

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

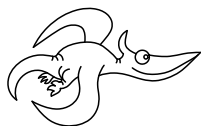
čtvrtá série je za námi a stejně tak je za námi i Fyziklání, které se letos z našeho pohledu opravdu povedlo. Děkujeme všem, kdo se účastnili nebo dokonce pomáhali s organizací, bez vás by ta soutěž nebyla tak skvělá! Pokud se už těšíte na příští ročník, můžete si čekání zkrátit Nábojem, což je pěkná matematická soutěž, která se koná 22. 3. na různých místech v Česku i Slovensku, takže to nebudete mít daleko. Na Náboji se také můžete setkat i s některými z organizátorů FYKOSu!

A co nás čeká v páté sérii? Budeme zkoumat, jak rychle se zahřeje kovová koule nebo jak zpomalit rotaci Země. Jako experiment budeme brnkat na pravítko a seriálová úloha bude vskutku nebeská. V seriálu si procvičíme počítání s Keplerovými zákony.

S touto brožurkou vám došla i obodovaná řešení problémové úlohy z druhé série.

Přejeme vám všem úspěšný vstup do nového poleletí. Mějte se krásně a řešte FYKOS!

Organizátoři



Zadání V. série



Termín uploadu: 19. 3. 2019 23.59

Termín odeslání: 18. 3. 2019

Úloha V.1 ... procházka u silnice

3 body

Matěj jde podél silnice konstantní rychlostí a každých 7 minut potká tramvaj, která jede proti němu. Jednou za 10 minut ho mine tramvaj jedoucí opačným směrem. Tramvaje jezdí v obou směrech se stejnou frekvencí. S jakou?

Úloha V.2 ... hloubka vniku do koule

3 body

Představte si, že máte podchlazenou plnou kovovou homogenní kouli, kterou vytáhnete z mrazáku, který máte nastavený na opravdu nízkou teplotu. Zajímalo by vás, jak rychle se bude zvyšovat její teplota, když ji umístíte do zahřáté místnosti. Protože by to jinak byl vysokoškolský problém, tak jsme pro vás úlohu zjednodušili. Ptáme se na odhad hloubky vniku (v metrech) „teplé oblasti“ do koule, který můžete získat rozměrovou analýzou. Přičemž známe relevantní parametry koule, konkrétně hustotu $[\rho] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, měrnou tepelnou kapacitu $[c] = \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a její součinitel tepelné vodivosti $[\lambda] = \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a zajímá nás závislost na čase $[t] = \text{s}$.

Úloha V.3 ... přepážka

6 bodů

Představme si akvárium tvaru krychle o straně $a = 1 \text{ m}$, které je vertikální přepážkou kolmou na stěny akvária rozděleno na dvě části. Dále uvažujme, že se tato přepážka může volně pohybovat ve směru kolmém na rovinu přepážky, ale ve zbylých dvou směrech se pohybovat nemůže. Také nemůže rotovat. Do jedné části akvária nalijeme $V_1 = 200 \text{ l}$ vody o hustotě $\rho_v = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a do druhé části nalijeme $V_2 = 230 \text{ l}$ oleje o hustotě $\rho_o = 900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Jaká bude rovnovážná poloha

přepážky? Jaké budou výšky hladin kapalin v jednotlivých částech akvária v rovnovážném stavu?

Bonus Najděte frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy. Předpokládejte, že přepážka má hmotnost $m = 10$ oz a že přesun vody probíhá bez jakéhokoli tření a odporu.

Úloha V.4 ... rozstřík

8 bodů

Uvažujte volnou kapku vody s poloměrem R , kterou pomalu nabíjíte elektrickým nábojem. Najděte velikost náboje Q potřebného na to, aby sa kapka rozstříkla.

Úloha V.5 ... odskakující hopík

9 bodů

Tuhou kouli ve vzduchu roztočíme dostatečně velkou úhlovou rychlostí ω rovnoběžnou se zemí. Poté hopík pustíme z výšky h_0 na vodorovnou podložku. Od ní se odrazí do výšky h_1 a dopadne nedaleko původního místa dopadu. Určete vzdálenost těchto dvou bodů dopadu, jestliže je třecí koeficient mezi koulí a zemí f dostatečně malý.

Úloha V.P ... problémy 1 sekundy

9 bodů

Navrhněte způsoby jak zpomalit zeměkouli tak, abychom k některým rokům nemuseli přidávat přestupnou sekundu. Spočítejte, kolik by to stálo.

Úloha V.E ... třiceticentimetrový tón

12 bodů

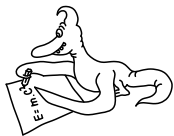
Každý někdy z nudy zkusil brnkat na dlouhé pravítko vystrčené přes okraj lavice. Zvolte vhodný model závislosti frekvence na délce vysunutí za okraj lavice a experimentálně jej ověřte. Popište i další parametry pravítka.

Poznámka Pravítko ke stolu přitlačte tak, aby kmitala jen jeho vysunutá část.

Úloha V.S ... nebesko-mechanická

10 bodů

1. Mějme nějaké kosmické těleso s hmotností pěti Sluncí, okolo kterého se nachází sférický symetrický homogenní oblak plynu a prachu s hmotností dvou Sluncí a s průměrem 1 ly. Oblak začne kolabovat do centrálního kosmického tělesa. Zanedbejte vzájemnou interakci částic oblaku (kromě gravitace). Určete, jak dlouho bude trvat, než celý oblak zkolabuje do centrálního tělesa. Úlohu neřešte numericky.
2. V úvodu seriálu jsme řešili diferenciální rovnici pro pohyb částic v centrálním poli, při jejímž řešení jsme použili takzvaný Binetův vzorec. Ukažte, že tento vzorec skutečně řeší zadanou diferenciální rovnici.
3. Sestavte lagrangián pro soustavu Slunce-Země-Měsíc. Předpokládejte, že Slunce je nehybné. Země i Měsíc se pohybují jak pod vlivem Slunce, tak pod vlivem sebe navzájem. Při sestavování lagrangiánu se zamyslete nad tím, jestli používáte správný počet zobecněných souřadnic.



Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... kostka se vzduchem

3 body; průměr 2,67; řešilo 52 studentů

Mějme dutou kostku s hranou délky $a = 20$ cm naplněnou vzduchem s teplotou $t_0 = 20$ °C, což je zároveň teplota okolí kostky. Vzduch uvnitř kostky ochladíme na $t_1 = 5$ °C. Jaká síla bude působit na každou stěnu kostky? Kostka při ochlazení vzduchu v ní nemění svůj objem. Tlak v okolí kostky je $p_0 = 101,3$ kPa.

Danku štal závěs ve sprše.

Vzduch v kocke můžeme považovat za ideální plyn, teda preň platí stavová rovnica. Keďže sa nemení objem vzduchu v kocke, ide o izochorický dej. Nech T je termodynamická teplota plynu, potom stavová rovnica platí v tvare

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1}.$$

Odtiaľ vyjadríme tlak plynu po ochladení

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}.$$

Sila F pôsobiaca na stenu kocky je tlaková sila vyvolaná rozdielom tlakov vnútri a mimo kocky Δp . Platí

$$F = S \Delta p,$$

kde $S = a^2$ je plocha steny. Teda

$$F = a^2 (p_0 - p_1),$$

$$F = a^2 p_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) \doteq 207 \text{ N}.$$

Keďže je tlak vnútri kocky nižší ako tlak okolia, sila pôsobí v smere do kocky.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha IV.2 ... utrhne se

3 body; průměr 2,43; řešilo 47 studentů

Máme (nehmotný) provázek délky l a na jeho konci kuličku (hmotný bod) s hmotností m . Víme, že maximální tíha, co unese, je síla $F = mg$, kde g je miestni tíhové zrychlenie, ale už nic víc. Provázek upevníme a kuličku budeme držet ve stejné výšce, jako je místo upevnění, ve vzdálenosti délky provázku od druhého konce provázku, ale tak, abychom ho nenapínali. Kuličku uvolníme a ta se začne vlivem tíhového zrychlenie pohybovat. Pod jakým úhlem provázku vůči svislé rovině se provázek přetrhne?

Karel si říkal, že to nevydrží.

