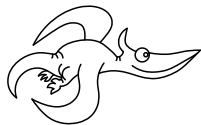


Úvodem

Organizátoři



Zadání IV. série



Termín uploadu: 12. 2. 2019 23.59

Termín odeslání: 11. 2. 2019

Úloha IV.1 ... kostka se vzduchem

3 body

Mějme dutou kostku s hranou délky $a = 20$ cm naplněnou vzduchem s teplotou $t_0 = 20$ °C, což je zároveň teplota okolí kostky. Vzduch uvnitř kostky ochladíme na $t_1 = 5$ °C. Jaká síla bude působit na každou stěnu kostky? Kostka při ochlazení vzduchu v ní nemění svůj objem. Tlak v okolí kostky je $p_0 = 101,3$ kPa.

Úloha IV.2 ... utrhne se

3 body

Máme (nehmotný) provázek délky l a na jeho konci kuličku (hmotný bod) s hmotností m . Víme, že maximální tíha, co unese, je síla $F = mg$, kde g je místní tíhové zrychlení, ale už nic víc. Provázek upevníme a kuličku budeme držet ve stejné výšce jako je místo upevnění, akorát ve vzdálenosti délky provázku, ale tak abychom ho nenapínali. Kuličku uvolníme a ta se začne vlivem tíhového zrychlení pohybovat. Pod jakým úhlem provázku vůči svislé rovině se provázek přetrhne?

Úloha IV.3 ... levitující

6 bodů

Matěj má rád levitující věci, a tak si pořídil nekonečnou nevodivou nabitou vodorovnou rovinu s plošnou nábojovou hustotou σ . Poté nad ní umístil míček o hmotnosti m nabitý nábojem q . Spočítejte, pro jaké hodnoty σ může míček vůbec nad deskou levitovat. V jaké výšce h se pak může vznášet? Uvažujte konstantní tíhové zrychlení g .

Úloha IV.4 ... trampolína

7 bodů

Dva hmotné body skákaly na trampolíně do výšky $h_0 = 2$ m. Ve chvíli, kdy oba byly v nejnižším možném místě trajektorie (výchylka $y = 160$ cm), jeden z nich záhadně zmizel. Do jaké nejvyšší výšky byl druhý vymršťen? Kruhovú trampolína má obvod $o = 10$ m a pruží díky $N = 42$ pružinám s tuhostí $k = 1720$ N·m⁻¹. Trampolínu modelujeme N pružinami rozmístěnými rovnoměrně a spojenými ve středu. Hmotnost zmizelého hmotného bodu je $M = 400$ kg.

Úloha IV.5 ... frisbee

9 bodů

Tenký homogenní disk obíhá na vodorovné podložce po kružnici s poloměrem R . Velikost rychlosti těžiště disku je v . Určete úhel α mezi rovinou disku a svislým směrem. Tření mezi diskem a podložkou je dostatečné. Poloměr disku je řádově menší než R .

Úloha IV.P ... V-1 ve vesmíru

10 bodů

Mezihvězdný prostor není prázdný, nýbrž obsahuje nepatrné množství hmoty. Uvažujte jen vodík, potřebnou hustotu si vyhledejte. Mohla by existovat kosmická loď, jež by „nasávala“ vodík před sebou a využívala energii z něj? Jak rychlá/velká by musela být, aby udržela termojadernou fúzi jen z přijatého vodíku? Jaké jiné překážky realizace je rozumné uvažovat?

Úloha IV.E ... papírová izolační

12 bodů

Změřte, jak moc dokáže papír stínit zvuk. K měření stačí použít např. mobilní telefon jako generátor zvuku a mikrofon v počítači jako detektor (Audacity). Použijte papíry různých druhů a tvarů.

Úloha IV.S ...

10 bodů

V závěre seriálu ste si určite všimli Lagrangian a diferenciálnu rovnicu, ktoré akoby "spadli z neba". To nie je vôbec náhoda, veľkou časťou tejto seriálovej úlohy bude tieto dve rovnice odvodiť.

1. Ukážte, že ak máme pohyb častice v ľubovoľnom centrálnom poli, teda v poli, kde potenciál závisí len na vzdialenosti, bude sa častica zaručene pohybovať len v rovine.
Návod: Zostavte Lagrangeove rovnice II. druhu pre túto situáciu, použite pri tom vhodné zovšeobecnené súradnice. Následne bez ujmy na všeobecnosti položte súradnicu $\vartheta = \pi/2$ a počiatočnú rýchlosť v smere tejto súradnice nulovú. Zamyslite sa a vysvetlite, prečo je takáto voľba v poriadku a nestratíme pri nej žiadne riešenie.
2. Zostavte Lagrangian pre hmotný bod pohybujúci sa v rovine v centrálnom poli. Mali by ste dostať ten istý, ako je uvedený v závěre seriálu. Pre tento Lagrangian následne nájdite všetky intergály pohybu a pomocou nich nájdite diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre premennú r . Pre vašu kontrolu, mala by vám vyjsť rovnako ako na konci seriálu.
3. Zamyslite sa, ako určiť uhlovú vzdialenosť medzi dvoma bodmi na sfére, ak máte zadané ich sférické súradnice. Ukážte to napríklad pre hviezdy Betelgeuze a Síríus, ktorých súradnice si nájdite. Pomôcka: Táto úloha sa dá jednoducho vyriešiť aj bez znalosti sférickej trigonometrie.



Řešení III. série

Úloha III.1 ... zlevněné banány

3 body; (chybí statistiky)

Mikuláš v obchodě vložil několik banánů do igelitového sáčku. Před jejich zvážení ho napadlo, že kdyby pytlík naplnil místo vzduchu heliem, budou banány stát o něco méně. Helium Mikuláš koupil ve slevě za jednu korunu na litr při standardním tlaku. Jaká musí být cena banánů, aby se mu tento „podvod“ vyplatil?

Bonus Naleznete plyn, u kterého se vyplatí plnit jím sáček při ceně banánů 30 korun na kilogram. Nezapomeňte citovat zdroje ceny daného plynu.

Nad čím přemýšlíte vy, když v obchodě vážíte banány?

Keď vrecúško s banánmi naplníme héliom, bude naň pôsobiť vztlaková sila, ktorá je podľa Archimedovho zákona rovná $F_{vz} = \rho V g$, pričom sa počíta s hustotou tekutiny ρ , v ktorej je objekt ponorený, a objemom ponorenej časti objektu V . Zároveň pôsobí tiažová sila na hélium samotné, ktorá ho „ťahá dole“, preto platí

$$\Delta m_B g = (\rho_{vzd} - \rho_{He}) V g,$$

kde Δm_B je zmena váhy banánov, ρ_{vzd} a ρ_{He} sú hustoty vzduchu a hélia a V je objem vo vrecúšku, ktorý sme vyplnili héliom. Tento objem vieme vypočítať ako podiel hmotnosti použitého hélia a hustoty hélia

$$V = \frac{m_{He}}{\rho_{He}},$$

čiže po vykrátení g a dosadení V máme vzťah

$$\Delta m_B = \left(\frac{\rho_{vzd}}{\rho_{He}} - 1 \right) m_{He}.$$

Keďže Mikuláš chce, aby sa mu podvod oplatil, cena použitého hélia musí byť minimálne rovná ušetrenej cene banánov

$$m_{He} C_{He} \leq \Delta m_B C_B,$$

kde C_{He} , C_B sú ceny za kilogram hélia, resp. banánov. Po dosadení za Δm_B dostávame vzťah pre cenu banánov

$$C_B \geq \frac{C_{He}}{\frac{\rho_{vzd}}{\rho_{He}} - 1}.$$

Cenu hélia v jednotkách CZK·kg⁻¹ vypočítame z hustoty hélia a zadanej ceny hélia c_{He} v jednotkách CZK·l⁻¹ ako

$$C_{He} = \frac{c_{He}}{\rho_{He}}.$$

Dosadíme do finálneho vzťahu pre cenu banánov a dostaneme

$$C_B \geq \frac{c_{He}}{\rho_{vzd} - \rho_{He}} = 900 \text{ CZK}.$$

Hraničná cena banánov, pri ktorej sa Mikulášovi tento podvod vyplatí je $900 \text{ CZK} \cdot \text{kg}^{-1}$. Táto hranica je nezávislá na množstve použitého hélia, čiže ak by sme použili viac hélia ako máme, vrecúško by sa začalo vznášať. Zbytočne by sme mrhali héliom a pani predavačke by sa to mohlo zdať podozrivé.

Bonus

Z predchádzajúcich výpočtov vieme, že musí platiť

$$\frac{C_B}{C_P} \left(\frac{\rho_{\text{vzd}}}{\rho_P} - 1 \right) \geq 1,$$

pričom C_P je cena plynu za kilogram a ρ_P je hustota plynu. Potrebujeme nájsť taký plyn, pre ktorý sa podvod oplatí pri cene banánov $30 \text{ CZK} \cdot \text{kg}^{-1}$. Nájdeme si ceny¹ a hustoty² rôznych technických plynov a zistíme, či je niektorý z nich vyhovujúci. Samozrejme, zaujímajú nás len plyny s nižšou hustotou ako vzduch $\rho_{\text{vzd}} = 1,2759 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, ktoré sú bezpečné na použitie v danej situácii. Získané údaje, z ktorých sme prepočítali cenu na jeden kilogram v $\text{CZK} \cdot \text{kg}^{-1}$ a potom dosadili do vyššie uvedených vzťahov, umiestnime do prehľadnej tabuľky 1.

Tab. 1: Tabuľka plynov

| plyn | $\frac{\rho_P}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}$ | $\frac{C_P}{\text{CZK} \cdot \text{kg}^{-1}}$ | $\frac{C_B}{C_P} \left(\frac{\rho_{\text{vzd}}}{\rho_P} - 1 \right)$ |
|------------|--|---|---|
| vodík | 0,088 95 | 6 428 | 0,06 |
| hélium | 0,1762 | 5100 | 0,04 |
| zemný plyn | 0,7 | 8 | 3,2 |
| acetylén | 1,147 | 560 | 0,006 |
| dusík | 1,234 | 334 | 0,003 |

Plyn, pri ktorom sa to oplatí, je – podľa nami nájdených údajov o cenách plynov – zemný plyn, hlavne kvôli jeho nízkej cene.

Katarína Častulíková

katka.castulikova@fykos.cz

Úloha III.2 ... efektivní kafe

3 body; (chybí statistiky)

Jsou dvě hodiny v noci a Jáchym si jde uvařit kafe. Na plotýnku, kterou tvoří litinový válec o poloměru r a výšce h , položí konvici s tepelnou kapacitou C_k . Konvice obsahuje vodu o objemu V , která má počáteční teplotu T_v . Zbytek soustavy má počáteční teplotu T_s . Jaká je celková účinnost (tj. poměr energie přijaté vodou ku dodané energii) ohřevu vody z její počáteční teploty na teplotu $T = 100^\circ\text{C}$? Neznámé hodnoty si dohleďte v tabulkách, nebo je odhadněte. Předpokládejte, že děj proběhne tak rychle, že všechny tepelné ztráty můžeme zanedbat. Pro úplnost zadání necht $T_s, T_v < T$

Jáchymovi došel energy drink.

¹Ceny plynů převzaty z <https://www.kurzy.cz/plyn/srovnani-cen> a <https://www.messer.sk/cennik>

²Hustoty převzaty z <http://www.converter.cz/tabulky/hustota-plynu.htm>

Nechť je hustota litiny ρ_l , její měrná tepelná kapacita je c_l . Celková kapacita soustavy tak je

$$C_s = C_k + \pi r^2 h \rho_l c_l.$$

Při ohřívání vody musíme nutně ohřát i plotýnku s konvicí, k čemuž jim musíme dodat teplo

$$Q_s = C_s (T - T_s) = (C_k + \pi r^2 h \rho_l c_l) (T - T_s).$$

Obdobně pro vodu máme ρ_v a c_v a musíme jí dodat teplo

$$Q_v = V \rho_v c_v (T - T_v).$$

Účinností rozumíme poměr energie, která se využije na ohřev vody, a celkové dodané energie, tedy

$$\eta = \frac{Q_v}{Q_v + Q_s} = \frac{V \rho_v c_v (T - T_v)}{V \rho_v c_v (T - T_v) + (C_k + \pi r^2 h \rho_l c_l) (T - T_s)}.$$

Nyní už jen zbývá dosadit realistické hodnoty. Naše plotýnka má poloměr $r = 10$ cm a výšku $h = 2$ cm. Konvice váží 500 g a je z oceli, její tepelná kapacita tedy je $C_k = 230 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$. Na kafe potřebujeme $V = 250$ ml vody. Můžeme předpokládat, že začátku má vše včetně vody teplotu $T_v = T_s = 20^\circ\text{C}$. Měrnou tepelnou kapacitu vody $c_v = 4180 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ a litiny $c_l = 545 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$, stejně tak jejich hustoty $\rho_v = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a $\rho_l = 7200 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ jsme našli v tabulkách.

Dosazením hodnot do vzorce výše dostáváme odhad pro účinnost ohřevu vody $\eta \doteq 0,28$. Tato nadočekávaná vysoká hodnota je způsobena velkou tepelnou kapacitou vody v porovnání s kovy.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha III.3 ... teplíčko v Dysonově sféře

6 bodů; (chybí statistiky)

Jaký poloměr by musela mít Dysonova sféra, aby obklopila hvězdu se zářivým výkonem Slunce tak, že na vnějším povrchu této sféry by byla teplota $t = 25^\circ\text{C}$? Neuvažujte přítomnost atmosféry v Dysonově sféře. Dysonova sféra by měla být relativně tenká dutá struktura kulového tvaru obklopující danou hvězdu.

Karel má rád Dysonovy sféry.

Ze zadání plyne, že teplota Dysonovy sféry se ustálila na konstantní teplotě $t = 25^\circ\text{C}$. K vyřešení úlohy nám tedy stačí analyzovat tok energie Dysonovou sférou. Předpokládáme, že Dysonova sféra je schopná pohltit veškerou energii přicházející ze Slunce. Tato energie je přenášena v podobě elektromagnetického záření. Ze zadání víme, že daná hvězda má zářivý výkon Slunce $L = 3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$ ³. Tento výkon je rovnoměrně vyzářen do všech směrů. Množství energie, které dopadne za jednotku času na jednotkovou plochu Dysonovy sféry je

$$\frac{L}{S} = \frac{L}{4\pi r^2},$$

kde S je plocha Dysonovy sféry a r je její poloměr. Rozdíl vnitřního a vnějšího poloměru zanedbáváme. Dysonova sféra se navenek jeví jako absolutně černé těleso, protože veškerou energii z hvězdy pohltí a navenek vyzařuje pouze tepelné záření. Podle Stefanova-Boltzmannova

³Viz např. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>.

zákona je celková intenzita M tepelného záření černého tělesa, což je celková energie vyzářená za jednotku času jednotkovou plochou zdroje záření, rovna

$$M = \sigma T^4,$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a $T = 298 \text{ K}$ je termodynamická teplota Dysonovy sféry.

