Úloha VI.5 ... skok z letadla

8 bodů; (chybí statistiky)

Filip o hmotnosti $80\,\mathrm{kg}$ *vyskočil z letadla, které je ve výšce* $h_1 = 500\,\mathrm{m}$ *nad zemí. Ve stejném okamžiku z druhého letadla skočila Danka o hmotnosti* $50\,\mathrm{kg}$*, ale z výšky* $h_2 = 569\,\mathrm{m}$ *nad zemí. Předpokládejme, že oba mají stejný odporový koeficient* $C = 1{,}2$*, Filipova plocha příčného průřezu je* $S_\mathrm{F} = 2{,}2\,\mathrm{m}^2$ *a Dančina je* $S_\mathrm{D} = 1{,}5\,\mathrm{m}^2$*. Hustota vzduchu* $\varrho = 1{,}205\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *se nemění s výškou. Za jakou dobu od výskoku bude Danka ve stejné výšce nad zemí jako Filip?*

Danka uvažovala nad náročným životem Matfyzáka, tak se chtěla trochu odreagovat.

Nejdříve předpokládejme, že obě letadla jsou například vrtulníky a v okamžiku skoku stojí ve vzduchu se zanedbatelnou rychlostí vůči okolí. Potom bude na oba skokany působit odporová síla podle Newtonova zákona odporu

$$F_o = \frac{1}{2} C S \varrho v^2\,.$$

Označíme-li si dráhu, kterou urazila Danka (měřeno od letadla, ze kterého vyskočila) jako x_D, její rychlost potom bude $\dot{x}_\mathrm{D}$ (směrem dolů). Pro její zrychlení pak z druhého Newtonova zákona vyplývá

$$m_\mathrm{D} \ddot{x}_\mathrm{D} = F\,,$$

kde F je výslednice sil, které na ni působí. Nyní už jen stačí dosadit $F = F_g - F_o$, kde $F_g = m_\mathrm{D} g$, abychom celkově dostali

$$\ddot{x}_\mathrm{D} = g - \frac{C S_\mathrm{D} \varrho}{2 m_\mathrm{D}} \dot{x}_\mathrm{D}^2\,. \tag{1}$$

Je vidět, že s postupně se zvyšující rychlostí bude klesat zrychlení. Rychlost tak bude postupně konvergovat k jisté terminální rychlosti v_D, pro kterou platí $\ddot{x}_\mathrm{D} = 0$, tedy

$$v_\mathrm{D} = \lim_{t\to\infty} \dot{x}_\mathrm{D}(t) = \sqrt{\frac{2 m_\mathrm{D} g}{C S_\mathrm{D} \varrho}}\,.$$

Číselně pro terminální rychlosti Danky a Filipa dostaneme

$$v_\mathrm{D} \doteq 21{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$
$$v_\mathrm{F} \doteq 22{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Vidíme, že $v_\mathrm{D} < v_\mathrm{F}$. Filip se tak bude v limitním případě $t \to \infty$ pohybovat rychleji než Danka. Vzhledem k tomu, že Filip padá z menší výšky, by se dalo očekávat, že se s Dankou potká přesně ve chvíli jejího dopadu na zem, tedy ve výšce 0.

Zatím si však nemůžeme být jisti tím, co se děje před dosažením terminální rychlosti. Vraťme se tedy k rovnici (1). Dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - v^{-2}\dot{x}^2\right)\,,$$
$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{g\left(1 - v^{-2}\dot{x}^2\right)}\,.$$

Nyní jen stačí na obě strany rovnice dopsat znaménka pro integrály. Při jejich řešení rovnou použijeme substituci

$$y = \frac{\dot{x}}{v} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\dot{x} = v\mathrm{d}y\,,$$

která vede na

$$\int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{g\left(1 - v^{-2}\dot{x}^2\right)} = \frac{v}{g}\int \frac{\mathrm{d}y}{1 - y^2}\,,$$
$$t = \frac{v}{g}\operatorname{argtgh} y + C = \frac{v}{g}\operatorname{argtgh}\left(\frac{\dot{x}}{v}\right) + C\,.$$