Keď sa guľička nachádza v hĺbke h pod vodorovnou rovinou, z ktorej bola vypustená, zo zákona zachovania mechanickej energie máme

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

Pohyb guličky ale chceme popisovat pomocou uhlu α , ktorý zvierá povrázok so zvislým smerom. Pre hĺbku h teda máme

$$h = l \cos \alpha,$$

čo po dosadení a vyjadrení rýchlosti dáva

$$v = \sqrt{2gl \cos \alpha}.$$

Na guličku pôsobí tiažová sila smerom nadol a sila povrázku v smere k závesu. Výslednica týchto síl spôsobuje, že sa gulička pohybuje po kružnicovej trajektórii s polomerom l , preto platí bilancia zložiek síl v smere povrázku

$$\frac{mv^2}{l} = F_p - F_g \cos \alpha.$$

Povrázok je teda napínaný silou

$$F_p = 2mg \cos \alpha + mg \cos \alpha = 3mg \cos \alpha.$$

Pretrhne sa práve vtedy, keď táto sila prevýši mg , teda keď pre uhol odtrhnutia α_0 platí

$$\begin{aligned} F_p &= mg, \\ \cos \alpha &= \frac{1}{3}, \\ \alpha &= 70,5^\circ, \end{aligned}$$

teda keď povrázok zvierá so zvislým smerom uhol asi $70,5^\circ$.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

Úloha IV.3 ... levitující

6 bodů; průměr 5,58; řešilo 33 studentů

Matěj má rád levitující věci, a tak si pořídil nekonečnou nevodivou nabitou vodorovnou rovinu s plošnou nábojovou hustotou σ . Poté nad ní umístil míček o hmotnosti m nabitý nábojem q . Vypočítejte, pro jaké hodnoty σ může míček vůbec nad deskou levitovat. V jaké výšce h se pak může vznášet? Uvažujte konstantní tíhové zrychlení g .

Matěj by chtěl mít superschopnost levitace.

Nejtěžší částí této úlohy je asi výpočet velikosti odpudivé síly, kterou deska působí na míček. Na to je potřeba vypočítat elektrickou intenzitu ve výšce h nad deskou. Na to lze jít několika způsoby.

Nejjednodušší je najít si v tabulkách vzoreček pro elektrickou intenzitu E nekonečné nabitě roviny. Ta je všude nad deskou stejná a její velikost je z tabulek $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

Druhá možnost je aplikování Gaussova zákona, který říká, jak je tok elektrické intenzity libovolnou uzavřenou plochou závislý na náboji uvnitř, neboli

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Vypadá to komplikovaně, ale zvolíme-li správnou plochu, nemusíme ani integrovat. Ze symetrie předpokládáme, že všechny elektrické siločáry jsou kolmé na desku, protože zde nemůže být žádný jiný preferovaný směr. Představme si libovolný Gaussův válec (to je takový válec, jehož podstavy jsou rovnoběžné s deskou a deska prochází jeho středem). Jeho pláštěm tedy nebude procházet žádný tok elektrické intenzity. Zároveň má intenzita na obou podstavách stejnou (konstantní) hodnotu, protože jsou od desky stejně daleko, takže integrál můžeme vypustit. Také víme, že vektor intenzity je vždy kolmý na podstavu, čili skalární součin přejde ve standardní součin. Má-li podstava plochu S , integrál přejde do tvaru

$$2ES = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Nyní stačí jen dosadit náboj uvnitř $Q = \sigma S$ a dostaneme stejný vzoreček jako předtím.

Třetí možností (pro ty, co neznají Gaussův zákon ani tabulky, ale zato rádi integrují) je výpočet přímo z Coulombova zákona. Celou rovinu si rozdělíme na malinké čtverečky a dvakrát integrujeme

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{x^2 + y^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} dx dy,$$

kde $x^2 + y^2 + h^2$ je vzdálenost od míčku a zlomek $\frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}$ zaručuje, že sčítáme pouze kolmou složku. Samozřejmě nemusíme integrovat v kartézských souřadnicích. Mohli jsme si celou rovinu také rozsekát na soustředné kružnice a integrovat v polárních souřadnicích. Tyto integrační metody však ponecháme jen labužníkům a integrály se nebudeme již dále zabývat, když můžeme použít například Gaussův zákon.

Máme tedy $E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$. Předpokládáme-li, že Matěj provádí experiment ve vzduchu, jehož permitivita je velmi blízká permitivitě vakua, můžeme psát $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

Nyní stačí vyjít z rovnosti tíhové a elektrické síly.

$$\begin{aligned} F_e &= F_g, \\ Eq &= mg, \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} q &= mg, \\ \sigma &= \frac{2mg\epsilon_0}{q}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že elektrická síla vůbec nezávisí na výšce h nad deskou. Stejně tak pro konstantní tíhové zrychlení tíhová síla nezávisí na výšce. Proto je možné docílit levitace pouze při nábojové hustotě vypočtené výše. Míček ale zase bude levitovat v libovolném místě. Kdyby byla nábojová hustota větší, míček by odletěl do nekonečna a kdyby byla menší, míček by spadnul.

Pokud bychom uvažovali přesnější model s tíhovým zrychlením klesajícím s druhou mocninou vzdálenosti, byla by levitace nestabilní (tzn. při výchylce nahoru by převládla odpudivá elektrická síla a při výchylce dolů by byla větší tíhová přitažlivá síla).

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha IV.4 ... trampolína

7 bodů; průměr 4,79; řešilo 34 studentů

Dva hmotné body skákały na trampolíně do výšky $h_0 = 2$ m. Ve chvíli, kdy oba byly v nejnižším možném místě trajektorie (výchylka $y = 160$ cm), jeden z nich záhadně zmizel. Do jaké nejvyšší výšky byl druhý vymršťen? Kruhov trampolína má obvod $o = 10$ m a pruží díky $N = 42$ pružinám s tuhostí $k = 1720$ N·m⁻¹. Trampolínu modelujeme N pružinami rozmístěnými rovnoměrně a spojenými ve středu. Hmotnost zmizelého hmotného bodu je $M = 400$ kg.

Ivo hldal bratrance.

K řešení úlohy použijeme zákon zachování energie. Nejdřívě zjistíme, jak velké množství energie bylo uloženo v pružinách v okamžiku, kdy se nacházely oba body v nejnižší poloze (maximální výchylce trampolíny). Posléze přepočteme energii pružnosti trampolíny na rozdíl v potenciální energii vystřeleného hmotného bodu, z čehož nakonec určíme maximální dosaženou výšku h .

Potenciální energie pružnosti E_p závisí na velikosti deformace neboli na natažení pružin δx , a parametru pružnosti, který je v našem případě charakterizován tuhostí k

$$E_p = \frac{1}{2} N k \delta x^2,$$

kde N je počet natažených pružin trampolíny. Prodloužení pružin δx určíme pomocí Pythagorovy věty dosazením maximální výchylky y a poloměru vypočteného z obvodu kruhu $r = o/2\pi$, tedy

$$y^2 + r^2 = (r + \delta x)^2.$$

Řešením této kvadratické rovnice je

$$\delta x = \sqrt{r^2 + y^2} - r.$$

Dále potřebujeme zjistit hmotnost vystřeleného bodu m , kterou vypočteme pomocí rovnosti potenciální energie obou hmotných bodů při výskoku a energie pružnosti E_p

$$\frac{1}{2} N k \delta x^2 = (M + m) g (y + h_0).$$

Vyjádřením m z poslední rovnice dostáváme

$$m = \frac{N k \delta x^2}{2g (y + h_0)} - M.$$

A nakonec maximální dosaženou výšku h vystřeleného hmotného bodu získáme řešením rovnice

$$E_p = m g (y + h).$$

Výsledkem je

$$h = \frac{E_p}{m g} - y,$$

kde už jen zbývá dosadit za neznámé veličiny z rovnic výše. Prostým dosazením číselných hodnot pak dostáváme, že hmotný bod vystoupal do výšky $h = 29,38$ m. Ještě zdůrazněme, že jsme mohli použít tyto jednoduché přepočty na základě ZZE, protože systém se v nejnižším místě trajektorie nacházel v nerovnovázné poloze, kde byla veškerá energie z výskoku uložena v natažených pružinách a hmotné body neměly žádnou kinetickou energii.