Zářivý výkon hvězdy a výkon tepelného záření Dysonovy sféry jsou jediné zdroje záření, které musíme započítat. Přestože princip fungování Dysonovy sféry je schován v pomyslné černé skřínce, stačí nám vědět, že Dysonova sféra je schopna pohltit *veškerou* energii ze Slunce. Na druhou stranu, aby byl náš výpočet korektní, musí tepelné záření vnější plochy Dysonovy sféry navždy opustit tuto soustavu, což jsme mlčky předpokládali. Náš předpoklad byl v pořádku, neboť koule je konvexní těleso a energie vyzářovaná malou ploškou ΔS na jejím povrchu, sféře, uniká do prázdného poloprostoru. To nám zaručuje, že Dysonova sféra neozařuje sama sebe vnějším povrchem.

Nyní konečně dejme do rovnosti energií z hvězdy, která dopadne za jednotku času na jednotkovou plochu Dysonovy sféry, a intenzitu M tepelného záření Dysonovy sféry,

$$\frac{L}{4\pi r^2} = \sigma T^4.$$

Odtud získáme hledaný poloměr r Dysonovy sféry,

$$r = \frac{1}{2T^2} \sqrt{\frac{L}{\pi\sigma}}.$$

Po číselném dosazení dostáváme, že hledaný poloměr Dysonovy sféry pro zadané podmínky je $r = 2,61 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,74 \text{ AU}$.

Václav Mikeska

v.mikeska@fykos.cz

Úloha III.4 ... destrukce smyčky

8 bodů; (chybí statistiky)

Představme si měděnou smyčku o poloměru r , která je určena rovinou, na níž je kolmé magnetické pole s magnetickou indukcí B . Maximální povolené tahové napětí ve smyčce je σ_p . Nyní začneme měnit magnetický tok ve smyčce z původní hodnoty Φ_0 podle vztahu $\Phi(t) = \Phi_0 + \alpha t$, kde α je kladná konstanta. Určete, za jak dlouho dosáhneme ve smyčce maximálního tahového napětí.

Nápověda: Napětovou sílu ve smyčce můžeme spočítat jako $T = |BIr|$.

Vítek vzpomíná na AP Physics.

Zamysleme se nad tím, co se v úloze děje. V okamžiku, kdy začneme měnit magnetický tok procházející smyčkou, se v ní začne indukovat napětí a tedy i proud. Tuto skutečnost nám popisuje Lenzův zákon, který říká, že indukovaný elektrický proud v uzavřeném obvodu má takový směr, že svým magnetickým polem působí proti změně magnetického indukčního toku, která je jeho příčinou. Systém se snaží jakoby vrátit do původního stavu, a proto má Lenzovská indukce směr opačný původnímu B . Řečí matematiky

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\alpha.$$

Indukovaný proud ve smyčce pak určíme snadno pomocí Ohmova zákona. Označíme-li odpor smyčky jako R , pak

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\alpha A}{\varrho 2\pi r},$$

kde A je průřez smyčky a ϱ rezistivita materiálu. Je zřejmé, že T závisí na B , a to závisí na čase. Pro moment t_0 , kdy dosáhneme maximálního tahového napětí, musí platit následující podmínka

$$\sigma_p = \frac{T(t_0)}{A} = \frac{B(t_0)Ir}{A} = \frac{B(t_0)\alpha}{2\varrho\pi}.$$

Dále musíme určit $B(t_0)$, z definice⁴ získáme

$$B(t_0) = \frac{\Phi(t_0)}{\pi r^2} = \frac{\Phi_0 + \alpha t_0}{\pi r^2}.$$

Nyní stačí dosadit za $B(t_0)$ do vztahu pro tahové napětí, to pak přejde na

$$\sigma_p = \frac{(\Phi_0 + \alpha t_0)\alpha}{2\varrho\pi^2 r^2}.$$

Cílem úlohy bylo zjistit, za jaký čas se toto stane. Proto ze vztahu výše vyjádříme t_0 , finální výraz pak je

$$t_0 = \frac{2\pi^2 \varrho r^2 \sigma_p}{\alpha^2} - \frac{\Phi_0}{\alpha}.$$

V řešení jsme mlčky zanedbali vlastní magnetické pole indukovaného proudu. Z průřezu A bychom si mohli dopočítat vlastní poloměr vodiče a odhadnout velikost intenzity vlastního magnetického pole, nicméně typická smyčka má vlastní poloměr mnohem menší než poloměr R a tudíž můžeme tuto skutečnost zanedbat. Při řešení jsme taktéž zanedbali vlastní změnu rozměrů smyčky.

Pro zájemce

Tyto řádky jsou věnované řešitelům, kteří by rádi věděli, jak si odvodit nápovědu v zadání. Jak již víme z textu výše, v uzavřené smyčce se začne indukovat proud. Proto začne na vodiči působit síla ve směru mimo smyčku (viz. obrázek) podle Ampérova zákona síla dána jako

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B},$$

kde $d\mathbf{l}$ je malý element smyčky. Ten si můžeme vyjádřit pomocí malého úseku $d\Theta$ jako $rd\Theta$. Protože jsou na sebe vektory v rovnici kolmé, tak se vztah zjednoduší na

$$dF = IBrd\Theta.$$

Z obrázku nyní můžeme vyjádřit tahovou sílu ve smyčce v závislosti na malém úhlu $d\Theta$. Horizontální složky se vyruší (jsou rovny $T \cos d\Theta/2$) a výsledná síla dovnitř smyčky (působící proti dF) je dána součtem dvou vertikálních složek, získáme tedy

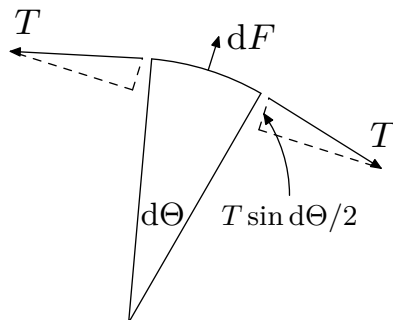
$$dT = 2T \sin \frac{d\Theta}{2} \approx Td\Theta,$$

⁴Magnetický indukční tok vytvářený magnetickou indukcí \mathbf{B} na libovolně orientované ploše S je definován jako $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. Pro homogenní pole a rovinou plochu platí $\Phi = BS \cos \alpha$ (úhel α svírá normálový vektor plochy s vektorem magnetické indukce). V našem případě jsou na sebe vektory kolmé.

kde jsme použili aproximaci pro malé hodnoty argumentu funkce sinus. Z podmínky rovnováhy pak máme

$$IBrd\Theta = Td\Theta \quad \Rightarrow \quad T = IBr.$$

A máme dokázáno. Tento princip je ve fyzice velmi častý a doporučuji ho řádně prostudovat.⁵



Obr. 1: Obrázek k nápovědě

Vít Beran

vit.beran@fykos.cz

Úloha III.5 ... bodová

8 bodů; (chybí statistiky)

Uvažujme hmotný bod umístěný v jednodimenzionálním prostoru. Jeho počáteční pozice i rychlost je nulová. Bod se dokáže pohybovat s libovolným zrychlením z intervalu $[-a, a]$. Nazvěme $M(t)$ množinu všech možných stavů (x, v) takových, že bod se v čase t může nacházet na pozici x s rychlostí v . Sestrojme graf závislosti v na x v čase t . Množina $M(t)$ v tomto grafu vytvoří plochu $S(t)$. Analyticky popište křivky ohraničující $S(t)$.

Bonus Najděte funkční závislost obsahu $S(t)$.

Jáchym chtěl jistou triviální úlohu řešit jako speciální případ této.

Nejdříve podotkneme, že pokud je možné nějakého bodu (x, v) dosáhnout v čase t , zřejmě je možné ho dosáhnout i v jakémkoli větším čase tím, že se před začátkem pohybu budeme odpovídající časový rozdíl pohybovat s nulovým zrychlením. Z toho vyplývá, že množina M se v čase pouze zvětšuje.

Zvolme nějaký konkrétní čas t . Nyní si představme, že se po celou dobu od počátku do času t pohybujeme pouze se zrychlením a . Není těžké spočítat, že dosáhneme rychlosti $v_{\max} = at$ a polohy

$$x_{\max} = \frac{1}{2}at^2.$$

Toto je zřejmě největší rychlost a zároveň největší vzdálenost, které můžeme v daném čase dosáhnout, takže musí být součástí okraje množiny. Obráceně, nejdále v záporném směru se můžeme dostat do bodu ve vzdálenosti $x_{\min} = -x_{\max}$ s rychlostí $v_{\min} = -v_{\max}$.

⁵Dalším typickým příkladem na něj je např. capstan equation.

Dále zkusme najít, jakou největší rychlost můžeme mít na souřadnici x . Pro každý bod od x_{\min} do x_{\max} tak najdeme horní hranici množiny pro rychlost bodu. Situace je zřejmě symetrická vůči současné změně znaménka u rychlosti a polohy, takže dolní hranici rychlosti najdeme pouhým bodovým zrcadlením výsledku vzhledem k počátku.

Abychom při pohybu z klidu dosáhli nějaké rychlosti, musíme zrychlovat a při tom nutně urazíme nějakou vzdálenost. Můžeme si rozmyslet, že pokud bychom se pohybovali s menším než maximálním zrychlením, jakékoli rychlosti bychom dosáhli na větší vzdálenosti než v případě pohybu s maximálním zrychlením. Jinak řečeno, chceme-li na co nejkratší vzdálenosti dosáhnout co největší rychlosti, musíme se pohybovat s maximálním zrychlením.

Snadno spočítáme, že pro zrychlení z nuly na v musíme urazit vzdálenost

$$\Delta x = \frac{v^2}{2a}.$$

Jakou maximální rychlost tak můžeme mít například v počátku, tedy v bodě $x = 0$? Jednoduše musíme nejdříve zrychlovat na opačnou stranu, čímž se dostaneme do záporných hodnot osy x . Potom můžeme začít zrychlovat v kladném směru, čímž se postupně vrátíme zpět do počátku, tentokrát už s kladnou rychlostí v .

Nyní zase vyvstává otázka, jak se v co nejkratším čase dostat co nejdále od počátku, abychom se pak mohli vrátit s co největší rychlostí? Odpověď je stejně prostá, jako celý zbytek úlohy – pohybem nejdříve s maximálním záporným zrychlením a hned poté s maximálním kladným zrychlením.

Pojďme konečně úvahy výše přepsat do rovnic. Pro daný čas t si zvolíme bod x a maximální rychlost, kterou v něm můžeme mít, označíme v . Po čas t_1 budeme mít zrychlení $-a$ a po další čas t_1 zrychlení a . Tím dosáhneme bodu $(y, 0)$. Odtud se budeme pohybovat se zrychlením a po dobu t_2 a konečně dorazíme do bodu (x, v) . Dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}at_1^2 + \left(-at_1^2 + \frac{1}{2}at_1^2\right) = -at_1^2, \\ x - y &= \frac{1}{2}at_2^2, \\ v &= at_2, \\ t &= 2t_1 + t_2. \end{aligned}$$

Známe a , t a x , neznáme v , t_1 , t_2 a y . Čtyři rovnice pro čtyři neznáme jsou přesně tolik co potřebujeme, abychom si z nich vyjádřili v . Nicméně zjistíme, že se neobejdeme bez odmocnin. Nám ale stačí najít vztah pro hraniční body v čase t , teda zbavit sa pomocných neznámých t_1 , t_2 a y . Dostat můžeme například rovnici

$$x = \frac{1}{4a} (v^2 + 2vat - a^2t^2).$$

Což je samozřejmě parabola. Její osa je rovnoběžná s osou x , kterou parabola protíná v bodě $(x_1, 0)$, kde

$$x_1 = -\frac{1}{4}at^2,$$

což je nejbodnější bod v záporném směru, kam se můžeme dostat s nulovou konečnou rychlostí. Odtud vede hranice až do bodu (x_{\max}, v_{\max}) , který jsme určili dříve. Parabola samozřejmě

pokračuje i dál, tam však nemá fyzikální smysl (příslušný čas t_1 by vyšel záporný). Nicméně stále ještě jsme nenalezli druhou hranici množiny od bodu (x_{\max}, v_{\max}) zpět na osu x .

Pokud se budeme pohybovat polovinu času t se zrychlením a a druhou polovinu se zrychlením $-a$, skončíme opět na ose x , tedy s nulovou rychlostí, na souřadnici

$$x_2 = \frac{1}{2}a \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}at^2 - \frac{1}{2}a \left(\frac{t}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}at^2.$$

Bod $(x_2, 0)$ tak zřejmě představuje největší vzdálenost, kam se můžeme od počátku na ose x dostat. Hranice množiny musí vést z bodu (x_{\max}, v_{\max}) do bodu $(x_2, 0)$.

Nyní stojíme před podobným problémem jako v první části řešení – snažíme se najít nejmenší rychlost, kterou můžeme mít pro dané x mezi x_2 a x_{\max} . Jednodušší však bude opačný postup – zkusme pro danou rychlost mezi 0 a v_{\max} najít největší x , do kterého se můžeme v čase t dostat.

Jistě je pravda, že maximálního x dosáhneme tehdy, pokud se v každém bodě trajektorie budeme pohybovat s největší rychlostí, s jakou to bude právě možné. Začneme tedy zrychlovat se zrychlením a , a to až do času τ . V čase τ naopak začneme brzdit se zrychlením $-a$, takže v čase t budeme mít rychlost v . První část dráhy se pohybujeme s maximálním zrychlením a tedy i maximální možnou rychlostí. Naopak ve druhé části brzdíme nejvíce jak to jde, a tedy kdybychom měli ještě o něco větší rychlost, už bychom to do času t nedokázali ubrzdit na rychlost v .

