

Úloha I.5 ... planetární osidlování

7 bodů; průměr 5,16; řešilo 51 studentů

Nejspíše jste již někdy přemýšleli o tom, jestli neexistují nějaké mimozemské civilizace. Zpravidla čím větší hvězda je, tím větší má zářivý výkon a tím kratší má také svůj život. Zaměřme se nyní na to, že máme dvě hvězdy, z nichž jedna má dvojnásobný zářivý výkon co druhá. Pokud je pásmo, ve kterém je možný život, dáno teplotou, na které by se ustálilo dokonale černé těleso, a určitými dvěma teplotami (stejně pro jakoukoliv soustavu), kolem které hvězdy je širší pásmo, ve kterém by mohla být planeta se životem? Kolikrát bude větší oproti druhé hvězdě?

Karel často prokrastinuje na Youtube.

Teplota na planétě závisí od množství prijatej energie z hviezdy. Pre rovnakú planétu nám na udržanie tej istej teploty stačí zabezpečiť, aby malo žiarenie prijímané z hviezdy pri povrchu planéty rovnakú intenzitu F . Z toho, že na sféru s polomerom r (t.j. vzdialenosťou od stredu hviezdy) a teda povrchom $4\pi r^2$ dopadá žiarenie s rovnakou intenzitou F , vyplýva

$$F = \frac{L}{4\pi r^2},$$

kde L je svietivosť izotropne vyžarujúcej hviezdy. Ak porovnáme intenzity žiarenia dvoch hviezd, ktorých svietivosť (resp. žiarivý výkon) je L_1 a $L_2 = 2L_1$, postupne dostávame:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2, \\ \frac{L_1}{4\pi r_1^2} &= \frac{L_2}{4\pi r_2^2}, \\ \frac{L_1}{r_1^2} &= \frac{2L_1}{r_2^2}, \\ r_2^2 &= 2r_1^2, \\ r_2 &= \sqrt{2}r_1. \end{aligned}$$

Miesta, ktoré majú rovnaku teplotu, teda budú pri svietivejšej hviezde $\sqrt{2}$ krát ďalej v porovnaní s menej svietivou hviezdou. Označme r_1^{\min} , r_1^{\max} , r_2^{\min} , r_2^{\max} najmenšie a najväčšie vzdialenosti od hviezd 1 a 2, v ktorých je možný život, a príslušné šírky obývatelných zón Δr_1 , Δr_2 . Potom

$$\Delta r_2 = r_2^{\max} - r_2^{\min} = \sqrt{2}r_1^{\max} - \sqrt{2}r_1^{\min} = \sqrt{2}(r_1^{\max} - r_1^{\min}) = \sqrt{2}\Delta r_1.$$

Vidíme teda, že pri 2krát svietivejšej hviezda bude šírka obývateľnej zóny $\sqrt{2}$ krát väčšia. Problémom však je, že čím je hviezda svietivejšia, tým má kratší život. Preto pri hľadaní vhodných planét treba zvoliť kompromis.

Poznámky k došlým řešením

Mnohí z vás riešili úlohu zbytočne komplikovane a pokúšali sa určiť rovnovážnu teplotu planéty s polomerom R_p vo vzdialenosti r od hviezdy s efektívnou teplotou povrchu T_{eff} a polomerom R_* . Pre svietivosť L hviezdy, ak ju pokladáme za absolútne čierne teleso, platí podľa Stefan-Boltzmannovho zákona

$$L = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4,$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ je Stefan-Boltzmannova konštanta. Planéta bude absorbovať výkon P_{in} , určený súčinom účinného povrchu (prierezu) planéty S , albeda (odrazivosti) α

povrchu planěty (pre absolútne čierne teleso $\alpha = 0$) a intenzity žiarenia F v mieste, kde sa planéta nachádza

$$P_{\text{in}} = (1 - \alpha)FS = (1 - \alpha) \frac{L}{4\pi r^2} \pi R_{\text{p}}^2 = (1 - \alpha) \frac{R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4}{r^2} \pi R_{\text{p}}^2.$$

Planéta vyžaruje ako absolútne čierne teleso z celého svojho povrchu. Ak predpokladáme planétu s rýchlou rotáciou alebo atmosférou, je teplota T_{p} na celom povrchu skoro rovnaká. Vyžarený výkon P_{out} je teda

$$P_{\text{out}} = 4\pi R_{\text{p}}^2 \sigma T_{\text{p}}^4.$$

Pre rovnovážnu teplotu musí byť vyžarovaný výkon rovný výkonu absorbovanému:

$$\begin{aligned} 4\pi R_{\text{p}}^2 \sigma T_{\text{p}}^4 &= (1 - \alpha) \frac{R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4}{r^2} \pi R_{\text{p}}^2, \\ 4T_{\text{p}}^4 &= (1 - \alpha) \frac{R_*^2 T_{\text{eff}}^4}{r^2}, \\ T_{\text{p}} &= T_{\text{eff}} \sqrt{\frac{R_*}{r}} \left(\frac{(1 - \alpha)}{4} \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Pre zaujímavosť dosadíme údaje pre Zem a Slnko:

$$T_{\text{Zem}} = 5700 \text{ K} \sqrt{\frac{(6,96 \cdot 10^6 \text{ m})}{(1,50 \cdot 10^9 \text{ m})}} \left(\frac{(1 - 0,31)}{4} \right)^{1/4} = 255 \text{ K} = -18^\circ \text{C},$$

čo je oveľa menej ako priemerná teplota zemského povrchu 14°C . Tento veľký rozdiel spôsobujú hlavne horúce zemské jadro a skleníkový efekt, vďaka ktorému sa časť vyžarovanej energie absorbuje v atmosfére či odráža späť na zemský povrch. Bez skleníkového efektu by sa Zem stala ľadovou guľou. Pre planétu, ktorá je na strane odvrátenej od Slnka chladná, je rovnovážna teplota na privrátenej strane zasa $\sqrt[4]{2}$ krát väčšia, lebo vyžarovaný výkon je $P_{\text{out}} = 2\pi R_{\text{p}}^2 \sigma T_{\text{p}}^4$.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.