Ivo Vinklárek
ivo@fykos.cz

Úloha IV.5 ... frisbee

9 bodů; průměr 5,50; řešilo 24 studentů

Tenký homogenní disk obíhá na vodorovné podložce po kružnici s poloměrem R . Velikost rychlosti těžiště disku je v . Určete úhel α mezi rovinou disku a svislým směrem. Tření mezi diskem a podložkou je dostatečné. Poloměr disku je řádově menší než R .

Jáchym si nebyl jistý řešením. Snad na to účastníci přijdou.

Hmotnost disku a jeho poloměr označme m a r , potom pro jeho moment setrvačnosti kolem osy kolmé na rovinu disku platí

$$J = \frac{1}{2}mr^2.$$

Disk kolem této osy rotuje s úhlovou rychlostí ω . Jeho moment hybnosti vzhledem k této ose je $L = J\omega$. Disk se stále dotýká podložky, takže pro jeho rychlost pohybu máme

$$v = \omega r = \Omega R,$$

kde Ω je úhlová rychlost oběhu disku po kružnici. Za čas dt se disk (přesněji průmět disku do podložky) otočí o úhel $d\varphi = \Omega dt$. Vodorovná složka momentu hybnosti $L_x = L \cos \alpha$ se při tom změni o $dL_x = L_x d\varphi$, svislá složka zůstane stejná.

Na střed disku působí tíhová síla $F_g = mg$. Ta je vyrovnávána tlakovou silou roviny, po které se disk pohybuje. To způsobuje moment síly vzhledem k ose procházející středem disku

$$M_1 = F_g r \sin \alpha.$$

Zároveň na disk působí třecí síla podložky, která je dostředivou silou, pro kterou platí $F_d = m\Omega^2 R$. Ta způsobuje moment

$$M_2 = -F_d r \cos \alpha.$$

Celkový moment sil se rovná derivaci momentu hybnosti podle času. V tomto případě z geometrie situace vyplývá

$$M_1 + M_2 = \frac{dL_x}{dt} = L_x \Omega.$$

Postupným dosazováním za všechny neznámé dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3v^2}{2Rg}.$$

Můžeme psát výsledek $\alpha = \arctg \frac{3v^2}{2Rg}$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha IV.P ... V-1 ve vesmíru

10 bodů; průměr 7,35; řešilo 20 studentů

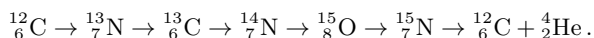
Mezihvězdný prostor není prázdný, nýbrž obsahuje nepatrné množství hmoty. Uvažujte jen vodík, potřebnou hustotu si vyhledejte. Mohla by existovat kosmická loď, jež by „nasávala“ vodík před sebou a využívala energii z něj? Jak rychlá/velká by musela být, aby udržela termojadernou fúzi jen z přijatého vodíku? Jaké jiné překážky realizace je rozumné uvažovat?

Kryptofašismus → Červený trpaslík → pohon → nápor → V-1 a hezky se to uzavírá.

Dosažení termojaderné fúze se lidstvu již daří, bohužel se však zatím nedaří ji realizovat kontrolovaně tak, aby vyprodukovala více energie, než kolik se spotřebuje na ohřev plazmatu. Proto je důležité umět tuto reakci nastartovat tak, aby naše loď neskončila rozptýlena po mezihvězdném prostoru. Tato část problému ještě není pro naše účely dostatečně dobře zvládnutá, ač se předpokládá, že ITER, jehož spuštění je plánováno na rok 2025, by měl vytvořit více energie, než kolik spotřebuje na svůj provoz.

Problém je, že v ITERu používají reakci deuteria a tritia, kdežto v mezihvězdném prostoru se vyskytuje téměř jen lehký vodík. To je nemilé, protože slučování dvou protonů na jádro deuteria je sice exotermická reakce, ale protože je zprostředkována slabou interakcí¹, probíhá (dokonce i ve hvězdách) jen velice pomalu a při srážkách dominuje krátkodobé spojení na diproton, který se téměř okamžitě rozpadá zpět na dva protony. Toto se v pozemských podmínkách nedaří překonat a proto se o lehkém vodíku jako o palivu pro termojadernou fúzi zatím ani neuvažuje.

Pokud chceme urychlit chemické reakce, jedna z obvyklých metod je přidání katalyzátoru. To je látka, která se v reakci nespotřebovává, ale vstupuje do ní a tím usnadňuje (a tedy i urychluje) její průběh. V některých jaderných reakcích lze dosáhnout podobného efektu přidáním nějakého specifického izotopu. Například pro slučování protonů na jádro helia existuje CNO cyklus, kde v nejjednodušší variantě² probíhají postupné přeměny mezi těmito jádry (nepíšeme přidávané protony, odcházející pozitrony z β^+ rozpadu a fotony):



Výhoda tohoto postupu je, že slučování protonů na jádro deuteria nahrazujeme β^+ rozpadem, který není vázaný na počet srážek v plazmatu. Nevýhodou však je, že kvůli většímu náboji zúčastněných jader musíme překonat vyšší coulombickou bariéru a tedy proces probíhá až při vyšších teplotách.³

Termojaderná fúze je sice exotermická reakce, ale k jejímu nastartování musíme překonat energetickou bariéru, která činí řádově 0,1 MeV. K tomu je třeba dosáhnout teploty přes $100 \cdot 10^6$ °C. V klasických tokamacích se plazma ohřívá několika způsoby. Jednak pomocí urychleného svazku částic, přičemž urychlení probíhá podobně jako na klasickém urychlovači částic. Dále se ohřívá indukci vířivých proudů, podobně jako na indukční varné desce. V naší loď bychom místo toho mohli energetickou bariéru překonávat kinetickou energií dopadajících protonů. K tomu je třeba, aby energie dopadajících protonů byla zhruba 0,1 MeV. Což, pokud kinetickou energii protonů přepočítáme na rychlost⁴, odpovídá zhruba 1,5 %c, tedy cca $4\,400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Naše loď by musela letět minimálně touto rychlostí, pokud jsou protony v prostoru „téměř nehybné“.

Uvažujme, kolik energie by vlastně taková kosmická loď vyžadovala. Ačkoliv vesmírná tělesa létají ohromnou rychlostí, musíme si uvědomit, že kosmické prostředí klade tělesům zanedbatelný odpor, takže je třeba raketě dodávat jen energii na zrychlování, zpomalování a změnu směru letu. Z čehož lze usoudit, že většina energie se spotřebuje při startu a pak je víceméně potřeba energie jen na provoz samotné lodi. Mezinárodní vesmírná stanice (ISS) spotřebuje na svůj provoz něco pod 100 kW příkonu, což použijeme jako řádový odhad spotřeby. Když uvážíme, že ze

¹ Jak je nutné vždy, když se v reakci přeměňuje proton na neutron nebo naopak.

² Existují i jiné varianty probíhající při ještě vyšších teplotách. Více se dá zjistit kupříkladu na en.wikipedia.org/wiki/CNO_cycle

³ Ve Slunci představuje asi 1,7 % výroby ${}^4\text{He}$, dominuje až u hvězd 1,3 krát hmotnějších, než Slunce.

⁴ Vztah pro relativistickou kinetickou energii je $E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right)$

čtyř protonů získáme maximálně přibližně 25 MeV energie,⁵ lze spočítat, že ISS by za sekundu spotřebovala přibližně 10^{17} protonů při ideální účinnosti fúzního reaktoru. To by znamenalo, že při typických hustotách částic v naší galaxii⁶ $\rho = 2 \cdot 10^5 \text{ m}^{-3}$ a sběrnou plochou někde kolem⁷ $S = 1\text{--}100 \text{ m}^2$ bychom se museli při neuvážení speciální teorie relativity pohybovat rychlostí řádově⁸ $10^9\text{--}10^{11} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, takže po započítání relativistické kontrakce dostaneme rychlost téměř rovnou rychlosti světla. Z toho můžeme usoudit, že posbírat dost vodíku na rozumný provoz lodi je obtížné až nemožné, minimálně s technologií blízké budoucnosti.