Jednoduchou úvahou jsme ukázali, že tento způsob pohybu nám pro danou koncovou rychlost v zajistí největší možnou uraženou vzdálenost. Opět dostáváme sadu rovnic

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a\tau^2 + \left(a\tau(t-\tau) - \frac{1}{2}a(t-\tau)^2\right), \\ v &= a\tau - a(t-\tau) = a(2\tau - t). \end{aligned}$$

Nyní máme jen dvě neznámé, a sice x a τ . Můžeme si tak vyjádřit

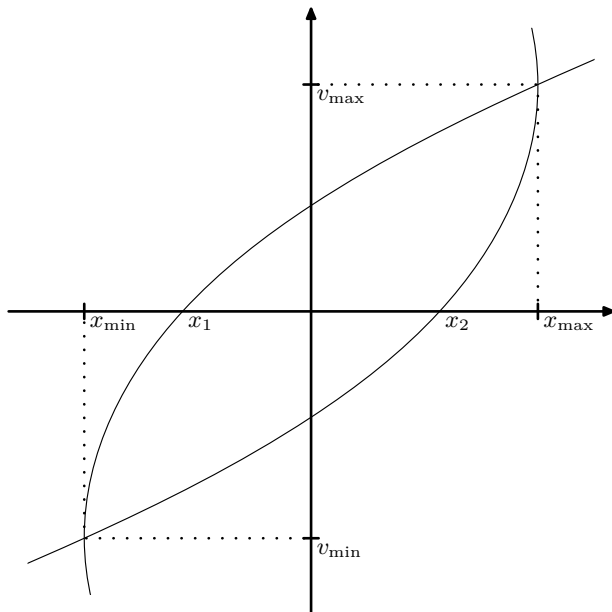
$$x = \frac{1}{4a} (a^2t^2 + 2vat - v^2).$$

Pokud nám tento výsledek přijde povědomý, tak zcela oprávněně. Jedná se o parabolu, která nám vyšla již v první části, bodově převrácenou podle počátku. Jak jsme zmínili výše, ze symetrie situace vyplývá, že tato parabola tvoří dolní hranici množiny od bodu x_{\min} do bodu x_2 , zatímco první parabola vytváří dolní hranici od bodu x_{\min} do bodu x_1 .

Abychom shrnuli předchozí úvahy, množina všech bodů, ve kterých se můžeme v čase t nacházet, je ohraničená dvěma parabolami, bodově symetrickými vůči počátku. Jejich analytický předpis je

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4a} (v^2 + 2vat - a^2t^2), \\ x &= \frac{1}{4a} (a^2t^2 + 2vat - v^2). \end{aligned}$$

Pro úplnost dodejme, že pro každý bod uvnitř ohraničeného prostoru můžeme najít takový čas τ , že $\tau < t$ a zároveň daný bod leží na jedné z hraničních parabol pro čas τ . To je podle vůbec první poznámky tohoto řešení důkazem, že celá plocha nemá žádné vnitřní hranice kolem oblastí, které by do hledané množiny nepatřily, ale zároveň by byly uvnitř vnějších hranic.

Obr. 2: Hranice výsledné množiny M v nějakém čase t .**Bonus**

Pokud jste to dočetli až sem, tak jistě tušíte, že bonus je již jen triviální záležitostí. Stačí vhodně zvolit podle čeho integrovat, abychom si zbytečně nepřidělávali práci. Definujme první parabolu jako $x = f_1(v)$ a druhou jako $x = f_2(v)$. Potom pro obsah plochy S zřejmě platí

$$S = 2 \int_0^{v_{\max}} (f_2(v) - f_1(v)) dv = \frac{1}{a} \int_0^{v_{\max}} (a^2 t^2 - v^2) dv = \frac{1}{a} \left[a^2 t^2 v - \frac{v^3}{3} \right]_0^{v_{\max}} = \frac{2}{3} a^2 t^3.$$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha III.P ... osobní powerbanka

10 bodů; (chybí statistiky)

Poslední procenta baterky v mobilu dochází, powerbanku máte vybitou nebo jste si ji pro jistotu nechali doma a 230 také není nikde v dohledu. Nebylo by skvělé mít neustále při sobě vlastní zdroj elektrické energie?

- Navrhněte několik různých zařízení, která by dokázala vyrábět elektrickou energii pouze ze zdrojů vašeho těla.
- Diskutujte jejich maximální výkon a účinnost. Co všechno byste s jejich pomocí dokázali zásobovat elektrinou?
- Diskutujte jejich dopad na vaše zdraví a fyzickou kondici. Které orgány by vám v důsledku jejich přetěžování selhaly nejdříve?

Jako jedno z možných zařízení uvažujte soustavu drobných turbín umístěných v krevním řečišti. Všechny argumenty podpořte co nejpřesnějšími výpočty.

Jáchym měl pocit, že mu chybí nějaká energie.

Lidské tělo získává energii z přeměny chemických látek v potravinách na jiné. Tuto energii opět uchovává ve formě chemických vazeb. Největší část energie (kolem 80 %) se nakonec přemění na teplo a zbytek se spotřebuje při vypařování vody.⁶ Stálo by za to toto teplo využít a přeměnit ho na elektrickou energii. Dále se nabízí použít vhodně umístěné turbínky (například v krevním řečišti, nebo v dýchací trubici). Energií můžeme získat i spálením methanu a vodíku, produkovaných ve střevech. Jednu metodu již dlouhou dobu využíváme a tou je mechanická energie, neboli práce svalů – určitě jste si již někdy točili klikou nabíjejíci svítilnu. Některé z těchto nápadů si detailněji rozebereme.

Nejdříve se podívejme na některá zařízení, která bychom chtěli napájet. Pro výpočet energie uložené v akumulátoru mobilního telefonu zvolme kapacitu $K = 2 \text{ Ah}$ a napětí $U = 4,5 \text{ V}$. Potom pro uloženou energii platí $E = KU = 32,4 \text{ kJ}$. Kapacity baterií chytrých hodinek se pohybují kolem $K = 300 \text{ mAh}$ s napětím $3,8 \text{ V}$, takže uchovávají energii $E = 4,1 \text{ kJ}$. Nakonec se podívejme na velmi praktický přístroj, který se již vědci snaží napájet lidským tělem – kardiostimulátor, jehož průměrný příkon je $30 \mu\text{W}$.⁷

Turbínka v krevním řečišti

Abychom mohli získávat energii z krevního oběhu, potřebujeme do něj nainstalovat nějaký systém turbín. Z praxe víme, že s rozměry turbíny roste i její účinnost. Proto zvolme co nejméně turbín hned vedle srdce, kde jsou tepny a žíly nejširší. Otázkou je z jaké strany. Jestli do místa, kde krev ze srdce proudí (aorta a výstup plicního oběhu), či naopak tam, odkud krev proudí do srdce (horní a dolní dutá žíla, vstup plicního oběhu). K této otázce se vrátíme později.

Práce W , potřebná na protlačení objemu V , je součinem síly a dráhy, na které daná síla působí. Je-li na počátku této dráhy tlak v kapalině p_1 a na konci tlak p_2 , výsledná síla bude

$$F = S(p_1 - p_2) ,$$

kde S je obsah plochy průřezu trubice. Proudí-li kapalina rychlostí v , pro výkon bude platit

$$P = Fv = Q(p_1 - p_2) ,$$

kde Q je objemový průtok kapaliny v trubici. U zdravého člověka zhruba odpovídá hodnotě⁸ $Q = 0,071 \cdot \text{tep}^{-1} = 0,0841 \cdot \text{s}^{-1}$.

Tlak na začátku turbíny p_1 bude přibližně roven diastolickému tlaku, který pro zdravého člověka uvažujeme 90 mmHg . Pokud budeme tok krve takto brzdit, bude se srdce pravděpodobně snažit tuto ztrátu dohnat tím, že zvýší svůj výkon. Problémem je, že tato změna je velmi individuální (v závislosti na zdraví daného člověka) a nelze ji příliš dobře předpovídat. Navíc by tím docházelo k nadměrnému zatěžování srdce. Pokud bychom však počítali pouze malé rozdíly tlaků (při malém odporu turbínky), mohli bychom tuto skutečnost zanedbat. Pro větší rozdíly však můžeme vždy udělat dolní odhad předpokladem $p_1 = \text{konst}$. Tlak p_2 umíme nastavit změnou odporu turbínky. Hledáme tedy co nejmenší diastolický tlak, kdy ještě nedochází k žádným dalším zdravotním potížím.

⁶<https://opentextbc.ca/anatomyandphysiology/chapter/24-6-energy-and-heat-balance/>

⁷https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-50209-5_11

⁸<https://hypertextbook.com/facts/2001/VitaliyShchupak.shtml>

Takto způsobená porucha se odborně nazývá "Isolated diastolic hypotension"⁹ a nastává při poklesu tlaku pod 60 mmHg, kdy člověk začne pocítovat únavu a může mít závratě. Ty jsou způsobeny špatným prokrvením mozku, čemuž lze předejít tím, že dáme turbínku na místa vtoku krve do srdce. Jediné nebezpečí tedy spočívá v nadměrném zatěžování srdce a v problémech s tím spojených, jako je například zvýšené opotřebovávání srdce. Ty se u lidí postižených touto vadou projevují až ve vyšším věku.

Jaká bude účinnost takové turbíny? Námi uvažované žíly mají průměr kolem 1 až 2 cm, což jsou pro výrobu přijatelné rozměry. Účinnost však při takových rozměrech bude hrál velkou roli, jelikož s klesajícími rozměry a výkonem výrazně klesá. Pozorováním závislosti účinnosti malých turbín na jejím výkonu¹⁰ můžeme optimisticky odhadnout účinnost vodní turbíny daných rozměrů na 10 %. Jelikož má krev přibližně stejnou hustotu jako voda (1060 kg·m⁻³), nemusíme tento odhad z důvodu použití jiné kapaliny měnit.

Dosažením hodnot do vztahu výše dostáváme

$$P = \eta Q (p_{90} - p_{60}) = 0,02 \text{ W}.$$

Námi stanovenou baterii bychom tímto způsobem nabili za 1620 hodin.

Pokud bychom postupně zvyšovali odpor turbíny (třeba v rámci měsíců až let), mohlo by si srdce na vyšší potřebný tlak zvyknout a posílit se. Každopádně by tak docházelo k jeho rychlejšímu opotřebení.

Některá zdravotní rizika již byla zmíněna. co jsme však doposud nezmiňovali je problém s nízkou účinností turbíny. Zbýlých 90 % (účinnosti jsme uvažovali jako 10 %) se totiž ve výsledku přemění na teplo. Toto teplo je však velmi rychle odváděno krví a pokud by nevznikalo těsně u stěn žil, které by mohlo poškozovat, nemělo by být nebezpečné. V poslední řadě je třeba zmínit možnou poruchu turbín, při které by mohlo dojít k ucpaní žil a následné vysoce pravděpodobné smrti. Dalším velmi vysokým rizikem je vznik trombu kvůli turbulencím, jež vedou ke krevním sraženinám a následné srdeční zástavě. V praxi bylo dosaženo 800 μW elektřiny pomocí podobného konceptu¹¹, což je řádově menší hodnota než námi vypočítaná. To může být způsobeno špatným odhadem účinnosti, nebo tím, že jsme výkon turbíny tlačili až na samotnou hranici dlouhodobé přežitelnosti člověka. Tu však lze redukovat snížením odporu turbíny, čímž nastavíme nižší tlak, který pro srdce nebude přílišnou zátěží.

Mnohem slibnější koncept, než turbíny využívá nanotrubiček¹² a v budoucnu by jím bylo možné napájet různé senzory uvnitř krevního řečiště, například pro diabetiky nebo nanoboty.

Síla fuku

Na podobném konceptu by mohla fungovat turbínka umístěná v hrtanu, kde však neproudí krev, ale vzduch. Potom můžeme použít výše zmíněný vzorec, upravený pro danou situaci. Tedy výkon foukací turbíny bude

$$P = \eta Q (p_{\text{fuk}} - p_{\text{atm}}).$$

⁹<https://www.uab.edu/mix/stories/diastolic-blood-pressure-how-low-is-too-low>

¹⁰https://ac.els-cdn.com/S187661021735124X/1-s2.0-S187661021735124X-main.pdf?_tid=b471dfa5-178d-4e57-92ee-a334313ce1c4&acdnat=1534083170_d5a9d5ddb0cd4230c8e48af14375ae92

¹¹<http://blogs.discovermagazine.com/80beats/2011/05/17/tiny-turbine-inside-arteries-could-power-pacemakers>

¹²<https://newsroom.wiley.com/press-release/angewandte-chemie-international-edition/how-draw-electricity-bloodstream-one-dimension>

Účinnost turbíny η bude snížena díky tomu, že jí proudí vzduch místo krve. Na druhou stranu bude zvýšena tím, že bude moct být větší. Vzhledem k tomu, jak hrubé odhady zde dělám, můžeme jí považovat za stejnou jako v případě krve. Objem vydechaného vzduchu a příslušný čas, který výdech trvá, lze snadno dohledat.¹³ Pro normální nádechy můžeme odhadnout $V = 0,5\text{ l}$. Jelikož se nadechujeme přibližně šestnáctkrát za minutu, turbínkou protéká $Q = 0,13\text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ vzduchu. Při dýchání naše plíce obvykle vytvářejí přetlak 2 – 3 kPa vůči okolnímu prostředí. Maximální dosažitelný přetlak je přibližně¹⁴ 15 kPa. Odhadněme, že přetlak 3 kPa oproti standardním 2 – 3 kPa by nebylo příliš obtížné na udýchání. Pak dostáváme výkon $P = 40\text{ mW}$. Pro maximální použitelný přetlak 12 kPa (tedy navíc oproti normálnímu přetlaku, nutnému k dýchání), máme $P = 160\text{ mW}$. Pomocí systému potrubí a klapky bychom mohli dosáhnout toho, že by vzduch turbínou proudil stále stejným směrem. Tím bychom docílili dvakrát většího výkonu.

Pro nižší přetlak uveďme pro srovnání, že nabití mobilního telefonu by trvalo téměř 230 h, chytré hodinky bychom nabili za 30 h. Spotřebu kardiostimulátoru pokrýváme přibližně tisíckrát.

Odpadní teplo

Teplo jež vyzařují naše těla má z velké části formu infračerveného záření. Pro generování elektrické energie uvnitř fotovoltaických článků je však nutné dosáhnout určité minimální energie dopadajícího záření. Typická solární křemíková buňka vyžaduje alespoň 1,1 eV, takže funkčnost je shora omezena vlnovou délkou dopadajícího záření přibližně 1200 nm.¹⁵ Zdola je pak omezena¹⁶ hodnotou 300 nm, viz graf 3.

