–30. <i>Marek Černocho</i>   | G F. Palackého, Val. Mez.             | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 63  | 10  |
| 29.–30. <i>Filip Novotný</i>    | G Jihlava                             | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 53  | 10  |
| 31. <i>Lucia Krajčovičchová</i> | G Jura Hronca, Bratislava             | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 80  | 8   |
| 32. <i>MERT UNSAL</i>           | Bahcesehir HS for Sc and<br>Tech,TR   | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 17  | 2   |

## Kategorie třetích ročníků

| jméno                             | škola                         | 1   | 2  | 3 | 4 | 5 | P | E  | S  | V  | %   | Σ   |
|-----------------------------------|-------------------------------|-----|----|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| <i>Student</i>                    | <i>Pilný</i>                  | MFF | UK |   |   |   |   |    |    |    |     |     |
|                                   |                               | 3   | 3  | 5 | 7 | 8 | 9 | 12 | 10 | 57 | 100 | 286 |
| 1. <i>Kateřina Rosická</i>        | G J. Ortena, Kutná Hora       | 3   | 2  | 6 | 7 | 8 | 7 | 12 | 4  | 49 | 93  | 267 |
| 2. <i>Jindřich Dušek</i>          | G Jana Keplera, Praha         | 3   | 3  | 2 | 6 | 8 | 9 | 7  | 8  | 46 | 84  | 239 |
| 3. <i>Vojtěch Klimeš</i>          | G, Treboň                     | 3   | 3  | 3 | 5 | 1 | 9 | 8  | 4  | 36 | 79  | 227 |
| 4. <i>Ladislav Trnka</i>          | G, Havlíčkův Brod             | 3   | 3  | 1 | 7 | 8 | 7 | 7  | 1  | 37 | 77  | 220 |
| 5. <i>Marek Jankola</i>           | G M. Hattalu, Trstená         | 3   | 3  | 5 | 7 | – | 8 | 8  | –  | 34 | 86  | 183 |
| 6. <i>Josef Minařík</i>           | G Brno, tř. Kpt. Jaroše       | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 79  | 166 |
| 7. <i>Lucie Kundratová</i>        | G, nám. TGM, Zlín             | 3   | 3  | 2 | 7 | – | – | 10 | –  | 25 | 80  | 140 |
| 8. <i>Ivan Hudák</i>              | ESŠ, Lip. Mikuláš             | 3   | 2  | 1 | 7 | 8 | – | 9  | –  | 30 | 80  | 139 |
| 9. <i>Jindřich Jelínek</i>        | G, Olomouc-Hejčín             | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 82  | 133 |
| 10. <i>Tomáš Drobil</i>           | G Dačice                      | 3   | 3  | – | 7 | – | – | 7  | 3  | 23 | 64  | 130 |
| 11. <i>Petr Zahradník</i>         | G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.  | –   | 2  | – | – | – | – | 8  | –  | 10 | 66  | 114 |
| 12. <i>Jiří Blaha</i>             | G, Uherské Hradiště           | 3   | 2  | – | 5 | 8 | – | –  | 2  | 20 | 78  | 112 |
| 13. <i>Marie Grunová</i>          | G Moravský Krumlov            | 2   | 3  | 1 | – | 0 | 5 | 6  | –  | 17 | 48  | 104 |
| 14. <i>Marko Bermell</i>          | Slovanské G, Olomouc          | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 60  | 78  |
| 15. <i>Filip Koňářík</i>          | G F. Palackého, Val. Mez.     | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 74  | 68  |
| 16. <i>Bibiána Hroncová</i>       | G Poštová, Košice             | –   | –  | 5 | 7 | – | 3 | 9  | –  | 24 | 85  | 67  |
| 17. <i>Matej Moško</i>            | G Grösslingova, Bratislava    | 3   | 4  | 6 | 7 | 7 | 7 | 1  | –  | 35 | 62  | 59  |
| 18. <i>Kateřina Charvátová</i>    | G B. Němcové, HK              | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 81  | 55  |
| 19. <i>Samuel Amrich</i>          | G Poštová, Košice             | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 57  | 52  |
| 20. <i>Jakub Růžička</i>          | G, Nymburk                    | –   | –  | – | 5 | – | – | –  | –  | 5  | 77  | 47  |
| 21. <i>Tereza Prokopová</i>       | G Jura Hronca, Bratislava     | 3   | 4  | 6 | 7 | 0 | 1 | –  | –  | 21 | 63  | 45  |
| 22. <i>Veronika Vohnůvková</i>    | Nový PORG, Praha              | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 65  | 39  |
| 23. <i>Karel Balej</i>            | G a SOŠ, Rokycany             | 2   | 3  | – | 7 | – | – | –  | –  | 12 | 89  | 33  |
| 24. <i>Mária Poláčková</i>        | G Velká okružná, Žilina       | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 76  | 29  |
| 25. <i>Daniel Staník</i>          | G Uničov                      | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 58  | 25  |
| 26. <i>Daniel Pitoňák</i>         | G a SOŠP, Čáslav              | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 50  | 20  |
| 27. <i>On Tai Wu</i>              | Li Po Chun UWC, Hong Kong     | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 94  | 17  |
| 28.–29. <i>Tereza Pavlišová</i>   | G, Olomouc-Hejčín             | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 73  | 16  |
| 28.–29. <i>Jaromír Šladkovský</i> | PORG, Praha                   | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 67  | 16  |
| 30.–31. <i>Adéla Foglarová</i>    | G, Špitálská, Praha           | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 93  | 14  |
| 30.–31. <i>Jakub Smolka</i>       | Slezské G, Opava              | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 54  | 14  |
| 32.–33. <i>Zuzana Fialková</i>    | Sunny Can. International Sch. | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 67  | 10  |
| 32.–33. <i>Martin Škoudlil</i>    | G T. G. Masaryka, Litvínov    | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 59  | 10  |
| 34.–35. <i>Domínik Beňo</i>       | G L. Svobodu, Humenné         | 3   | 3  | – | – | – | – | –  | –  | 6  | 100 | 9   |
| 34.–35. <i>Jana Pekařová</i>      | G Volgogradská 6a, Ostrava    | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 75  | 9   |
| 36. <i>Richard Veselý</i>         | G, Budějovická, Praha         | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 38  | 5   |
| 37. <i>Michal Jůza</i>            | G, Benešov                    | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 100 | 3   |
| 38. <i>Kristýna Kamenářová</i>    | G, nám. TGM, Zlín             | –   | –  | – | 2 | – | – | –  | –  | 2  | 29  | 2   |
| 39. <i>Jakub Zemek</i>            | G, Uherské Hradiště           | –   | –  | – | – | – | – | –  | –  | –  | 33  | 1   |