Nakonec odhadněme, kolik vodíku by se ve výsledku na lodi spotřebovalo. Hodnota 10^{17} částic se sice zdá jako hodně velké číslo, ale po přepočtení na gramy zjistíme, že na jednu sekundu provozu spotřebujeme zhruba 170 ng vodíku. To znamená, že 1 kg vodíku by při ideální účinnosti stačilo na 200 let provozu. Proto se zdá rozumnější vzít si palivo s sebou. To by nám navíc umožnilo použít deuterio-tritiovou reakci,⁹ která se zdá být daleko snadněji realizovatelnou. Navíc bychom nemuseli řešit zbytečné technické problémy se zachytáváním vodíku.

Pokud bychom přeci jen chtěli k pohonu využít „něco, co posbíráme cestou“, nabízí se jedna velice zajímavá možnost, a to použít miony z kosmického záření. Mion je elementární částice podobná elektronu, která ale má $200\times$ vyšší hmotnost. Pokud nahradíme v molekule vodíku elektrony miony, kvůli větší hmotnosti budou blíže jádru a proto se zásadně zmenší délka vazby v molekule H_2 . Díky tomu se jádra dokážou dostat velmi blízko a splynout při relativně nízké teplotě – pro deuterium a tritium k fúzi dochází již za pokojové teploty! V pozemských podmínkách toto bohužel není použitelné, protože na vytvoření jednoho mionu spotřebujeme o mnoho řádů víc energie, než kolik se pak uvolní fúzí. Pokud bychom ale měli miony „zadarmo“ z kosmického záření,¹⁰ byli bychom ve výkonu reaktoru limitováni jen jejich počtem. Bohužel kvalifikovaný odhad množství získaných mionů a tedy i výkonu sahá za rámec tohoto textu.¹¹

Mikuláš Matoušek
mikulas@fykos.cz

Úloha IV.E ... papírová izolační

12 bodů; průměr 9,32; řešilo 28 studentů

Změřte, jak moc dokáže papír stínit zvuk. K měření stačí použít např. mobilní telefon jako generátor zvuku a mikrofon v počítači jako detektor (Audacity). Použijte papíry různých druhů a tvarů.

Michal přemýšlel, jak se zbavit nepříjemných zvuků, které vydával spolubydlící.

⁵ Celková energie reakce je 26,73 MeV, ale část energie odchází ve formě kinetické energie neutrin, které s látkou téměř neinteragují.

⁶ Hustota je silně variabilní, obecně klesá směrem od středu galaxie, toto je rozumná hodnota ve velké části galaxie podle en.wikipedia.org/wiki/Interstellar_medium. Slunce se ale nachází v cca 300 ly velké bublině, vzniklé po dávném výbuchu supernovy, kde je hustota cca desetkrát menší.

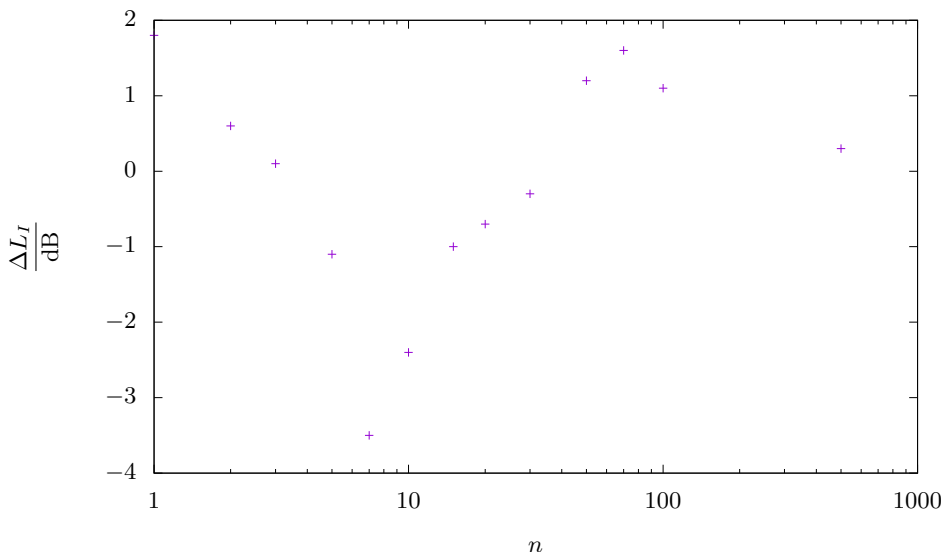
⁷ Jedná se jen o řádový odhad toho, co je rozumně zkonstruovatelné.

⁸ Používáme vztah $N = S\rho v$, s relativistickou kontrakcí by tento vztah byl správně $N = S\rho v \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

⁹ Samozřejmě bychom museli řešit to, že tritium se průběžně rozpadá s poločasem přibližně 12 let.

¹⁰ Miony se sice v kosmickém záření nevyskytují, protože mají poločas rozpadu v řádu mikrosekund, ale vznikají nárazem jiných energetických částic do hustého prostředí.

¹¹ Zájemcům o hlubší pochopení pro začátek doporučujeme k prostudování en.wikipedia.org/wiki/Muon-catalyzed_fusion



Obr. 1: Závislost rozdílu hlasitosti zvuku vůči referenční hladině na počtu listů papíru pro frekvenci 660 Hz. Osa x je logaritmická.

Teória

Dopadá-li zvuková vlna na rozhraní dvou materiálů (v našem případě vzduchu a papíru), část intenzity se odrazí zpět, zatímco zbytek projde. Následuje opačné rozhraní, přes které opět projde jen část intenzity. Vlnění, které se odrazí od druhého rozhraní, se ale ještě může částečně odrazit od prvního rozhraní a následně se může znovu pokusit projít druhým rozhraním.

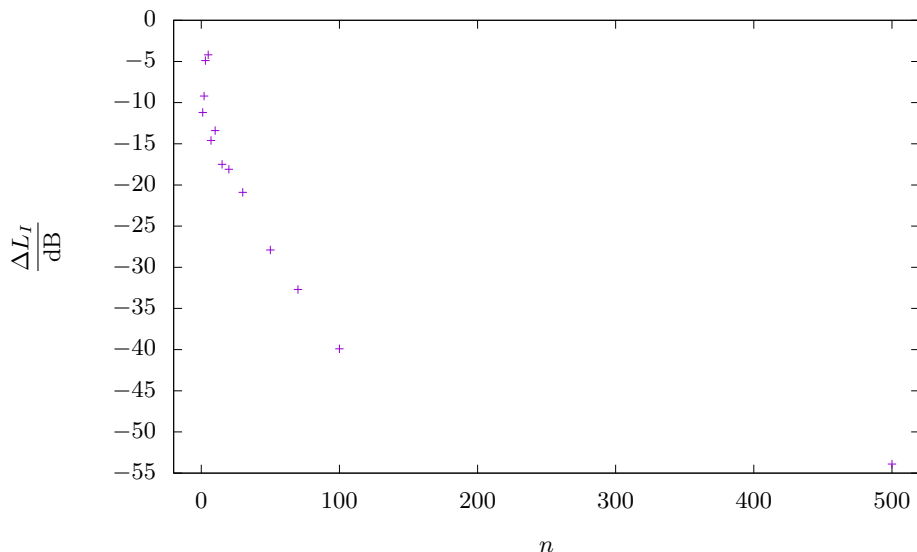
Poměry jednotlivých intenzit závisí na materiálu a na frekvenci vlnění. Například kovy či sklo velkou část energie zvuku odrazí, zatímco přes rozhraní pórovitých materiálů většina energie projde. Závislost na frekvenci už tak jednoduchá není a u různých materiálů může být jiná.

Část energie zvuku je při průchodu prostředím pohlcena a přeměněna na teplo. Také tento jev závisí na frekvenci vlnění a na materiálu.

V tomto experimentu jsme použili dva druhy papírů – homogenní papír a lepenku, která se skládá z papíru a vzduchu. Klasický papír je i ve více vrstvách velmi tenký, proto lze útlum způsobený prostředím zanedbat. Jednotlivé listy však na sebe nedoléhají zcela přesně, takže výsledný blok papírů bude obsahovat vnitřní rozhraní, na kterých bude docházet k odrazům.

Každý další papír přidá dvě nová rozhraní a každé z nich má nějaký koeficient propustnosti. Výsledná propustnost bloku se tak s každým dalším papírem znovu vynásobí nějakým koeficientem. Z toho se dá usuzovat, že celková prošlá intenzita bude exponenciálně klesat s počtem listů papíru.