Uvažujme absolutně černého člověka, jehož teplota je 37 °C. Celková intenzita záření bude

$$I = \int_{300\text{ nm}}^{1200\text{ nm}} dI(\lambda),$$

kde $dI(\lambda)$ je spektrální intenzita záření, kterou můžeme spočítat z Planckova vyzařovacího zákona. Nás však zajímá elektrický výkon na jednotku plochy, čili musíme započítat ještě účinnost solárních panelů. Potom dostaneme

$$P_S = \int_{300\text{ nm}}^{1200\text{ nm}} \eta(\lambda) dI(\lambda).$$

Numerickou integrací nám vyšlo $P_S = 14,2\text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$. Stanovme plochu lidského těla¹⁷ na 2 m^2 . Výkon získaný pomocí fotovoltaických článků z lidského těla tedy činí $P = 28,4\text{ mW}$, čímž můžeme náš telefon nabít za dobu přibližně 13 dní. Prakticky by bylo možné články implementovat do oblečení, čímž bychom získali mnohem více energie ze slunečního záření než z člověka samotného. Dalším nedostatkem fotovoltaických panelů, jež nebyl zmíněn, je, že při malých tocích energie nemusí vůbec dojít k sepnutí nabíjecí části a získaná energie je tak nulová.

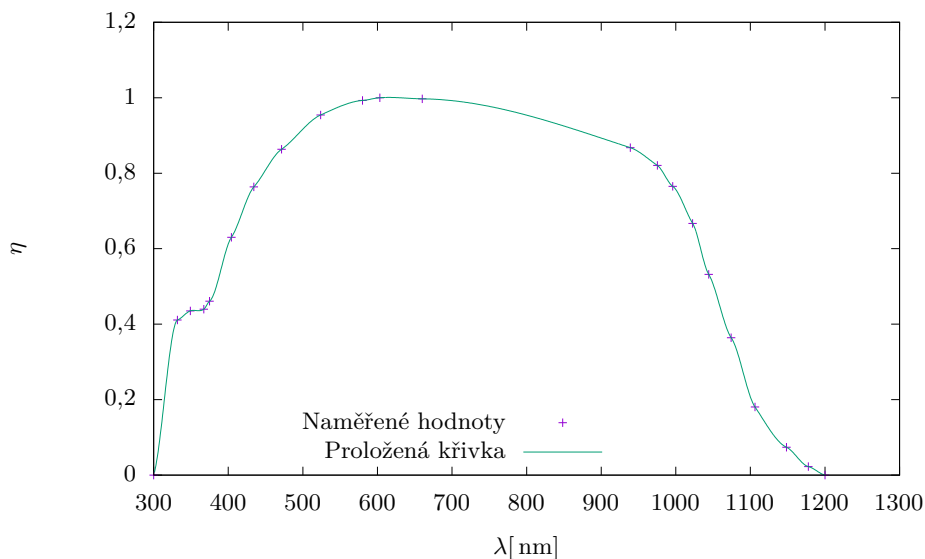
¹³<https://www.mada.org.il/en/about/engineer/challenge/respiratory-system>

¹⁴http://flutopedia.com/refs_bpress.htm

¹⁵<https://sciencing.com/effect-wavelength-photovoltaic-cells-6957.html>

¹⁶https://www.researchgate.net/figure/Relative-quantum-efficiency-versus-wavelength-at-several-discrete-temperatures-fig1_283165648

¹⁷<https://www.calculator.net/body-surface-area-calculator.html?csex=m&bodyweight=85&bodyweightunit=kilogram&bodyheightfeet=&bodyheightinch=&bodyheight=180&x=96&y=23>



Obr. 3: Účinnost fotovoltaických článků v závislosti na vlnové délce dopadajícího záření.

Větrný pohon

Obecně se udává, že člověk za den vyprodukuje okolo $1,4 \text{ dm}^3$ plynu v podobě větrů,¹⁸ jejichž složení je¹⁹

- Dusík: 20 – 90 %
- Vodík: 0 – 50 %
- Oxid uhličitý: 10 – 30 %
- Kyslík: 0 – 10 %
- Methan: 0 – 10 %

Z toho jsou hořlavé vodík a methan. Produkce methanu není v lidském těle nijak velká, avšak spálením i jen malého množství můžeme získat hodně energie, přesněji $810 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ²⁰ Co se vodíku týká, jeho spálením lze získat až $120 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$, neboli $240 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. Ten by také bylo možné použít v palivovém článku, což je velmi perspektivní technologie s vyšší účinností než obyčejné spalování.

Za normálních podmínek je molární objem $22,4 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. Za den tak dokážeme vyrobit energii maximálně

$$W_p = 12,6 \text{ kJ}.$$

Na využití této energie bychom potřebovali nějaký druh spalovacího motoru, jejichž účinnost se většinou pohybuje v intervalu 10 – 50 %.²¹ Uvažme tedy $\eta = 10 \%$, jelikož i při velmi dobrém

¹⁸<https://www.telegraph.co.uk/men/the-filter/qi/10305094/QI-gas-facts-how-much-gas-does-the-average-human.html>

¹⁹<https://www.thoughtco.com/chemical-composition-of-farts-608409>

²⁰https://www.wou.edu/las/physci/GS361/Energy_From_Fossil_Fuels.htm

²¹https://cs.wikipedia.org/wiki/Spalovací_motor

konceptu spalovacího motoru nesmíme zapomínat na to, že spalujeme pouze malé množství plynu. Účinnost spalovacích motorů totiž roste se zvyšující se teplotou. Takto by bylo možné získat energii přibližně $W = 1,3 \text{ kJ}$. To stačí na nabití přibližně 4% baterie námi uvažovaného telefonu.

Seebeckův efekt

K tomuto jevu²² dochází při spojení dvou kovů či polovodičů s různými hodnotami Seebeckova koeficientu²³ a s rozdílnou teplotou. Mezi oběma částmi vznikne napětí a tedy i elektrický proud. Napětí lze jednoduše spočítat jako

$$U = \Delta\alpha\Delta T,$$

kde $\Delta\alpha$ je rozdíl Seebeckových koeficientů použitých materiálů a ΔT je rozdíl teplot.

Chceme vybrat dva materiály s co největším rozdílem Seebeckova koeficientu. V případě polovodičů je největší rozdíl mezi selenem a $\text{Pb}_{15}\text{Ge}_{37}\text{Se}_{58}$, jež činí $\Delta\alpha_p = 2890 \mu\text{V}\cdot\text{K}^{-1}$. Při pokojové teplotě $21 \text{ }^\circ\text{C}$ je teplotní rozdíl vůči teplotě lidského těla $\Delta T = 16 \text{ K}$, což odpovídá napětí přibližně $U = 46 \text{ mV}$. Jak je vysvětleno v článku²³ o seebeckově koeficientu, nelze z polovodičů sestavit fungující drátový systém a proto se používají spíše pro opačný Peltierův článek²⁴. Pro Seebeckův je nutně použít kovy. Zvolme antimon a bismut, kde $\Delta\alpha = 119 \mu\text{V}\cdot\text{K}^{-1}$, tedy $U = 1,9 \text{ mV}$.

Podívejme se na nějaké reálné koncepty. Například v roce 2014 byl publikován článek²⁵ podle kterého bylo dosaženo výkonu na plochu přibližně $1,5 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$. Jedním metrem čtverečním bychom pokryli zhruba polovinu lidského těla. V úvodu bylo zmíněno, že na nabití mobilního telefonu potřebujeme $32,4 \text{ kJ}$ energie, což by v tomto případě trvalo zhruba 250 dní. Pro napájení kardiostimulátoru by nám stačila plocha 200 cm^2 .

Tato metoda je velmi bezpečná. Co se týče zatížení organismu, lidské tělo je v zimě připraveno zvýšit svůj tepelný výkon z přibližně 100 W na zhruba 150 W a ochlazování v řádech miliwattů, dokonce ani wattů mu nezpůsobí žádné obtíže, takže omrzlin se bát nemusíme. Problém by samozřejmě nastal už při trochu větší zimě, jelikož kovové desky nelze považovat za příliš dobře izolující oblečení.

Pro napájení současných mobilních telefonů se všechny tyto koncepty ukázaly velmi nepraktické. Pokud však uvážíme podobnou elektroniku s menším příkonem, například energie získaná z větrného pohonu či krevní turbíny by pokryla polovinu elektrické spotřeby chytrých hodinek. Navíc všechny tyto možnosti byly dostatečné na napájení kardiostimulátoru, což je v dnešní době asi hlavní důvod zkoumání těchto přístrojů. Jako nejpraktičtější se jeví využití Seebeckova efektu či větrného pohonu, jelikož tato zařízení by bylo možné kdykoli sundat. Navíc nemají vedlejší efekty, jako je například možná smrt v případě turbíny v krevním řečišti.

Jan Střeleček
strela@fykos.cz

²²<http://vlab.amrita.edu/?sub=3&brch=194&sim=351&cnt=1>

²³<https://www.electronics-cooling.com/2006/11/the-seebeck-coefficient/>

²⁴<https://www.sciencedirect.com/topics/chemistry/peltier-effect>

²⁵<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/23/10/105002>

Úloha III.E ... indexovaný kondenzátor

12 bodů; (chybí statistiky)

Poštou vám přišel elektrolytický kondenzátor a rezistor. Změřte kapacitu kondenzátoru a odpor rezistoru, neměřte je však přímo. Součin kapacity kondenzátoru a odporu rezistoru je přibližně $RC \approx 20$ s.

Varování: Elektrolytický kondenzátor má kladnou a zápornou elektrodu, při zapojení opačně ho můžete zničit. Maximální dovolené napětí je 10 V.

Dodo právě v praktiku měřil rezonanci.

Odpor rezistoru

Najskôr si zistíme odpor rezistoru. Máme ale zakázané merať ho priamo, nezostáva nám teda nič iné, než použiť Ohmov zákon. Pripojíme rezistor ku zdroju, odmeriame napätie na jeho koncoch a prúd ktorý ním preteká a dosadíme do známeho vzťahu.

Pri napätí treba pripojiť multimeter k tým dvom bodom, medzi ktorými chceme vedieť napätie, a teda paralelne k rezistoru. Keďže baterka uvádza 4,5 V nastavím na multimetri rozsah 20 V (pretože 2 V by bolo zjavne málo a nič medzi tým nemáme k dispozícii).

Pri meraní prúdu zas treba, aby tento prúd multimetrom priamo pretekal, a teda ho zapojíme sériovo. Ak sa bojíte, že prepálite multimetru poistky, tak ho najprv nastavte na najväčší rozsah prúdu a postupne uberajte (zvyšujte presnosť), dokým sa dá.

My sme pri meraní použili 5 rezistorov, pričom sa dalo čakať, že možno medzi nimi budú nejaké drobné rozdiely, ale ukázalo sa, že pri všetkých rezistoroch sme dostali napätie $U = 4,84$ V a prúd $I = 96$ μ A. Čo z toho vyplýva? Štatistická chyba odporov rezistorov vo výrobe je zanedbateľná v porovnaní s nepresnosťou merania. Tá je v prípade nášho multimetra $\pm(1\% + 2\text{digit})$ pri meraní prúdu a $\pm(0.5\% + 2\text{digit})$. Čiže $\Delta I = 3$ μ A a $\Delta U = 0,04$ V. Pri delení dvoch veličín sa sčítajú štvorce ich relatívnych chýb. Takže odpor rezistoru je

$$R = \frac{U}{I} \left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2} \right) = (50,4 \pm 1,6) \text{ k}\Omega.$$

Trochu teórie

Kapacita kondenzátoru C udáva pomer medzi nábojom Q v ňom uloženým a napätím U na jeho svorkách, teda $C = Q/U$. Podobne, odpor rezistoru R vyjadruje pomer napätia ku prúdu, ktorý ním preteká $R = U/I$. Čo je to prúd? Usporiadáný pohyb nabitých častíc. Jeho veľkosť udáva, aký náboj prešiel vodičom za jednotku času, čiže $I = Q/t$.

Čo sa teda stane, keď spojíme konce nabitého kondenzátoru rezistorom? Na svorkách rezistoru bude rovnaké napätie ako na kondenzátore a teda ním začne tiecť prúd veľkosti

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Q}{RC}.$$

Tento prúd tvoria elektróny bežiacie zo zápornej nabitých strany kondenzátora na tú druhú (resp. hypotetické kladné náboje bežiacie presne opačným smerom). Čiže náboj (a s ním teda aj napätie) na kondenzátore bude postupne klesať. Tým pádom bude klesať aj prúd, čiže dostávame diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{RC},$$

kde sme len za prúd z predchádzajúceho vzťahu dosadili zmenu náboja za čas. Mínus je tam preto, lebo náboj na kondenzátore týmto procesom klesá.

Táto rovnica sa dá riešiť jednoducho separáciou premenných, ktorej výsledkom je

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Lenže náboj merať nevieme (minimálne bežne multimeter takú možnosť neponúka). Zato vieme merať prúd a napätie, čiže máme dve možnosti: buď vydeliť obe strany kapacitou, alebo obe strany zderivovať podľa času. Tým dostaneme časový vývoj napätia na kondenzátore, resp. prúdu tečúceho vodičom

$$\begin{aligned} U(t) &= U(0)e^{-\frac{t}{RC}}, \\ I(t) &= I(0)e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Vidíme, že oba vzťahy sú analogické, takže je vlastne jedno, ktorý z nich použijete. Tu si samozrejme ukážeme oba.

Zostáva otázka, ako vlastne zapojiť obvod.

Meranie prúdu

V tomto prípade rovno za kondenzátor zapojíme multimeter. Z predchádzajúceho merania už vieme aký prúd máme očakávať. Multimeter teda momentálne ukazuje, ako rýchlo sa kondenzátor nabíja. Tento prúd tiež exponenciálne klesá, takže je dôležité určiť si hodnotu prúdu, pri ktorej nabíjanie ukončíme. Nie je až tak dôležité akú, ale hlavne musí byť pri každom meraní rovnaká. My sme sa rozhodli, že nabíjanie ukončíme pri $3 \mu\text{A}$. Takto trvalo nabíjanie niečo cez 2 minúty.