## Kategorie čtvrtých ročníků

| jméno                   | škola                         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | P | E  | S  | V         | %          | Σ          |
|-------------------------|-------------------------------|---|---|---|---|----|---|----|----|-----------|------------|------------|
| <i>Student Pilný</i>    | MFF UK                        | 3 | 3 | 5 | 7 | 8  | 9 | 12 | 10 | <b>57</b> | <i>100</i> | <b>286</b> |
| 1. Šimon Pajger         | G Velká okružná, Žilina       | 3 | 3 | 6 | 6 | 8  | 9 | 11 | 8  | <b>54</b> | <i>86</i>  | <b>233</b> |
| 2. Viktor Rosman        | G, Pelhřimov                  | 3 | 4 | 6 | 7 | 10 | 6 | 13 | –  | <b>49</b> | <i>98</i>  | <b>216</b> |
| 3. Tomáš Červeň         | G V. P. Tótha, Martin         | 3 | 3 | 5 | 7 | –  | 7 | 9  | 0  | <b>34</b> | <i>74</i>  | <b>197</b> |
| 4. Katarína Častulíková | 1. súkromné G v Bratislave    | 3 | 3 | – | – | –  | 2 | 7  | –  | <b>15</b> | <i>73</i>  | <b>137</b> |
| 5. Tomáš Dulava         | Matičnická G, Ostrava         | 4 | 4 | 1 | – | 8  | 9 | 4  | –  | <b>30</b> | <i>83</i>  | <b>134</b> |
| 6. David Němec          | G, Tanvald                    | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>71</i>  | <b>109</b> |
| 7. Martin Repčík        | G, Olomouc-Hejčín             | 2 | – | – | – | –  | – | –  | –  | <b>2</b>  | <i>53</i>  | <b>64</b>  |
| 8. Jáchym Bareš         | G, Olomouc-Hejčín             | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>57</i>  | <b>55</b>  |
| 9. Dominik Starý        | G, Benešov                    | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>77</i>  | <b>50</b>  |
| 10. Zuzana RichtEROVÁ   | G, Pelhřimov                  | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>44</i>  | <b>41</b>  |
| 11. Ján Pavlech         | G sv. Jozefa Nové Mesto n. V. | 3 | 3 | – | 3 | –  | – | –  | –  | <b>9</b>  | <i>75</i>  | <b>40</b>  |
| 12. Miroslav Hrabal     | G, Olomouc-Hejčín             | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>67</i>  | <b>33</b>  |
| 13. Jan Kučera          | G, Písek                      | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>86</i>  | <b>31</b>  |
| 14. Soňa BurešOVÁ       | G J. Heyrovského, Praha       | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>105</i> | <b>23</b>  |
| 15. Filip Keller        | G P. de Coubertina, Tábor     | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>65</i>  | <b>20</b>  |
| 16. Ondřej Buček        | G Brno, tř. Kpt. Jaroše       | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>71</i>  | <b>17</b>  |
| 17. Adéla HankOVÁ       | První české G, Karlovy Vary   | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>100</i> | <b>12</b>  |
| 18. Dominick Ivan       | ŠG PinkHarmony, Zvolen        | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>32</i>  | <b>9</b>   |
| 19. Vít Beran           | Masarykovo G, Plzeň           | – | – | – | – | –  | – | –  | –  | –         | <i>70</i>  | <b>7</b>   |


**FYKOS**

UK, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)FYKOS je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.