Lepenka se bude chovat podobně s tím rozdílem, že její tloušťka už nebude zanedbatelná a zřejmě tak bude docházet k pohlcování energie přímo v jednotlivých vrstvách lepenky. Lze



Obr. 2: Závislost rozdílu hlasitosti zvuku vůči referenční hladině na počtu listů papíru pro frekvenci 8 500 Hz.

ukázat, že i tento útlum probíhá exponenciálně¹²

Papír zřejmě pohltí pouze tu část zvuku, která by procházela přímo přes něj. Zvuk je však způsoben vlněním a proto se může ohýbat okolo překážek. Ohyb je výrazný tehdy, pokud je vlnová délka srovnatelná s rozměry překážky nebo menší, což je v případě tohoto experimentu splněno. Vždy tak bude existovat nějaká minimální hladina zvuku, kterou bychom naměřili, i kdyby papír všechn zvuk odstínil.

Dále si musíme uvědomit, že veličina, kterou běžně vnímáme jako „hlasitost“, se ve skutečnosti jmenuje hladina intenzity a je definovaná vztahem

$$L_I = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

kde $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ je nějaká minimální slyšitelná intenzita. Zvýšení hlasitosti o 10 dB tak odpovídá desetinásobnému zvýšení intenzity zvuku. Výše jsme odhadli, že závislost prošle intenzity na počtu papírů bude exponenciální, neboli

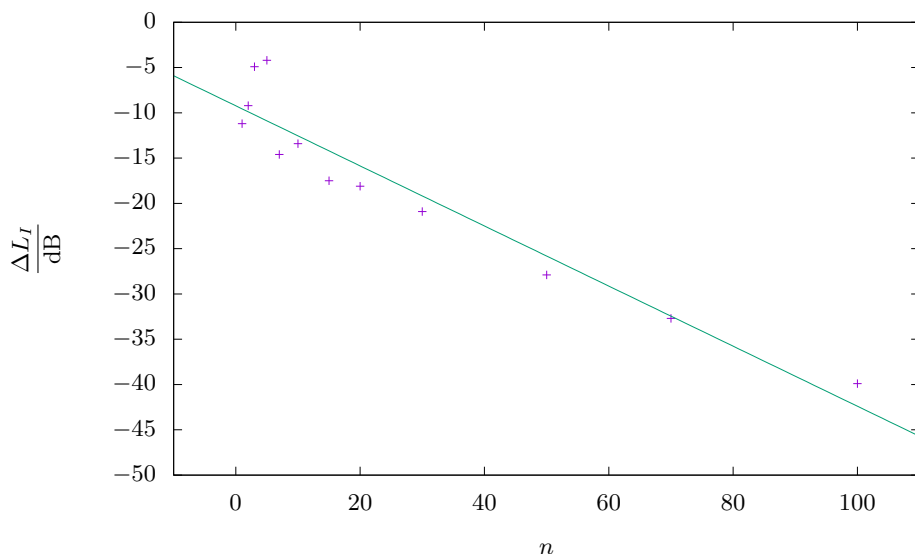
$$I = Ae^{-an},$$

kde $A > 0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ a $a > 0$ jsou nějaké konstanty a n je počet listů papíru. Potom pro měřenou hlasitost dostáváme

$$L_I = 10 \log_{10} \left(\frac{A}{I_0} e^{-an} \right) = 10 \log_{10}(e) \left(\ln \left(\frac{A}{I_0} \right) - an \right) = B(1 - bn),$$

což je lineární funkce.

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Acoustic_attenuation



Obr. 3: Závislost rozdílu hlasitosti zvuku vůči referenční hladině na počtu listů papíru pro frekvenci 8 500 Hz bez hodnoty pro 500 listů, proložená lineární funkcí $f(x) = ax + b$.

Koeficienty fitu jsou $a = (-0,33 \pm 0,03)$ dB a $b = (-9,2 \pm 1,3)$ dB.

Postup pri experimente

Ako generátor zvuku sme použili mobilný telefón. Ako detektor zvuku bolo potrebné zvoliť citlivé zariadenie, preto sme použili hlukomer. Hlukomer meria intenzitu zvuku v decibeloch.

Generátor zvuku a hlukomer boli položené tak, aby vzdialenosť medzi nimi bola konštantná a zároveň nie príliš veľká, aby boli výsledky badateľne rozdielne.

Použili sme niekoľko druhov papiera, pričom sa menila veľkosť papiera, materiál, tvar a hrúbka. Každý papier bol vložený medzi generátor zvuku – ktorý generoval vždy rovnakú frekvenciu – a hlukomer. Pre každý papier sme previedli 3 merania, ktoré sú uvedené v tabuľke 1.

V druhej časti experimentu jsme zvuk opět generovali pomocí mobilního telefonu, ale měřili jsme ho pomocí mikrofону a počítače. Použili jsme klasický kancelářský papír formátu A4 s plošnou hustotou $80 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$. Z důvodu velkého množství listů papíru byl experiment uspořádán vertikálně (nejníže zdroj, nad ním papíry a nahoře mikrofon). Vzdálenost mikrofónu a zdroje byla konstantní.

Výsledky merania

Generátor zvuku vysielal zvuk s frekvenciou 660 Hz. Vzdialenosť medzi generátorom zvuku a hlukomerom bola 16 mm. Bez tienenia zvuku papierom, hlukomer nameral priemernú intenzitu

90,6 dB so štandardnou odchýlkou $\pm 0,2$ dB. Štandardná odchýlka sa vypočíta podľa vzťahu

$$u = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (L_{I_i} - \bar{L}_I)^2},$$

kde pre jeden druh papiera N je počet meraní, L_{I_i} je tlmená hladina intenzity a \bar{L}_I je priemerná hodnota tlmenej hladiny intenzity. Namerané hodnoty su v tabuľke 1 spolu so štandardnou odchýlkou.

Tab. 1: Tlmenie zvuku rôznymi typmi papiera.

papier	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{S}{\text{cm}^2}$	$\frac{L_I}{\text{dB}}$	\bar{L}_I dB	$\frac{u}{\text{dB}}$	$\frac{\Delta \bar{L}_I}{\text{dB}}$	$\frac{u}{\text{dB}}$		
kriedový papier	0,12	623,7	86,9	85,5	86,9	86,4	0,5	4,2	0,6
dva kriedové papiere	0,215	623,7	85,4	84,8	84,9	85,0	0,2	5,6	0,3
hladká lepenka 1	0,597	603,8	84,9	84,3	84,6	84,6	0,2	6,0	0,3
hladká lepenka 2	0,327	621,6	85,6	85,1	84,7	85,1	0,3	5,5	0,4
dvě hladké lepenky 2	0,589	621,6	82,5	81,2	81,2	81,6	0,4	9,0	0,5
toaletný papier	0,123	107,0	89,8	89,5	89,6	89,6	0,1	1,0	0,3
dva toaletné papiere	0,197	107,0	88,4	89,3	89,4	89,0	0,3	1,6	0,4
tři toaletné papiere	0,28	107,0	88,2	88,4	89,0	88,5	0,2	2,1	0,3
lepenka 1	0,28	832,5	85,7	86,3	86,1	86,0	0,2	4,6	0,3
lepenka 2	0,538	832,5	81,8	82,3	83,7	82,6	0,6	8,0	0,6
hladká lepenka 3	2,116	700,8	71,0	72,2	68,0	70,4	1,2	20,2	1,2
hladká lepenka 4	0,703	275,1	85,9	84,5	85,3	85,2	0,4	5,4	0,5
vlnitá lepenka jednovrstvová	2,408	307,2	85,3	84,7	84,3	84,8	0,3	5,8	0,4
vlnitá lepenka dvojvrstvová	5,54	310,5	83,9	84,3	83,1	83,8	0,4	6,8	0,5

V druhém měření byla vzdálenost zdroje a mikrofonu přibližně 40 cm. Vzhledem k tomu, že nás zajímala závislost hlasitosti na počtu listů papíru, měřili jsme pouze rozdíl hlasitosti vůči referenční hladině intenzity, kterou jsme zvolili nulovou pro nula listů papíru. V tabulce 2 jsou výsledky měření pro frekvence 660 Hz a 8 500 Hz. Tyto hodnoty jsme dále vynesli do logaritmického grafu 1 a dále do grafů 2 a 3. V posledním jmenovaném grafu jsme zobrazili všechny hodnoty kromě poslední, abychom je mohli rozumně proložit lineární funkcí.