Pro $t = 0$ máme $\dot{x} = 0$, z čehož vyplývá C $= 0$. Celkově tak máme

$$\dot{x}(t) = v \operatorname{tgh}\left(\frac{gt}{v}\right)\,. \tag{2}$$

Pro $t \to \infty$ vychází $\dot{x} \to v$, což je očekávaná hodnota. Nyní bychom chtěli ukázat, že pro libovolný čas t platí $\dot{x}_\mathrm{D}(t) < \dot{x}_\mathrm{F}(t)$. Na první pohled však není zřejmé, jak tyto funkce porovnat, takže si pomůžeme jednoduchým trikem. Derivací dostáváme

$$\ddot{x}(t) = g\left(1 - \operatorname{tgh}^2\left(\frac{gt}{v}\right)\right)\,.$$

Jelikož je funkce tgh ryze monotónní na celém $\mathbb{R}$, z nerovnosti $v_\mathrm{D} < v_\mathrm{F}$ nutně plyne $\ddot{x}_\mathrm{D}(t) < \ddot{x}_\mathrm{F}(t)$. Obě rychlosti se navíc v nule rovnají, takže musí platit $v_\mathrm{D}(t) < v_\mathrm{F}(t)$.

Filip s Dankou se tedy potkají přesně ve chvíli, kdy Danka dopadne na zem (Filip už tam bude). V zadání úlohy je otázka, kdy přesně k tomu dojde. Mohli bychom samozřejmě pokračovat další integrací vztahu (2), ukážeme si však jiný postup. Vyjdeme z rovnice (1) a použijeme rovnost

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x} = \dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\,.$$

Dosazením do (1) dostáváme

$$\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x} = g\left(1 - v^{-2}\dot{x}^2\right)\,,$$
$$\mathrm{d}x = \frac{\dot{x}\mathrm{d}\dot{x}}{g\left(1 - v^{-2}\dot{x}^2\right)}\,.$$

Před obě strany rovnice dopíšeme integrály a využijeme faktu, že integrál z derivace funkce, dělené danou funkcí, je logaritmus z dané funkce, tedy

$$\int \mathrm{d}x = \int \frac{\dot{x}\mathrm{d}\dot{x}}{g\left(1 - v^{-2}\dot{x}^2\right)} = -\frac{v^2}{2g}\int \frac{-2v^{-2}\dot{x}\mathrm{d}\dot{x}}{1 - v^{-2}\dot{x}^2} = -\frac{v^2}{2g}\ln\left(1 - v^{-2}\dot{x}^2\right) + C\,.$$

Pro $\dot{x} = 0$ je $x = 0$, takže integrační konstanta je rovna nule. Dosazení za $\dot{x}$ z (2) vede na

$$x = -\frac{v^2}{2g}\ln\left(1 - \operatorname{tgh}^2\left(\frac{gt}{v}\right)\right) = \frac{v^2}{g}\ln\cosh\left(\frac{gt}{v}\right)\,,$$
$$t = \frac{v}{g}\operatorname{argcosh}\exp\left(\frac{gx}{v^2}\right)\,.$$

Při pádu až na zem se celková uražená dráha rovná počáteční výšce, ze které Danka s Filipem vyskočili. Dosazením h_2 za x_D a h_1 za x_F můžeme snadno zjistit, že

$$t_\mathrm{D} \doteq 28{,}3\,\mathrm{s}\,,$$
$$t_\mathrm{F} \doteq 24{,}1\,\mathrm{s}\,.$$

Danka se tak s Filipem potká až na zemi, kam dopadne zhruba 4,2 s po něm.

Dále bychom mohli rozebrat případ, ve kterém mají letadla (a tedy i Danka s Filipem) nějakou nenulovou rychlost. Pokud bude nenulová pouze vertikální složka rychlosti, stačí jen rovnici (2) opravit o integrační konstantu. Pokud by však byla kladná směrem nahoru, museli bychom ji pro první část pohybu (dokud se nezačnou Filip s Dankou pohybovat směrem dolů) znovu odvodit, protože rovnice (1) nebere v úvahu změnu znaménka. Ve výsledku bychom tak místo funkce tgh dostali funkci tg.

Pro jinou počáteční rychlost analytické řešení neexistuje. Pro konkrétní počáteční rychlosti však dokážeme z původní pohybové rovnice snadno spočítat numerické řešení.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`