Keď donabíjame, treba spraviť súčasne dve veci - odpojiť baterku (stačí jeden kábel) a spustiť stopky. Potom už len sledujeme stopky a každých 5 sekúnd pozrieme na multimeter a poznačíme si hodnotu prúdu. Meranie sme vykonali pre päť kondenzátorov, takže sme tento postup zopakovali pre každý z nich, ale ako vidno z tabuľky 2, štatistická chyba je opäť rozumne malá.

Takže sme zmerali vývoj prúdu v čase. Otázka znie, ako z toho určiť kapacitu. Najjednoduchší spôsob je použiť nejaký software, ktorý nám naše dáta fitne exponenciálou²⁶

Okrem toho, že sa môžeme pokochať, ako všetky body ležia na danej krivke, sa dozvieme aj to, aký má táto krivka predpis. V našom prípade dostávame $f(x) = 94.3 \cdot \exp(-0.0378x)$. Čo keď porovnáme s (1) zistíme, že

$$\begin{aligned} -\frac{t}{RC} &= -0.0378, \\ RC &= 26,5 \text{ s}, \\ C &= 525 \mu\text{F}. \end{aligned}$$

Zároveň si môžeme všimnúť, že $I(0) = 94,3 \mu\text{A}$, čo je o pár mikroampérov menej, než prúd, ktorý sme namerali v prvej časti. Náhoda? Samozrejme, že nie, k tejto skutočnosti sa na záver vrátíme.

²⁶Keďže Excel mi bol zakázaný, tak jedine RStudio alebo gnuplot. Zvládne to však aj skoro každá lepšia kalkulačka.

Tab. 2: Namerané časové priebehy prúdu

| t s | I μA | | \bar{I} μA | | | |
|----------|----------------------|----|----------------------------|----|----|------|
| 5 | 78 | 78 | 80 | 78 | 79 | 78,6 |
| 10 | 65 | 65 | 65 | 64 | 64 | 64,6 |
| 15 | 54 | 53 | 54 | 53 | 54 | 53,6 |
| 20 | 44 | 44 | 44 | 44 | 45 | 44,2 |
| 25 | 36 | 37 | 36 | 37 | 37 | 36,6 |
| 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 31 | 30,2 |
| 35 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25,0 |
| 40 | 20 | 21 | 21 | 21 | 21 | 20,8 |
| 45 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17 | 17,0 |
| 50 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 14,4 |
| 55 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 11,8 |
| 60 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9,8 |

Ak ale nechceme fitovať namerané dáta pomocou nejakého black boxu, môžeme to spraviť aj sami pomocou linearizácie. Keď zlogaritmujeme obe strany (1) dostávame, že

$$\ln I(t) = \ln I(0) - \frac{t}{RC},$$

čiže ak si nakreslíme graf závislosti logaritmu prúdu (keďže do argumentu logaritmu by malo ísť bezrozmerné číslo, budeme logaritmovať I/I_n , kde sme si zvolili $I_n = 1 \mu\text{A}$) na čase, mal by byť lineárny, so smernicou $-(RC)^{-1}$.

Smernicu určíme z krajných bodov

$$k = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = -0,0379 \text{ s}^{-1}.$$

Z toho vyplýva, že $C = 524 \mu\text{F}$. To je vlastne to isté ako pri použití black boxu. Presnejšie by ale bolo vykonať lineárnu regresiu.

Čo nám pripomína, že by bolo vhodné určiť chybu. Štvorec relatívnej chyby kapacity je súčet štvorcov relatívnych chýb odporu (tú sme určili v prvej časti) a relatívnej chyby, s ktorou sme určili smernicu.

Keď si za oba prúdy ktoré používam na určenie smernice dosadíme $I + u_I$ kde pod u_I myslíme absolútnu chybu daného prúdu, po chvíli hrania sa s logaritmami a limitami sa dá dôjsť k záveru, že absolútna chyba smernice je

$$u_k = \frac{1}{u_t} \left(\frac{u_{I_1}}{I_1} + \frac{u_{I_2}}{I_2} \right),$$

čiže súčet relatívnych chýb prúdov deleno časový rozdiel. Ako absolútnu chybu prúdu opäť použijeme dva krát najmenší dielik plus percento nameranej hodnoty a dostávame, že relatívna chyba smernice je $\delta_s = 0,004$. To spolu s relatívnou chybou odporu dáva $u_C = 0,03$. Keď to vynásobíme s kapacitou, dostaneme $C = (520 \pm 20) \mu\text{F}$.

Meranie napätia

Tentokrát treba zapojiť multimeter ku kondenzátoru paralelne. Rozhodli sme sa nabíjať, dokým nebolo napätie 4,83 V, čo trvalo asi sekundu.

Dalo by sa samozrejme postupovať úplne rovnako ako minule a v pevne stanovených časoch merať hodnotu napätia. Pre zmenu to ale spravíme naopak. A síce, zmeriame časový rozdiel medzi dvoma pevne stanovenými hodnotami napätia. Tie sme si stanovili ako $U_1 = 4\text{ V}$ a $U_2 = 2\text{ V}$. Dôležitý je hlavne ich pomer. Dosadením do (1) zisťujeme, že ak čas, ktorý uplynie medzi tým, kým klesne napätie z U_1 na U_2 , označíme Δt , môžeme C vyjadriť ako

$$C = \frac{\Delta t}{R \ln 2}.$$

Spravili sme 5 meraní (opäť jedno pre každý kondenzátor) a určili priemer a smerodajnú odchýlku $\Delta t = (16,9 \pm 0,4)\text{ s}$.

Po dosadení do vzťahu vyššie dostávame $C = (480 \pm 20)\text{ }\mu\text{F}$.

Diskusia

Průžky na rezistore majú postupne farby: zelená, hnedá, čierna, červená, hnedá. Na internete sa dá nájsť veľa rôznych možností ako to dekodovať.²⁷ Zisťujeme, že výrobca udáva, že rezistor by mal mať odpor $R_v = (51,0 \pm 0,5)\text{ k}\Omega$. Tento interval je celý vnútri intervalu, ktorý sme určili našim meraním, čiže hodnotu odporu sme určili správne.

Čiže výsledky získané meraním prúdu a meraním napätia sa zjavne dosť výrazne líšia. Môže nás napadnúť, či to nemôže byť spôsobené tým, že pri druhom meraní nemáme pevne určený čas, ale práveže ho meriame. Tak sme skúsili aplikovať túto metódu aj na meranie prúdov. Prúd klesol na polovicu (z $80\text{ }\mu\text{A}$ na $40\text{ }\mu\text{A}$) v priemere za 18,2 s. Čo zodpovedá kapacite $C = 520\text{ }\mu\text{F}$ (čiže takej istej ako sme pri meraní prúdu určili aj minule), takže pes je zakopaný niekde inde.

Hodnota kapacity, ktorú udáva výrobca je $C = 470\text{ }\mu\text{F}$. To spadá do intervalu chyby pri meraní napätia, avšak nie pre meranie prúdu. To nám teda dáva nápovedu, ktoré z meraní je vlastne zle.

A kde konkrétne je tá chyba? Vráťme sa späť ku odvodeniu vzťahu (1). Tam sme si povedali, že R je odpor, ktorý stojí medzi svorkami rezistoru. Pri meraní sme predpokladali, že tento odpor je $R = (50,4 \pm 1,6)\text{ k}\Omega$, čo však nebola tak úplne pravda. Sérioivo s našim rezistorom bol totiž zapojený multimeter! Bol zapojený ako Ampérmeter, takže jeho vnútorný odpor bol veľmi malý (preto sme namerali skoro správnu hodnotu), ale stále bol dosť veľký na to aby nezanedbateľne ovplyvnil meranie.

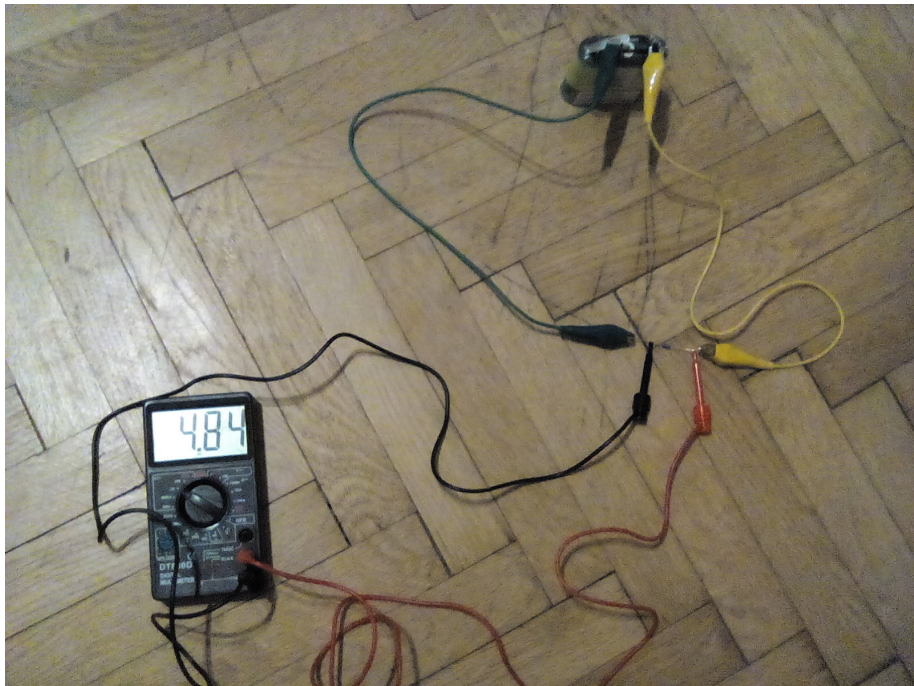
Keď sa ale pozrieme na meranie napätia, vidíme, že aj tam mohol multimeter ovplyvniť meranie. Tentokrát presne opačným spôsobom. Keďže bol zapojený ako Voltmeter paralelne s našim rezistorom, skutočný odpor, cez ktorý sa kondenzátor vybíjal bol menší, než sme počítali, čiže by sme mali pre zmenu dostať hodnotu kapacity nižšiu ako reálna hodnota. Ale ostatné chyby v tomto prípade prevážili nad nedokonalosťou Voltmetru.

S použitím ďalšieho multimetru by sme mohli odmerať vnútorný odpor v jednotlivých prípadoch a použiť ho na korekciu výsledkov.

²⁷My sme použili: <https://www.digikey.com/en/resources/conversion-calculators/conversion-calculator-resistor-color-code-4-band>

Záver

Hodnotu odporu rezistoru sme určili ako $R = (50,4 \pm 1,6) \text{ k}\Omega$, čo sedí s hodnotou zadanou výrobcom: $R_v = (51,0 \pm 0,5) \text{ k}\Omega$. Meraním vývoja prúdu v čase sme dostali kapacitu $C = (520 \pm 20) \mu\text{F}$. Meraním vývoja napätia v čase sme dostali kapacitu $C = (480 \pm 20) \mu\text{F}$. Výrobca udáva $C = 470 \mu\text{F}$, čo znamená, že meraním napätia sme dostali správny výsledok, zatiaľ čo meraním prúdu sme dostali výrazne chybný výsledok, dôvodom bol nenulový vnútorný odpor Ampérmetra.



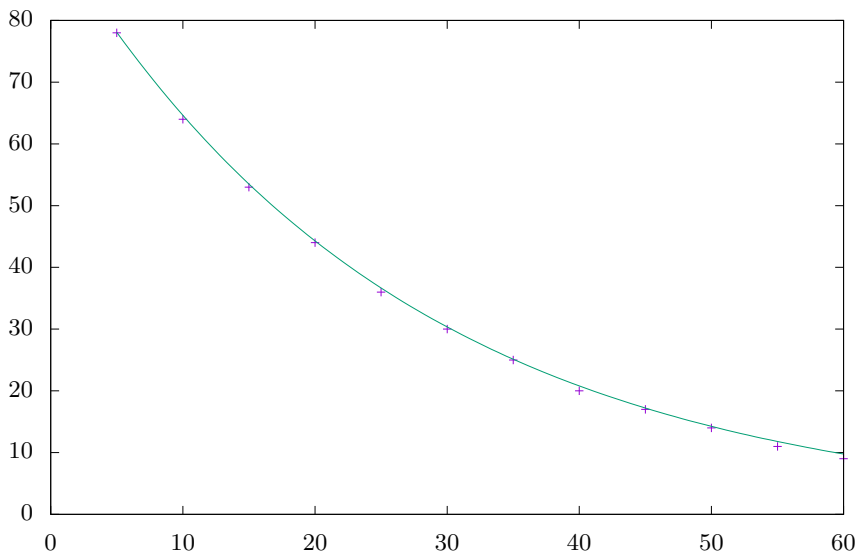
Obr. 4: popiska

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha III.S ... zobecněná

10 bodů; (chybí statistiky)

1. Mějme vodorovnou desku, ve které je malá dírka. Přes tuto dírku je provlečený provázek o délce l , na jehož spodním konci je zavěšeno závaží o hmotnosti M . Toto závaží lze považovat za hmotný bod. Na druhém konci provázku na rovné desce je druhý hmotný bod (kulička) o hmotnosti m . Provázek mezi nimi je napnutý díky závaží o hmotnosti M . Celou soustavu držíme v klidu tak, že část provázku pod deskou je ve svislém směru. Poté druhému hmotnému bodu, kuličce, udělíme rychlost v ve vodorovném směru kolmém



Obr. 5: popiska

- na provázek ve chvíli, kdy soustavu uvolníme. V tomto příkladu neuvažujte žádné tření. Zvolte vhodné souřadnice a sestavte Lagrangeovu funkci pro tuto soustavu.
- Mějme železnou tyč ohnutou do tvaru paraboly tak, že pokud v kartézské soustavě působí tíhové zrychlení v záporném směru osy y , pak tyč má stejný tvar jako funkce $y = x^2$. Po tyči se může volně pohybovat hmotný bod o hmotnosti M , ke kterému je pevnou nehmotnou tyčkou o délce l připevněno závaží o hmotnosti m . Takto jsme vytvořili kyvadlo se závěsem klouzajícím podél ohnuté tyče. Konstrukce dovoluje pohyb celé soustavy pouze v rovině paraboly. Určete vhodné zobecněné souřadnice a najděte Lagrangeovu funkci této soustavy.
 - Mějme přímku nakloněnou pod úhlem α vzhledem k vodorovné rovině, po které se pohybuje bez tření hmotný bod o hmotnosti m . Najděte vhodné zobecněné souřadnice této soustavy a sestavte Lagrangeovu funkci. Poté sestavte i Lagrangeovy rovnice, dvakrát je zintegrujte, a tak najděte řešení. Zkontrolujte si, zda vaše řešení vychází stejně, jako řešení, které byste získali středoškolskou metodou výpočtu. Při integraci nezapomeňte na integrační konstanty a vysvětlete jejich význam. Jaké budou jejich hodnoty, pokud se bod spustí z klidu z výšky h ?
 - Nazačiatok je důležité určit, koľko stupňov voľnosti má daná úloha, teda koľko zovšeobecnených súradníc budeme potrebovať na jej popis. Všimneme si, že guľička pohybujúca sa po doske, má dva stupne voľnosti. Môže rotovať okolo dierky, cez ktorú je prevlečená niť, zároveň sa môže pohybovať v smere priamo ďalej alebo bližšie od dierky, nakoľko špagát sa cez dierku tiež pohybuje bez trenia.