Diskusia

Z merania môžeme pozorovať, že rôzne papiere (typ, hrúbka, atď.) zvuk tlmili rôzne. Keď porovnáme tlmenú intenzitu jednou vrstvou daného materiálu s rovnakým materiálom ale dvojvrstvom, tak dvojvrstvomý materiál tlmil zvuk viac. Z meraní, kde sme menili počet vrstiev, môžeme povedať, že čím hrubší materiál, tým viac tlmí zvuk. Typ papiera hrá tiež veľkú rolu, ako sme sa presvedčili, lepenka tieni zvuk inak (lepšie) ako obyčajný papier. Je to preto, že zvuk je najlepšie pohlcovaný pórovitými materiálmi, obsahujúcimi vzduchové vaky (zvuk je v kontakte s časticami plynu, ktoré môže rozkmitať ľahko a odovzdať im viac energie ako časticiam pevnej látky). Z nášho experimentu pozorujeme, že rôzny obsah papiera má badaateľný vplyv na tlmenie zvuku až pri veľkých zmenách obsahu papiera. Odchýlky merania boli

Tab. 2: Naměřené hodnoty rozdílu hlasitosti zvuku vůči referenční hladině pro různé počty listů papíru.

n	660 Hz	8 500 Hz
	$\frac{\Delta L}{\text{dB}}$	$\frac{\Delta L}{\text{dB}}$
1	1,8	-11,2
2	0,6	-9,2
3	0,1	-4,9
5	-1,1	-4,2
7	-3,5	-14,6
10	-2,4	-13,4
15	-1,0	-17,5
20	-0,7	-18,1
30	-0,3	-20,9
50	1,2	-27,9
70	1,6	-32,7
100	1,1	-39,9
500	0,3	-53,9

pri niektorých papieroch výraznejšie, avšak celkové pozorovanie neovplyvnili. Chyby merania vznikli kvôli nepresnosti hlukomeru, nepresnému umiestneniu papiera, použitiu všesmerového mikrofónu (čiže zachytával zvuk zo všetkých strán), všesmerovému zdroju zvuku a šumu okolia. Tieto chyby môžu byť (pri lepších podmienkach experimentu) odstránené použitím smerového mikrofónu a zdroju zvuku a izoláciou od okolitých zvukov.

Jak môžeme vidieť v tabuľke 2, pro frekvenci 660 Hz se hlasitost snížila maximálně o jednotky decibelů. Můžeme z toho usuzovat, že zvuk se velmi účinně ohnul kolem papírové překážky a snadno dorazil do mikrofónu, který byl navíc výrazně dál od papírů než v první části měření. Podle grafu 1 se navíc zdá, že jsme nenaměřili jen náhodné fluktuace kolem nuly, ale že je v datech nějaká pravidelnost. Pravděpodobně je to způsobeno nějakou netriviální interferencí zvukových vln, které se ohnuly kolem bloku papírů. Bohužel, výpočet difrakce vlnění na překážce není úplně snadnou záležitostí, takže naměřenou závislost nemůžeme podpořit teoretickým modelem.

Pro frekvenci 8 500 Hz už je situace o něco zajímavější. Vlnová délka zvuku vychází přibližně 4 cm, což je výrazně menší hodnota, než jsou rozměry papíru. Difrakce proto nehraje takovou roli a můžeme tak pozorovat skutečný útlum hlasitosti zvuku. Naměřené hodnoty sice nesedí zcela přesně na přímcu, ale všechny hodnoty kromě poslední mají zřejmý lineární klesající trend, což je v souladu s předpovědí našeho modelu. To je dobře vidět v grafu 3.

Rozdíl hlasitosti pro 500 listů papíru se nápadně vymyká předchozí závislosti, takže se zřejmě projevil nějaký jev, který jsme neuvažovali. Opět se nabízí vysvětlení pomocí difrakce vlnění. Ta sice měla výrazně menší vliv, než v případě pro 660 Hz, ale jelikož se propustnost bloku papírů neustále snižuje, musí prošlá intenzita dříve či později klesnout pod hodnotu intenzity způsobené difrakcí. Potom už nebude počet papírů hrát žádnou výraznou roli, protože pokaždé naměříme podobnou minimální hodnotu difrakčního pozadí.

Vzhledem k tomu, že vlnová délka byla menší než výška pěti set listů papíru, se také mohly projevit ještě zajímavější jevy typu interference vlnění na jednotlivých rozhraních papírů.

Záver

Experimentálne sme overili teoretické predpoklady tienenia zvuku papierom, ktoré závisí na niekoľkých parametroch. Hrúbka papiera – hrubší papier tlmí zvuk lepšie, vrstvenie papiera – viac vrstiev pohlcuje zvuk lepšie, materiál papiera – rôzne druhy papiera tlmia zvuk rôzne. Obsah papiera ovplyvňuje tienenie zvuku, avšak až pri väčšom zmenšení obsahu je rozdiel badateľný.

Dále jsme zjistili, že při zanedbání difrakce a interference je útlum hlasitosti zvuku přibližně přímo úměrný počtu listů papíru, které k tomu použijeme. Pokud difrakci a interferenci nelze zanedbat, výsledky mohou být ještě daleko zajímavější.

Katarína Častulíková
katka.castulikova@fykos.cz

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha IV.S ... lagrangeovská

10 bodů; průměr 6,69; řešilo 16 studentů

V závere seriálu ste si určite všimli Lagrangián a diferenciálnu rovnicu, ktoré akoby „spadli z neba“. To nie je vôbec náhoda, veľkou časťou tejto seriálovej úlohy bude tieto dve rovnice odvodiť.

1. Ukážte, že ak máme pohyb častice v ľubovoľnom centrálnom poli, teda v poli, kde potenciál závisí len na vzdialenosti, bude sa častica zaručene pohybovať len v rovine.
Návod: Zostavte Lagrangeove rovnice II. druhu pre túto situáciu, použite pri tom vhodné zovšeobecnené súradnice. Následne bez ujmy na všeobecnosti položte súradnicu $\vartheta = \pi/2$ a počiatočnú rýchlosť v smere tejto súradnice nulovú. Zamyslite sa a vysvetlite, prečo je takáto voľba v poriadku a nestratíme pri nej žiadne riešenie.
2. Zostavte Lagrangián pre hmotný bod pohybujúci sa v rovine v centrálnom poli. Mali by ste dostať ten istý, ako je uvedený v závere seriálu. Pre tento Lagrangián následne nájdite všetky intergály pohybu a pomocou nich nájdite diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre premennú r . Pre vašu kontrolu, mala by vám vyjsť rovnako ako na konci seriálu.
3. Zamyslite sa, ako určiť uhlovú vzdialenosť medzi dvoma bodmi na sfére, ak máte zadané ich sférické súradnice. Ukážte to napríklad pre hviezdy Betelgeuze a Sírirus, ktorých súradnice si nájdite.

Pomôcka: Táto úloha sa dá jednoducho vyriešiť aj bez znalosti sférickej trigonometrie.

1. V prvej časti máme návod, ako máme postupovať, je teda rozumné sa ho držať. Najskôr si zostavíme lagrangián pre túto úlohu. Keďže sa jedná o centrálnu pole, teda pole so stredovou symetriou, využijeme ju a zavedieme zovšeobecnené sférické súradnice. Vyjadrenie kartézskych súradníc potom bude

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\z &= r \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Označení a význam súradníc je ako v seriáli. Následne určíme jednotlivé kartézské zložky rýchlostí postupným časovým derivovaním transformačných vzťahov pre kartézské súradnice. Dosadíme do vzťahu pre kinetickú energiu T , ktorý bude

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) .$$

Keďže potenciál V závisí len na vzdialenosti, bude funkciou len zovšeobecnenej súradnice r . Lagrangián bude potom vyzerat

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - V(r) .$$

Teraz zostavíme sústavu Lagrangeových rovníc. Keďže lagrangián nezávisí explicitne na φ , zapíšeme poslednú rovnicu rovno v preintegrovanom tvare

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - m\dot{r}\dot{\vartheta}^2 - mr \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + \frac{dV}{dr} &= 0, \\ 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} + mr^2 \ddot{\vartheta} - mr^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 &= 0, \\ mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} &= C_1 . \end{aligned}$$

Chceme ukázať že pohyb bude rovinný, potrebujeme preto, aby uhlová súradnica ϑ ostala konštantná počas celého deja. V nápovede je povedané, že ju máme na počiatku položiť rovnú vhodnej konštante, rovnako ako aj rýchlosť v tomto smere. Ak zvolíme $\vartheta(0) = \pi/2$ a $\dot{\vartheta}(0) = 0$, z druhej rovnice dostaneme

$$\ddot{\vartheta} = \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 - \frac{2\dot{r}\dot{\vartheta}}{r} = 0 .$$

Pretože je $\dot{\vartheta}$ nulová, nebude sa v ďalšom okamžiku ϑ meniť. A pretože je nulové i $\ddot{\vartheta}$, nebude sa meniť ani $\dot{\vartheta}$. Obe veličiny zostanú rovnaké, a preto sa ani $\dot{\vartheta}$ nezmení.

Teraz si poďme v krátkosti odôvodniť, prečo bola vporiadku voľba $\vartheta = \pi/2$ a $\dot{\vartheta} = 0$. Vyplýva to jednoducho z ľubovoľného zavedenia kartézskych súradníc. Ak mám danú počiatočnú polohu a rýchlosť našej častice, nič mi nebráni v tom zvoliť kartézské súradnice tak, aby častica aj vektor jej rýchlosti ležali v rovine xy . Počiatok kartézskych súradníc bude teda v strede nášho centrálného poľa a polohový vektor častice ako aj vektor rýchlosti častice budú ležať v rovine xy , preto bude počiatočná rýchlosť v smere z nula, a teda nulová aj v smere ϑ . Ukázali sme teda, že pohyb bude nutne rovinný.

2. Teraz zostavíme lagrangián už len pre pohyb častice v rovine. Postačí nám použiť polárne súradnice

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi , \\ y &= r \sin \varphi . \end{aligned}$$

Lagrangián bude potom pre centrálné pole vyzerat

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) .$$

Vidíme, že tento lagrangián nezávisí na súradnici φ . To nám vygeneruje jeden integrál pohybu. Ďalší integrál pohybu bude zovšeobecnená energia. Použitím vzorcov na výpočty

týchto integrálov pohybu zo seriálu dostaneme prvý integrál pohybu akúsi „zovšeobecnenú hybnosť“

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{konst} = l$$

a druhý integrál pohybu „zovšeobecnenú energiu“

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E.$$

Z prvého integrálu pohybu vyjadríme $\dot{\varphi}$ a dosadíme do druhého, čím dostaneme diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre r

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right),$$

čo je presne rovnica, ktorá bola uvedená v texte seriálu.

3. Tretí príklad bol trochu na zamyslenie a aj keď mnohý z vás jednoducho použili sférickú kosínovú vetu, nezdržovali sme, že vyžadujeme iný postup (aj keď sme iný postup odporučili), nebudú sa samozrejme za tento postup body strhávať.

Je potrebné si uvedomiť, že aj keď hviezdy sú od nás v rôznej vzdialenosti, pri určovaní ich uhlových vzdialeností uvažujeme, akoby boli všetky na sfére s polomerom r . Dva body na sfére, ktorých poloha je zadaná v sférických súradniciach nech sú od seba vzdialené na sfére o uhol α . Ak by sme poznali ich kartézské súradnice, tak by sme vedeli ich uhlovú vzdialenosť jednoducho určiť zo skalárneho súčinu ich polohových vektorov

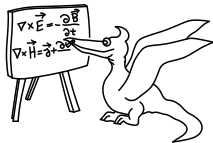
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \alpha.$$

My ale vieme spraviť jednoducho prevod medzi sférickými a kartézskymi súradnicami. Ak budeme uvažovať body na sfére (hviezdy) vo vzdialenosti r , potom využijúc vyššie uvedené vzťahy na prevod súradníc a dosadením do vzorca pre skalárny súčin dostaneme po vykrátení vzdialenosti r vzťah

$$\cos \alpha = \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2 + \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2,$$

ktorý je vlastne kosínusová veta pre sférický trojuholník. Ak to chceme vypočítať pre hviezdy Betelgeuze a Sírius, musíme si správne premeniť jednotky rektaztenzie a deklinácie napríklad na stupne (pri rektaztenzii je 1 hodina 15° , minúta a sekunda sú príslušné zlomky ako štandardne). Ďalej musíme mať na pamäti, že súradnica ϑ tak, ako je definovaná v našej verzii sférických súradníc, sa meria od pólu sféry, kdežto deklinácia sa meria od nebeského rovníka, teda ak má Sírius deklináciu $-16,7^\circ$ jeho súradnica je $\vartheta = 106,7^\circ$. Po dosadení takto upravených a premenených súradníc do vzťahu odvodeného vyššie vypočítame, že uhol medzi týmito hviezdami je približne $27,1^\circ$.

Jakub Jambrich
jakubj@fykos.cz



Seriál: Mechanika

Keď na začiatku 17. storočia Johannes Kepler sformuloval svoje zákony o obehoch planét okolo Slnka, dal svetu doposiaľ najlepší model Slnčnej sústavy. Popísal v ňom nielen to, po akých dráhach sa jednotlivé planéty pohybujú, ale aj ako rýchlo sa pohybujú v konkrétnom čase, teda v konkrétnej polohe voči Slnku. Kepler ale nepodal žiadne kvalitatívne vysvetlenie, prečo je to tak. Jeho zákony vychádzali čisto z napozorovaných dát. Príčinu tohto pohybu, gravitačnú silu, „objavil“ a fyzikálne popísal až o polstoročie neskôr Isaac Newton. Ten následne použitím rafinovanej starogréckej geometrie dokázal, že Keplerove zákony priamo plynú z jeho vlastných pohybových zákonov a zákona gravitácie.

Použitím silnejšieho matematického aparátu a niektorých výsledkov teoretickej mechaniky (ku ktorým sme sa už stihli dopracovať v tomto seriáli) sa dajú Keplerove zákony odvodiť pomerne rýchlym spôsobom, navyše dva z nich vo všeobecnejšom a užitočnejšom tvare. Pustime sa teda do toho!

Keplerove zákony

Na začiatok si pripomeňme závery z minulej časti seriálu, ktoré ste si mali možnosť overiť a dôkladne sa s nimi zoznámiť v minulej seriálovej úlohe. Majme teda lagrangián telesa pohybujúceho sa v rovine v sféricky symetrickom silovom poli s potenciálom $V(r)$.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r),$$

kde kvôli symetrii úlohy je rozumné použitie radiálne symetrických polárnych súradníc.

Ďalej sme z integrálov pohybu tohto lagrangiánu našli diferenciálnu rovnicu pre súradnicu r v závislosti na celkovej energii E a momente hybnosti telesa l .