Potom je tu závažie, ktoré tiež môžeme reprezentovať ako hmotný bod. Ten má ale len jeden stupeň voľnosti. Môže sa hýbať hore a dole, inak povedané, ak zvolíme osy x , y ležiace v rovine, tak sa závažie môže hýbať iba pozdĺž osi z (merané smerom nahor). Ďalej ale máme v tejto úlohe ešte jednu väzbu, tou je povrázok, ktorý spája hmotné body a jeho dĺžka je nemenná. Súradnica, ktorá udáva vzdialenosť guľičky od dierky r , a súradnica, ktorá udáva výšku závaží z , budú zviazané pomocou vzťahu

$$l = r - z.$$

Na konštruovanie Lagrangeovej funkcie nám teda ostávajú už len dve nezávislé súradnice a to z a súradnica vyjadrujúca uhol, ktorý zviera špagát medzi dierkou a guľičkou s osou x (voľba osi x je ľubovoľná vďaka symetrii problému).

Teraz nasleduje druhý krok konštrukcie Lagrangeových rovníc, vyjadrenie kartézskych súradníc pomocou zovšeobecných súradníc:²⁸

$$x_m = (l + z) \cos \varphi,$$

$$y_m = (l + z) \sin \varphi,$$

$$z_M = z.$$

Časovým derivovaním jednotlivých súradníc nájdeme vzťahy pre jednotlivé zložky rýchlosti v zovšeobecných súradniciach. Následne určíme vzťah pre kinetickú energiu T

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + (l + z)^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2.$$

Následne určíme potenciál. V tomto prípade sa jedná o potenciálnu energiu závažia (guľička má počas celého pohybu rovnakú potenciálnu energiu, nemusíme ju preto uvažovať)

$$V = Mgz.$$

Lagrangeova funkcia pre tento problém bude potom vyzeráť

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + (l + z)^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2 - Mgz.$$

2. Znova si najprv určíme zovšeobecnené súradnice. Keďže úlohu riešime ako rovinný problém a vieme, že trajektória bodu M je zadaná ako explicitná funkcia (konkrétne $y = ax^2$, kde a je nejaká konštanta aby nám sedeli jednotky), budú jeho obe súradnice vyjadrené pomocou jedinej súradnice x . Čo sa týka zovšeobecných súradníc pre druhý bod správajúci sa ako kyvadlo, môžeme použiť súradnice, ktoré sme si ukázali v seriáli. Musíme však ale pamätať že jeho kartézske súradnice budú nielen súradnice kývajúceho sa kyvadla, ale je nutné k nim pripočítať aj súradnice závesu kyvadla, o hmotnosti M .

Vzťah medzi kartézskymi a zovšeobecnými súradnicami je teda

$$x_M = x,$$

$$y_M = ax^2,$$

$$x_m = x + l \sin \varphi,$$

$$y_m = ax^2 - l \cos \varphi.$$

²⁸Tento ako aj nasledujúce kroky nebudem zvlášť komentovať, nakoľko sa jedná o mechanické počítanie. Budem len uvádzať čo robíme a ako vyzerá výsledok, to prečo to robíme (keby niekto nevedel), je uvedené v seriáli.

Časovým derivováním a dosadením do vzťahu pre kinetickú energiu dostaneme

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 (1 + 4a^2 x^2) + \frac{1}{2} m (2l (\cos \varphi + 2ax \sin \varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2) .$$

Potenciál bude potom súčet potenciálnych energií oboch telies, teda

$$V = Mga x^2 + mg (a x^2 - l \cos \varphi) .$$

Lagrangeova funkce bude jednoducho

$$L = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 (1 + 4a^2 x^2) + \frac{1}{2} m (2l (\cos \varphi + 2ax \sin \varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2) - Mga x^2 - mg (a x^2 - l \cos \varphi) .$$

3. Z hľadiska toho, ako zvolit' zovšeobecnené súradnice, je tento problém triviálny. Hmotný bod totižto kopíruje svojou trajektóriou lineárnu funkciu zo sklonom α . Prevod medzi kartézskymi a zovšeobecnenými súradnicami bude preto

$$\begin{aligned} x_m &= x , \\ y_m &= x \operatorname{tg} \alpha . \end{aligned}$$

Čo nám dáva analogickým spôsobom ako v prvých dvoch úlohách vzťah pre kinetickú energiu

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) .$$

A takisto aj pre potenciálnu energiu.

$$V = mgx \operatorname{tg} \alpha .$$

Lagrangeova funkcia bude potom samozrejme

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - mgx \operatorname{tg} \alpha .$$

Napriek tomu, že sme to v seriáli explicitne nepreriešili na príklade, bolo v ňom odvodené, ako majú Lagrangeove rovnice vyzerat', čo nám dáva návod, ako ich zostavit', keď máme Lagrangeovu funkciu. V našom prípade najprv parciálne derivujeme L podľa \dot{x} a výsledok následne podľa času. Od toho ešte odčítame deriváciu L podľa x a celé to položíme rovné nule. Lagrangeova rovnica (bude samozrejme len jedna) má teda tvar

$$m \ddot{x} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + mg \operatorname{tg} \alpha = 0 .$$

Rovnicu upravíme

$$\ddot{x} = -\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -g \sin \alpha \cos \alpha .$$

Tento vzťah stačí dvakrát preintegrovat', čím dostanem

$$x = -\frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \cos \alpha + C_1 t + C_2 .$$

Kde C_1 má význam počiatočnej rýchlosti a C_2 má význam počiatočnej polohy. Ak počiatočná rýchlosť bola nulová a počiatočná výška nad zemou h , pričom sme počiatok

súradnicovej sústavy položili do bodu kde sa pretína naklonená rovina s podložkou, potom v kartézskych súradniciach pre $t = 0$ z rovnice pre y máme

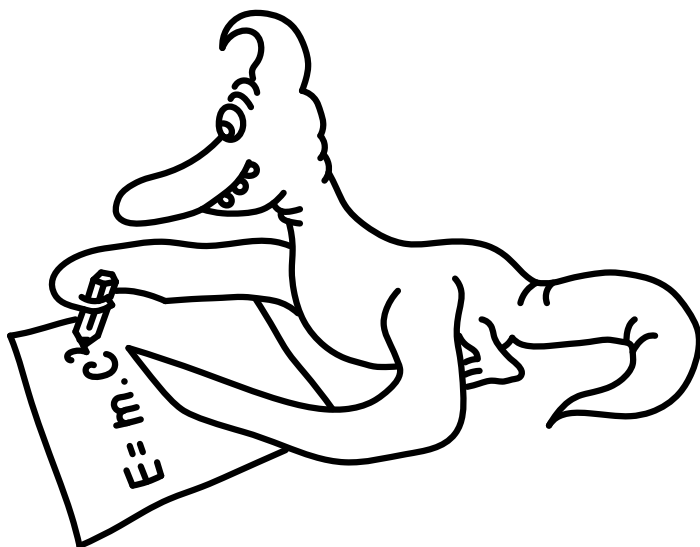
$$h = x \operatorname{tg} \alpha,$$

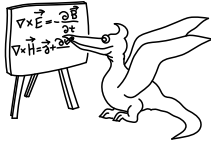
$$x = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Potom kompletne riešenie tejto úlohy je

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Jakub Jambrich
jakubj@fykos.cz





Seriál: Mechanika

V tejto časti seriálu dokončíme príklad, ktorý sme minule začali - výpočet matematického kyvadla. K tomu ale budeme potrebovať vedieť, čo je to Taylorov rozvoj. Ďalej si ukážeme, ako sa dajú s pomocou Taylorovho rozvoja vyriešiť úlohy, ktoré analyticky riešiteľné nie sú. Potom sa pozrieme na to, aké nenumerné metódy riešenia Lagrangeových rovníc existujú, a začneme sa venovať použitiu teoretickej mechaniky v nebeskej mechanike, čo bola historicky hlavná motivácia, kvôli ktorej bol Lagrangeov formalizmus vyvíjaný.

Taylorov rozvoj

Toto bude trochu matematická vsuvka do seriálu, kde sa čitateľom, čo vedia derivovať, pokúsím intuitívne vysvetliť, čo to je Taylorov rozvoj. Tiež ukážem, ako sa počíta, ale najmä uvediem základné vzťahy pre Taylorov rozvoj, ktoré sa v teoretickej mechanike zídu pri počítaní príkladov.

Asi najintuitívnejší spôsob, ako chápať a predstavovať si funkcie, je predstaviť si ich graf. Z grafu človek jasne vidí, ako sa funkcia správa, kde klesá alebo stúpa, ako veľmi klesá alebo stúpa, aké má korene a podobne. Mnohé funkcie sú ale veľmi náročné na analýzu a výpočet ich presných hodnôt, prípadne sa veľmi náročne integrujú (čo nám znemožňuje, či výrazne sťažuje riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré obsahujú takéto funkcie). Na druhej strane, existuje trieda funkcií, ktoré sa dajú veľmi triviálne integrovať a derivovať - polynómy (mnohočleny). S týmito funkciami ste sa už všetci stretli na konci základnej alebo začiatku strednej školy. Vlastnosti a rôzne manipulácie s lineárnymi a kvadratickými funkciami sú vám teda určite veľmi dobre známe a netreba vás presviedčať, že vypočítať hodnotu ľubovoľného polynómu v danom bode bez kalkulačky vie s ľubovoľnou presnosťou každý z vás. Keby som vám dal ale za úlohu zrátať na papieri $\sin(0,82)$, nikto (kto nepozná Taylorov rozvoj) by to nijako nedokázal.

Možno ste sa niekedy hrali s nejakým programom na vykresľovanie grafov funkcií a všimli si, že mnohé funkcie majú podobný tvar. Exponenciála je napríklad funkcia, ktorá veľmi rýchlo rastie. Aj x^2 , x^3 alebo iné vyššie stupne polynómov rýchlo rastú. Ak si napríklad exponenciálu v takomto programe (napríklad WolframAlpha) vykreslíte a vo vedľajšom okne sa budete hrať so sčítaním polynómov rôznych stupňov, s trochou šikovnosti a investovaného času sa dostanete k polynómu, ktorého graf sa bude veľmi podobáť na graf exponenciály (aspoň vo vykreslenej oblasti, pre veľké x exponenciála začne rásť oveľa rýchlejšie ako akýkoľvek polynóm).

Tento fakt si ľudia všimli už oveľa skôr. Na takejto podobnosti správne zvolených polynómov a danej funkcie je postavený Taylorov rozvoj. V skratke sa jedná o to, že ľubovoľnú (dostatočne slušnú) funkciu vieme na nejakom intervale ľubovoľne dobre aproximovať určitým polynómom. Táto vlastnosť je veľmi užitočná, pretože častokrát nás funkcie zaujímajú len na nejakých krátkych intervaloch. Napríklad sínus. Sínus má periódu, takže pre ľubovoľne veľké číslo ho vieme spočítať, ak dokážeme spočítať sínus všetkých čísel na intervale o dĺžke periódy sínu 2π (napr. $(-\pi, \pi)$). Sínus by nám teda teoreticky stačilo dobre aproximovať len na tomto krátkom intervale. V prípade sínusu, ktorý chceme aproximovať v okolí nuly, môžeme použiť

polynóm pozostávajúci napríklad z piatich členov

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

Nie je ťažké si všimnúť vzor v správaní tohto polynómu. Ak by sme chceli aproximovať túto funkciu na celom intervale presne, mohli by sme pokračovať v pridávaní členov polynómu až do nekonečna. Ukazuje sa, že takýto nekonečný polynóm sa naozaj bude rovnať funkcii sínus dokonca na celom jej definičnom obore, teda všetkých reálnych číslach. V "modernej matematike" je práve takýto nekonečný polynóm (rad, súčet postupnosti) definíciou funkcie sínus (spolu s inými definíciami, ktoré sú tejto ekvivalentné). Sínus vieme potom zapísať pomocou nekonečného *Taylorovho radu* nasledovne

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Pre usilovného čitateľa zadávam úlohu rozmyslieť si, najlepšie rozpísať na papier, že prvých 5 členov radu je naozaj rovnakých ako sú členy v polynóme aproximujúcom sínus uvedenom skôr. Ďalej môžem taktiež odporučiť usilovnému čitateľovi, aby si vyčíslil hore uvedený polynóm v bode π a zároveň si vyčíslil v bode π aj sínus. Budete mať lepšiu predstavu, ako dobre Taylorov rad aproximuje sínus.

Usilovní čitatelia mi určite môžu potvrdiť, že výsledok bol v oboch prípadoch veľmi podobný. Pre sínus to bola nula, pre polynóm to neprezradím, ale prezradím, že koreň tohto polynómu je $\sim 3,1487$, čo sa k číslu π blíži veľmi pôsobivo.

Častokrát nie je jednoduché zistiť Taylorov rad trikom alebo pozorovaním (aj v tých málo prípadoch, keď sa to dá, to chce veľmi veľkú skúsenosť a veľa napočítaných príkladov). Existuje ale metóda, ako vieme postupne dopočítavať jeden za druhým členy Taylorovho radu. Uvedieme rovno jeho vzorec a jedným dychom dodávame, že si môžete všimnúť, že daný rad je zvolený tak, aby mal všetky derivácie v danom bode rovnaké ako pôvodná funkcia.

Zoberme ľubovoľnú funkciu $f(x)$ v bode ($x = a$), ktorá má v tomto bode všetky derivácie a všetky sú konečné (dôvod je jasný zo samotného vzťahu - ak by derivácie neexistovali, nemal by zmysel). Na intervale obsahujúcom bod a je potom Taylorov rad tejto funkcie

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!},$$

kde $f^{(n)}(a)$ je n -tá derivácia našej funkcie v bode a .

Každú normálnu (tzv. analytickú) funkciu f vieme potom zapísať ako $f(x) = T_f(x)$. Existujú aj funkcie, pre ktoré to neplatí, ale s nimi sa nestretáme. Overté si, prosím, že ak tento vzorec aplikujeme na sínus v bode $a = 0$, dostaneme postupne polynóm, ktorý sme uviedli ako aproximáciu sínu. Použijeme tento vzorec ešte pre odvodenie Taylorovho radu pre exponenciálu e^x v bode $a = 0$. Derivácia eponenciály je exponenciála. Exponenciála v bode 0 je rovná jednej. Taylorov rad exponenciály bude teda vyzeráť nasledovne

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ako cvičenie odporúčam odvodiť si zo vzorčeka taylorov rad pre $\cos(x)$ a $\ln(1+x)$ so stredom v bode $a = 0$.

Matematické kyvadlo – In medias res

V minulej časti sme si ukazovali, ako postupne nájsť zovšeobecnené súradnice, z nich čisto mechanicky zostaviť Lagrangeovu funkciu a z nej postupným derivovaním zostaviť Lagrangeove rovnice. To sme si ale neukázali na našom príklade matematického kyvadla. Dokončíme to teraz. Pre pripomenutie, Lagrangeova funkcia kyvadla mala tvar

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos(\varphi)$$

a Lagrangeove rovnice zostavujeme nasledovne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Dosadíme za L Lagrangeovu funkciu matematického kyvadla a po prederivovaní dostaneme

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = 0.$$

Vidíme, že sa jedná o obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu, pretože najvyššia derivácia našej hľadanej funkcie $\varphi(t)$ je druhá derivácia. Čo je ale oveľa väčší problém, rovnica je zároveň aj *nelineárna*, a to práve jej druhý člen, ktorý je tvorený súnosom nami hľadanej funkcie. Štandardne sa nedajú podobné diferenciálne rovnice riešiť analyticky, t.j. pomocou známych dobre definovaných funkcií. Riešiť ich môžeme napríklad numericky s presnosťou, akú uznáme za vhodnú. Inou možnosťou je riešiť rovnicu analyticky tak, že pred tým, ako sa pustíme do riešenia, danú nelineánu²⁹ funkciu aproximujeme. Toto je okamih, keď prvýkrát v praxi použijeme Taylorov rozvoj. Rozvineme našu funkciu do Taylorovho radu. Vieme, že čím sa od bodu, v ktorom funkciu rozvíjame, nachádzame ďalej, tým viac členov jej rozvoja potrebujeme pre dosiahnutie požadovanej presnosti. Naopak, keď sme blízko stredu tohto rozvoja, stačí nám členov menej. V istej malej vzdialenosti nám dáva dostatočnú presnosť (čím vyššiu presnosť požadujeme, tým menšie je okolie bodu, kde je aproximácia presná) aj prvý člen taylorovho rozvoja. Ten je obvykle lineárny, prípadne konštantný (v prípade konštantného člena vezmeme prvé dva členy). V tomto prípade vezmeme z rozvoja sínusu len prvý lineárny člen. Dostávame *linearizovanú* diferenciálnu rovnicu

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0.$$

Táto rovnica sa dá jednoducho riešiť. Na riešenie diferenciálnych rovníc sa však v tomto seriáli nebudeme sústreďovať, ale necháme ich riešenie na počítač. Osobne preferujem, ako ste si už mohli všimnúť, na riešenie rovníc WolframAlpha, ktorý nám v tomto prípade dá výsledok

$$\varphi(t) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Kde c_1 a c_2 sú integračné konštanty. Ich hodnoty si vieme jednoducho dopočítať. Napríklad tak, že budeme požadovať, aby na začiatku malo kyvadlo výchylku φ_0 a uhlovú (a teda aj klasickú) rýchlosť $\dot{\varphi} = 0$. Z prvej podmienky vidíme, že $c_1 = \varphi_0$, čo dostaneme po dosadení $t = 0$ do našej pohybovej rovnice.

²⁹Medzi nelineárne funkcie samozrejme patria aj kvadratické, kubické a iné mocninné funkcie. Nemožnosť analyticky riešiť rovnice je však najmä pri nelineárnych rovniciach, kde nelinearita je spôsobená inou ako polynomiálnou funkciou.

Rýchlosť dopočítame tak, že prederivujeme rovnicu pre polohu kyvadla, aby sme dostali rovnicu pre uhlovú rýchlosť kyvadla

$$\dot{\varphi}(t) = c_2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) - \sqrt{\frac{g}{l}}\varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Z tejto rovnice a podmienky, že rýchlosť má byť na počiatku nulová, dopočítame druhú konštantu. Celý druhý člen rovnice bude po dosadení $t = 0$ rovný nule, zatiaľčo prvý bude nulový len ak $c_2 = 0$. Naše riešenie pre dané počiatočné podmienky bude teda vyzerat

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Práve sme si podrobne ukázali jeden zo spôsobov riešenia Lagrangeových rovníc. Jedná sa o to najjednoduchšie, čo nám môže napadnúť. Hlavnou nevýhodou je ale to, že riešenie, ktoré taktó nájdeme, nie je presným riešením, a správne výsledky dáva len pre body blízke nule (pretože spravidla linearizujeme funkciu v nule). Existuje ale ďalší trik použiteľný pri niektorých príkladoch, ktorý nám výrazne uľahčuje ich analytické riešenie.

Integrály pohybu

Jeden z trikov, ktoré môžeme pri riešení Lagrangeových rovníc použiť, je získať dodatočné rovnice, ktoré nám zjednodušia riešenie samotných Lagrangeových rovníc. Zo strednej školy viete, že pri riešení úloh z mechaniky ste častokrát využívali zákony zachovania. Univerzálny sa môže zdať zákon zachovania mechanickej energie, ktorý ale neplatí vždy. Ďalej sú užitočné aj zákony zachovania hybnosti a momentu hybnosti. Častokrát nebolo jednoduché zistiť, najmä pri veľmi komplexných problémoch, ktorá zložka hybnosti sa zachováva a prečo. Prípadne či sa zachováva alebo nezachováva energia. V Lagrangeovom formalizme je tento problém náležite ošetrený a z matematických vlastností Lagrangianu (Lagrangeovej funkcie) vieme jednoducho určiť, ktoré veličiny sa zachovávajú počas celého deja. Tieto veličiny nazývame *integrály pohybu*. Matematickejšie povedané, integrál pohybu hľadáme ako funkciu $f(q_j, \dot{q}_j)$ zovšeobecných súradníc a zovšeobecných rýchlostí, pričom od tejto funkcie požadujeme, že na skutočnej trajektórii riešiacej Lagrangeove rovnice bude nadobúdať po celý čas jednu konštantnú hodnotu. Povedali sme si, že v praxi sa jedná napríklad o hybnosť telesa. Z Lagrangeových rovníc vidíme, kedy sa niečo ako „zovšeobecnená hybnosť“ zachováva, celkom rýchlo.

Predpokladajme, že Lagrangeova funkcia závisí na všetkých zovšeobecných súradniciach okrem nejakej jednej q_i . Potom i -tu Lagrangeovu rovnicu získame

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Derivácia Lagrangianu podľa tejto súradnice bude teda 0 (pretože pri zmene tejto súradnice sa Lagrangian nezmení). Z toho dostávame

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Na záver preintegrujeme podľa času

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.}$$

Vidíme, že tento výraz sa bude stále zachovávať, nakoľko je po celej trajektórii konštantný. Na záver možno ešte poznamka k názvu „zovšeobecnená hybnosť“. Keďže Lagrangián má fyzikálny rozmer energie (jedná sa o rozdiel dvoch energií), keď zderivujeme „energiu“ podľa „rýchlosti“, dostaneme niečo, čo má fyzikálny rozmer hybnosti.

Okrem toho existuje ešte jeden integrál pohybu,³⁰ a ten sa nazýva „zovšeobecnená energia“. Zaujímavejšie než jeho konštrukcia je, že k Lagrangiánu existuje zachovávajúca sa zovšeobecnovaná energia práve vtedy, keď Lagrangián explicitne nezávisí na čase (teda na čase závisí len prostredníctvom zovšeobecnovaných súradníc a rýchlostí). Jej definícia je

$$h(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L.$$

Znova si všimneme, že táto veličina má fyzikálny rozmer energie, takže jej názov dáva dobrý zmysel.

Ešte predtým, ako reálne začneme riešiť príklady, je podľa mňa dôležité ukázať (pre niektorých zopakovať) nový spôsob hľadania zovšeobecnovaných súradníc.

Najčastejšie krivočiare súradnice

V mnohých úlohách sa stretávame s pohybom po povrchu sféry alebo po kružnici, alebo s problémom, ktorý má rotačnú symetriu. Hlboko v podstate prírody je totižto zakorenená jedna vlastnosť, ktorej sa snáď budeme venovať v poslednom diele seriálu a z ktorej sa dá odvodiť celá fyzika. Zjednodušene by sa dalo povedať, že príroda je „lenivá“, a preto nechá planéty obiehať okolo Slnka po elipsách a nie po napríklad štvorcoch. Vďaka tejto podivuhodnej vlastnosti sa zakrivený pohyb najčastejšie odohráva po elipsách veľmi blízkych kružniciam (mimo mechaniky na Zemskom povrchu, kde uvažujeme homogénne gravitačné pole). Preto je častokrát výhodnejšie počítať v súradniciach, ktoré dobre vystihujú symetriu danej sféry alebo kružnice. Zavádzajú sa preto polárne a sférické súradnice.

Polárne súradnice definujeme

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi), \\y &= r \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Ak si v rovine nakreslíme kartézsku mriežku, potom bod s kartézskymi súradnicami $[x, y]$ môžeme popísať aj pomocou uhlu φ zovretého medzi kladným smerom osy x a polpriamkou z počiatku do nášho bodu; uhol meriame proti smeru hodinových ručičiek (smerom od osi x k osi y). Súradnica r je potom vzdialenosť tohto bodu od nuly meraná po ich spojnici.

Druhé, o čosi ťažšie na predstavu, sú sférické súradnice. Prevod medzi sférickými a kartézskymi súradnicami je nasledovný

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi) \sin(\vartheta), \\y &= r \sin(\varphi) \sin(\vartheta), \\z &= r \cos(\vartheta).\end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že je to podobné ako pri polárnych súradniciach, len ešte prenasobené sínusom a kosínusom ďalšieho uhla, ktorý sme si označili ϑ . To, že vzdialenosť bodu od počiatku

³⁰V skutočnosti môžu existovať aj iné integrály pohybu, spomenuté sa však dajú najšť pomerne jednoducho.

je r je zrejme zjavné. Ostatné dva uhly si vieme jednoducho predstaviť, keď si predstavíme, ako to vyzerá v planetáriu (tam sa nad nami nachádza sféra). V tomto prípade je polomer sféry pevný a nemení sa. Ak stojíme v strede, tak spojnica nás a nejakého význačného bodu (v planetáriu sa používa juh) je naša kartézská os x . Súradnice nejakej hviezdy vieme určiť pomocou sférických súradníc: hviezdu spojíme najkratšou možnou čiarou po sfére s horizontom. Teda spravíme jej priemet na „horizont“. Potom odčítame uhol medzi týmto jej priemetom a nami zavedenou osou x proti smeru hodinových ručičiek, čo bude naša súradnica φ . Na záver určíme súradnicu ϑ tak, že od 90° odčítame uhol medzi horizontom a hviezdou po nami nájdenej najkratšej spojnici.

Snažil som sa to vysvetliť zrozumiteľne a názorne, na internete sa ale nachádza množstvo obrázkov pre tých z vás, ktorí veci potrebujú vidieť, a nestačí im vizualizovať si ich. A možno ešte jedna poznámka k zavedeniu sférických súradníc. Možno vám prišlo neintuitívne, ako som v poslednom kroku odčítal uhol medzi hviezdou a obzorom od 90° . Samozrejme, dostaneme rovnako dobre použiteľné súradnice, ak ϑ definujeme priamo ako uhol medzi (pre náš prípad) horizontom a hviezdou. Prevodné vzťahy sa potom trochu pozmenia. Ak ste zvyknutí na túto definíciu sférických súradníc, pokojne ich používajte, no pamätajte, že nemusí byť na prvý pohľad jasné, že vzťahy získané pri týchto rôznych zavedeniach súradníc sú totožné.

Na záver tejto časti si spomenieme ešte jeden príklad, z ktorého výsledkov budeme intenzívne ťažiť nabudúce.

Pohyb hmotnej častice v gravitačnom poli

V roku 1889 Nórsko-Švédsky kráľ Oskar II. vyhlásil k príležitosti svojich 60-tych narodenín súťaž o nájdenie analytického riešenia problému troch telies vo forme konvergujúceho mocninového radu, ktorú sám označil za (vo voľnom preklade): "Súťaž o dôležitý objav v ríši vysokej matematickej analýzy". Už nasledujúci rok Henry Poincaré publikoval článok v časopise *Acta Mathematica*, v ktorom dokázal, že neexistuje dostatok integrálov pohybu na analytické vyriešenie problému troch telies, čo kráľa uspokojilo a odmena za "výhru" v súťaži mu bola udelená.

Až v roku 1912 sa Fínskemu matematikovi Karlovi Sundmanovi podarilo vyriešiť tento problém, avšak formou radu s exponentmi, ktoré sú celočíselným násobkom $\frac{1}{3}$. Tento rad však konverguje veľmi pomaly, a aby dosahoval presnosť porovnateľnú s numerickými výpočtami, je nutné vziať približne jeho prvých $10^{8000000}$ členov. Problém troch telies je tak prakticky riešiteľný iba numericky. Existujú však zjednodušené prípady, ktorých riešenia s rozumnou presnosťou môžeme získať aj analyticky. Takým je napríklad systém Slnko-Zem-Mesiac.

Než sa ale dostaneme k tomuto problému, musíme si prejsť cez problém dvoch telies. A predtým ako sa dostaneme k tomu, je potrebné si ukázať, ako vyzerá Lagrangian hmotného bodu, ktorý sa pohybuje v nejakom potenciálovom poli. Budeme predpokladať, že naše skúmané teleso svojím pohybom toto potenciálové pole nijako neovplyvňuje.

Naše teleso sa bude pohybovať v centrálnom poli s potenciálom $V(r)$ a zo skúseností vieme, že sa bude pohybovať v jednej rovine (túto skúsenosť si v úlohách k seriálu budete mať možnosť overiť). Na jeho popis preto použijeme polárne súradnice. V nich bude jeho Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Teraz uvidíme silu integrálov pohybu. Vo všeobecnosti by boli Lagrangeove rovnice v tomto prípade 2 rovnice druhého rádu, kdežto ak určíme integrály pohybu, dokážeme z nich po úpra-

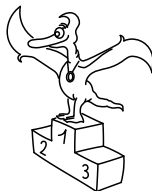
vách zostavit jedinou diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Pre premennú r bude naša výsledná diferenciálna rovnica

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right),$$

kde E je mechanická energia a l moment hybnosti telesa - dva integrály pohybu.

K riešeniu tejto rovnice sa dostaneme v seriálovej úlohe a ďalšom diele seriálu. Následne plynule prejdeme k problému dvoch telies, riešeniu Keplerovej úlohy a možno aj odvodeniu Keplerových zákonov.

Mnohým z vás ďakujem za reakcie na výzvu k spätnej väzbe, dojmy boli zatiaľ celkom pozitívne, za čo som rád, pretože je to pre mňa povzbudzujúce. Samozrejme naďalej platí, že budem rád za vaše návrhy, pripomienky a komentáre k seriálu. Som optimista a dúfam, že počet riešiteľov seriálu sa nebude znižovať, tak si všetci navzájom držíme palce.



Pořadí řešitelů po III. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P | E | S | III | % | Σ |
|-----------------------------------|-------------------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|
| <i>Student Pilný</i> | MFF UK | 6 | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 | 12 | 10 | 66 | 100 | 198 |
| 1. <i>Eva Feldbabelová</i> | Katolické gymnázium Třebíč | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 84 | 80 |
| 2. <i>Jiří Kohl</i> | Biskupské G, Brno | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 84 | 63 |
| 3. <i>Benedikt Bareš</i> | G Dobruška | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 75 | 47 |
| 4. <i>Adam Krška</i> | G, Mikulov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 66 | 44 |
| 5. <i>Vojtěch Votruba</i> | G Jana Keplera, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 54 | 43 |
| 6. <i>Filip Zikeš</i> | G P. Bezruče, Frýdek-Místek | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 71 | 24 |
| 7.–9. <i>Sára Byšková</i> | G Jana Keplera, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 58 | 21 |
| 7.–9. <i>Barbora Čemanová</i> | G, Park mládeže, Košice | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 43 | 21 |
| 7.–9. <i>Adam Hůštava</i> | European School Luxembourg II | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 88 | 21 |
| 10. <i>Aleš Opl</i> | Gymnázium Praha 3 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 74 | 20 |
| 11. <i>Petr Šícho</i> | G Jana Keplera, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 32 | 18 |
| 12. <i>Milan Marek</i> | G Neumannova, Žďár n. S. | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 35 | 15 |
| 13. <i>Adéla Kolembusová</i> | European School Luxembourg II | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 56 | 14 |
| 14. <i>Matěj Charousek</i> | G Na Vítězné pláni, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 38 | 13 |
| 15.–16. <i>Jan Ptáček</i> | G, Špitálská, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 58 | 11 |
| 15.–16. <i>Vojtěch Stránský</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 58 | 11 |
| 17. <i>Lukáš Veškma</i> | G Jana Keplera, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 38 | 8 |
| 18.–19. <i>Natália Kalinová</i> | G, P. Horova, Michalovce | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 50 | 7 |
| 18.–19. <i>Bianka Tomaščíková</i> | G Varšavská, Žilina | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 54 | 7 |
| 20.–25. <i>Jiří Antoňů</i> | G, Špitálská, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 100 | 6 |
| 20.–25. <i>Eliška Durstová</i> | G, Dvůr Králové n. L. | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 100 | 6 |
| 20.–25. <i>Zuzana Lisztwanová</i> | G J. Słowackiego, Český Těšín | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 100 | 6 |
| 20.–25. <i>Tereza Preclíková</i> | G Dobruška | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 50 | 6 |
| 20.–25. <i>Adam Šebesta</i> | Masarykovo G, Plzeň | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 100 | 6 |
| 20.–25. <i>Jan Šuráň</i> | G, Špitálská, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 50 | 6 |
| 26. <i>Matyáš Svoboda</i> | G, Mikulov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 67 | 4 |

Kategorie druhých ročníků


| jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P | E | S | III | % | Σ |
|----------------------------------|------------------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----------|
| <i>Student</i> | <i>Pilný</i> | 6 | 6 | 6 | 8 | 8 | 10 | 12 | 10 | 66 | 100 | 198 |
| 1. <i>Adam Mendl</i> | G P. de Coubertina, Tábor | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 92 | 67 |
| 2. <i>Robert Gemrot</i> | G Komenského, Havířov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 68 | 65 |
| 3. <i>Patrik Kašpárek</i> | Katolické gymnázium Třebíč | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 63 | 55 |
| 4. <i>Martina Daňková</i> | Klasické a španělské G, Brno | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 72 | 52 |
| 5. <i>Elena Chochoňáková</i> | G L. Svobodu, Humenné | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 91 | 49 |
| 6. <i>Lubor Čech</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 55 | 47 |
| 7. <i>Soňa Husáková</i> | G, Českolipská, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 68 | 44 |
| 8. <i>Marco Souza de Joode</i> | G Nad Štolou, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 65 | 41 |
| 9. <i>Jan Klivan</i> | G, Dačice | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 63 | 36 |
| 10. <i>Tomáš Tuleja</i> | G L. Svobodu, Humenné | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 103 | 33 |
| 11. <i>Karolína Letochová</i> | G, Šternberk | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 51 | 26 |
| 12. <i>Radek Lacko</i> | G Komenského, Havířov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 57 | 25 |
| 13. <i>Jan Červeňan</i> | G J. Pivečky, Slavičín | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 52 | 23 |
| 14.–15. <i>Šárka Štěpánková</i> | G J. Resslera, Chrudim | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 63 | 19 |
| 14.–15. <i>Jarmila Terpáková</i> | G L. Svobodu, Humenné | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 100 | 19 |
| 16. <i>Daniel Perout</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 64 | 16 |
| 17. <i>Martin Polyácko</i> | G Alejová, Košice | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 58 | 15 |
| 18. <i>Matěj Dvořák</i> | G Jana Keplera, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 74 | 14 |
| 19. <i>Lucia Gintnerová</i> | G Sv. Františka, Žilina | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 86 | 12 |
| 20. <i>Gabriel Ščurka</i> | ŠpMNDaG, Bratislava | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 53 | 10 |
| 21. <i>Daniël Czinege</i> | SPŠ chemická, Ostrava | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 47 | 9 |
| 22.–23. <i>Vojtěch Janota</i> | G, Strakonice | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 100 | 6 |
| 22.–23. <i>František Krůs</i> | Masarykovo G, Plzeň | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 27 | 6 |

Kategorie třetích ročníků

| jméno <i>Student</i> | škola MFF UK | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P | E | S | III | % | Σ |
|--|--------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|
| | | 3 | 3 | 6 | 8 | 8 | 10 | 12 | 10 | 60 | <i>100</i> | 180 |
| 1. <i>Viktor Materna</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 85 | 73 |
| 2. <i>Martin Vavřík</i> | G, Šumperk | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 86 | 69 |
| 3. <i>Jaroslav Herman</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 73 | 63 |
| 4. <i>Jakub Jobus</i> | G Jura Hronca, Bratislava | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 70 | 60 |
| 5. <i>Martin Schmiéd</i> | G, Jihlava | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 69 | 59 |
| 6. <i>Radka Křížová</i> | G J. Heyrovského, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 88 | 58 |
| 7.–8. <i>David Kománek</i> | G, Špitálská, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 71 | 54 |
| 7.–8. <i>Jaroslav Scheinpflug</i> | G Jírovcova, České Budějovice | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 68 | 54 |
| 9. <i>Ronald Doboš</i> | G Poštová, Košice | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 85 | 51 |
| 10. <i>Jan Benda</i> | G, Litoměřická, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 78 | 50 |
| 11. <i>Jiří Zelenka</i> | G Z. Wintra, Rakovník | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 57 | 43 |
| 12. <i>Jakub Strnad</i> | Klvaňovo G Kyjov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 55 | 41 |
| 13. <i>Jan Divila</i> | G, Lesní čtvrť, Zlín | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 53 | 40 |
| 14. <i>Lukáš Hronek</i> | G, Písek | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 100 | 34 |
| 15. <i>Veronika Hendrychová</i> | G, Turnov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 56 | 28 |
| 16. <i>Matěj Krátký</i> | PORG, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 71 | 27 |
| 17. <i>Pavla Rudolfová</i> | G, Videňská, Brno | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 96 | 25 |
| 18. <i>Jakub Pravda</i> | ŠpMNDaG, Bratislava | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 67 | 24 |
| 19.–20. <i>Petra Pálkovácsová</i> | G, Nové Zámky | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 38 | 23 |
| 19.–20. <i>Václav Zvoníček</i> | G Brno, tř. Kpt. Jaroše | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 72 | 23 |
| 21. <i>Josef Polášek</i> | G Jana Keplera, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 48 | 22 |
| 22. <i>Rachel Johnson</i> | Richardson High School, USA | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 42 | 21 |
| 23. <i>Milan Tichavský</i> | Slezské G, Opava | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 67 | 20 |
| 24. <i>Kryštof Jasenský</i> | G, Lesní čtvrť, Zlín | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 45 | 19 |
| 25. <i>Kateřina Barotová</i> | G, Olomouc-Hejčín | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 56 | 18 |
| 26.–27. <i>Minh Khoi Ho</i> | Hanoi - Amsterdam HS, Vietnam | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 76 | 16 |
| 26.–27. <i>Filip Zukal</i> | G, Blansko | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 27 | 16 |
| 28.–29. <i>Matěj Holubička</i> | G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 63 | 12 |
| 28.–29. <i>Eva Vochozková</i> | Biskupské G, Brno | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 67 | 12 |
| 30. <i>Daniél Krátký</i> | G, Trutnov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 59 | 10 |
| 31. <i>Kateřina Roupová</i> | G, Blansko | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 23 | 9 |
| 32. <i>Domínika Kodlová</i> | PORG, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 31 | 8 |
| 33. <i>Jan Vondra</i> | G Týn nad Vltavou | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 50 | 5 |
| 34. <i>Lucia Krajčoviechová</i> | G Jura Hronca, Bratislava | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 67 | 4 |
| 35.–36. <i>Martina Pivková</i> | Evanjelické G, Banská Bystrica | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 29 | 2 |
| 35.–36. <i>Erika Žitniaková</i> | Evanjelické G, Banská Bystrica | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 29 | 2 |

Kategorie čtvrtých ročníků

| jméno <i>Student</i> | škola MFF UK | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P | E | S | III | % | Σ |
|------------------------------------|------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|
| | | 3 | 3 | 6 | 8 | 8 | 10 | 12 | 10 | 60 | 100 | 180 |
| 1. <i>Martin Vaněk</i> | G, Vysoké Mýto | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 92 | 68 |
| 2. <i>Kateřina Rosická</i> | G J. Ortena, Kutná Hora | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 94 | 66 |
| 3. <i>Jindřich Jelínek</i> | G, Olomouc-Hejčín | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 109 | 62 |
| 4. <i>Ivan Hudák</i> | ESŠ, Lip. Mikuláš | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 87 | 55 |
| 5. <i>Marie Grunová</i> | G, Moravský Krumlov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 58 | 50 |
| 6. <i>Vojtěch Klímeš</i> | G, Třeboň | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 67 | 40 |
| 7.–8. <i>Jiří Blaha</i> | G, Uherské Hradiště | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 77 | 37 |
| 7.–8. <i>Jan Obořil</i> | Klasické a španělské G, Brno | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 74 | 37 |
| 9.–11. <i>Tomáš Drobil</i> | G, Dačice | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 72 | 36 |
| 9.–11. <i>Matej Moško</i> | G Grösslingova, Bratislava | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 71 | 36 |
| 9.–11. <i>Vojtěch Ulman</i> | G Jaroslava Seiferta, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 42 | 36 |
| 12.–13. <i>Jindřich Dušek</i> | G Jana Keplera, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 57 | 34 |
| 12.–13. <i>Filip Koňářik</i> | G F. Palackého, Val. Mez. | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 89 | 34 |
| 14. <i>Marek Jankola</i> | G M. Hattalu, Trstená | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 71 | 27 |
| 15. <i>Jakub Růžička</i> | G, Nymburk | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 63 | 24 |
| 16. <i>Kristián Matušík</i> | G, Benešov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 41 | 23 |
| 17. <i>Michal Jůza</i> | G, Benešov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 49 | 21 |
| 18. <i>Tereza Prokopová</i> | G Jura Hronca, Bratislava | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 90 | 19 |
| 19.–20. <i>Andrej Rendek</i> | G, Dubnica n. Váhom | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 30 | 18 |
| 19.–20. <i>Tadeáš Wilczek</i> | G F. Živného, Bohumín | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 62 | 18 |
| 21. <i>Leonardo Wimmer</i> | Colégio pH, Tijuca, Brazil | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 106 | 17 |
| 22. <i>Miroslav Horský</i> | G, Českolipská, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 52 | 16 |
| 23. <i>Dominik Majkus</i> | G Na Vítězné pláni, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 46 | 13 |
| 24. <i>Štěpán Tichý</i> | G, Jateční, Ústí nad Labem | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 43 | 9 |
| 25.–26. <i>Karel Balej</i> | G a SOŠ, Rokycany | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 100 | 8 |
| 25.–26. <i>Kateřina Charvátová</i> | G B. Němcové, HK | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 62 | 8 |
| 27.–29. <i>Vratislav Besta</i> | G, Olomouc-Hejčín | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 33 | 6 |
| 27.–29. <i>Bernadeta Maříková</i> | G, Český Krumlov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 46 | 6 |
| 27.–29. <i>Marek Talír</i> | G, Český Krumlov | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 60 | 6 |
| 30. <i>Marek Božon</i> | G, Karviná | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 43 | 3 |
| 31. <i>Marie Vaňáková</i> | G Botičská, Praha | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 33 | 2 |

**FYKOS****UK, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.