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right),$$

Riešenie takejto rovnice analyticky je možné, avšak len v prípade „jednoduchého“ potenciálu a len ako funkcia $t(r)$, ktorej invertovanie je náročné, prípadne nemožné. Dokážeme ale nájsť tvar trajektórie nášho telesa a to za použitia triku – takzvaného Binetovho vzorca. To, prečo $u(\varphi)$ vyhovujúce Binetovmu vzorcu rieši našu rovnicu, si môžete za bodovú odmenu rozmyslieť (viď zadanie seriálovej úlohy). Trik spočíva v tom, že vieme nájsť riešenie nie pre funkciu $r(\varphi)$, ale pre funkciu $u(\varphi)$, kde $u = r^{-1}$. Postup spočíva jednoducho v tom, že do Binetovho vzorca, ktorý je

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{dV}{du},$$

dosadíme potenciál a dostaneme diferenciálnu rovnicu pre u , ktorú vyriešime a určíme funkciu $r(\varphi)$. V našom prípade sa jedná o štandardný potenciál gravitačného poľa $V(r) = -GMm/r$, kde G je gravitačná konštanta, M hmotnosť centrálného telesa a m hmotnosť testovacieho telesa pohybujúceho sa v tomto potenciáli. Tento technický krok necháme na vás, niektorí z vás si

precvičia počítanie diferenciálnych rovníc, iní prácu s Wolframom. Každý si snád z toho niečo odnesie. Výsledkom je

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi)},$$

kde e je integračná konštanta a p je prevrátená hodnota pravej strany Binetovho vzorca

$$p = \frac{l^2}{GMm^2}.$$

Tento výsledok má fundamentálny obsah, nakoľko sme dostali všeobecnú rovnicu pre kuželosečky v polárnom tvare s počiatkom v ohnisku. Pre rôzne hodnoty parametra e (o ktorom ste už určite mnohokrát počuli, jedná sa o numerickú excentricitu) dostaneme rôzne typy kuželosečiek. Rýchlo si vieme overiť aspoň jednu z nich. Ak je $e = 0$, potom je $r(\varphi) = \text{konst}$, z čoho vyplýva, že sa jedná o množinu bodov s rovnakou vzdialenosťou od počiatku, čo je presne definícia kružnice.

Pre $e \in (0, 1)$ ide o elipsu. To si predstaviť úplne nevieme, ale dá sa vidieť, že v tomto prípade závisí r na φ . Extrémny prípad nastane, keď $e = 1$. Vtedy pre istý uhol φ dostaneme v menovateli nulu, a funkcia bude divergovať - rastie do nekonečna. To je presne prípad, kedy sa jedná o parabolu, tj. keď teleso, ktoré má v nekonečne nulovú rýchlosť, priletí k Slnku a znova odletí do „nekonečna“, kde „zastane“. Pre väčšie hodnoty excentricity sa bude jednať o hyperbolickú dráhu.

Týmto sa nám podarilo dokázať prvý Keplerov zákon tak, ako bol formulovaný: „Planéty sa pohybujú po elipsách, v ktorých ohnisku sa nachádza Slnko.“ Zároveň sme ale ukázali, že vieme sformulovať oveľa všeobecnejšie tvrdenie o pohyboch hmotných telies v centrálnom gravitačnom poli, a že prípad, ktorým sú planéty v našej Slnčnej sústave, je len jedna z možností, ako sa nebeské telesá môžu pohybovať. (Dobrym príkladom pohybu po napríklad hyperbolických dráhach sú kométy, ktoré sa k Slnku dostanú len raz, prípadne telesá mimo slnečnej sústavy, ktoré sa náhodou jednorázovo „zatúlajú k nám“).

Určite nepočujete prvýkrát, že druhý zákon je len geometrickou interpretáciou zákona zachovania momentu hybnosti. Pripomeňme si pôvodnú Keplerovu formuláciu: „Spojnica Slnka a planéty opíše za rovnaké časové intervaly rovnako veľké plochy.“

Chceme vlastne ukázať, že plocha opísaná za nejaký čas (nazvime si túto veličinu plošná rýchlosť) je konštantná. Nech za nejaký krátky časový úsek dt opíše spojnica planéty a Slnka plochu dS . Keď je tento čas krátky, planéta vo vzdialenosti r sa posunie o uhol $d\varphi$, ktorý bude malý. Keďže bude uhol malý, môžeme predpokladať, že $\sin d\varphi = d\varphi$ a $r(t) \approx r(t + dt)$, preto plochu trojuholníka, ktorú za čas dt opíše spojnica planéty a Slnka vieme vyjadriť ako polovicu súčinu dĺžok dvoch jeho strán a sínusu uhla nimi zovretého

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

Po predelení výrazu časovým úsekom dt a za predpokladu, že daný časový úsek a následne aj uhol, o ktorý sa posunula planéta, a plocha, ktorú opísala spojnica, sú veľmi malé (formálne by sme počítali limitu, kde tieto premenné idú do nuly), môžeme zlomky $\frac{dS}{dt}$ a $\frac{d\varphi}{dt}$ vnímať ako časové derivácie S a φ . Dostali sme teda vzťah medzi plošnou rýchlosťou a uhlovou rýchlosťou.

Ďalej si stačí spomenúť, že jeden z integrálov pohybu nášho lagrangianu bol vlastne zákon zachovania momentu hybnosti l v tvare

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{konst} = l.$$

Vyjadrením uhlovej rýchlosti z tohto vzťahu a dosadením do vzťahu pre plošnú rýchlosť dostaneme

$$\frac{dS}{dt} = \frac{l}{2m}.$$

Vidíme, že plošná rýchlosť je konštantou, čím sme dokázali platnosť druhého Keplerovho zákona. Ak si spomenieme, aká je definícia momentu hybnosti, zistíme, že plošná rýchlosť vôbec nezávisí na hmotnosti planéty, ale len na jej polohe a rýchlosti.

Teraz sme už len na skok od odvodenia (dôkazu) tretieho Keplerovho zákona. Dostaneme ho jednoducho tak, že preintegrujeme rovnicu pre plošnú rýchlosť cez celú periódu obehu planéty

$$\begin{aligned} dS &= \frac{l}{2m} dt, \\ S &= \frac{l}{2m} T, \end{aligned}$$

kde T je perióda obehu planéty okolo Slnka. Dosadíme za $S = \pi ab$, čo je vzorec pre výpočet plochy elipsy. Následne dosadíme známy vzťah pre malú poloos elipsy za znalosti excentricity

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Celú rovnicu umocníme, aby sme ju zbavili odmocnín, a dostaneme

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^4}{l^2} (1 - e^2).$$

Výraz je už skoro v tvare, ktorý možno poznáte z internetu alebo inej literatúry. Stačí len vhodne nahradiť niektoré konštanty. Ak výraz pre konštantu p skombinujeme so vzťahom

$$p = a(1 - e^2),$$

ktorý vieme vypočítavať z vlastností elipsy, dostaneme

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Z čoho je zrejme Keplerovo presne 400 rokov staré tvrdenie: „Pomer druhej mocniny periódy a tretej mocniny jej veľkej polosy je pre všetky planéty konštantá.“ Nám sa ale podarilo zistiť aj to, že táto konštantá je nejakým násobkom hmotnosti nášho Slnka, prípadne iného telesa (telies) v ktorého/ých gravitačnom poli sa pohybujeme. Táto verzia tretieho Keplerovho zákona sa dá použiť na výpočty, ktoré by bez neho boli omnoho náročnejšie a využíva nenáročný stredoškolský matematický aparát. Ukážeme si to na nasledujúcom príklade. Ak by sa zrazu Mesiac voči Zemi zastavil (prestal by okolo nej obiehať), ako dlho by trvalo, kým by Mesiac spadol na Zem, alebo, lepšie povedané, sa zrazil so Zemou?

Príklad: Armageddon

Chceme teda určiť čas, za ktorý sa zrazia dva telesá o „porovnateľných“ hmotnostiach (Zem je približne 81-krát ťažšia ako Mesiac). Riešenie absolventa matfyzu by vyzeralo asi tak, že by si zostavil diferenciálnu rovnicu, ktorá by tento pohyb popisovala, a následne by ju numericky vyriešil, pretože by zistil, že analyticky to nejde.

My sa ale pozrieme na iný postup, a to použitie tretieho Keplerovho zákona. Ak si predstavíme, že Mesiac a Zem by boli hmotné body a Mesiac by nepadal úplne priamo na Zem, ale mal by nejakú infinitezimálne malú počiatočnú rýchlosť kolmú na spojnicu zo Zemou, tak by sa pri svojom najväčšom priblížení telesá nezrazili, ale jedno by obiehalo okolo druhého po elipse, ktorá by mala veľmi podlhovastý tvar. (V tomto myšlienkovom experimente môžeme pohyb Zeme zanedbať a predpokladať, že je taká ťažká, že sa vôbec nebude hýbať). Pre takúto elipsu samozrejme bude platiť tretí Keplerov zákon. Pri nulovej počiatočnej rýchlosti sa bude Mesiac pohybovať po priamke. Jeho „perióda obehu“ je potom dvojnásobok času, za ktorý sa zrazí zo Zemou.

Ďalej je dôležité si uvedomiť, čo je „veľká poloos“ jeho trajektórie. Vieme, že veľká poloos je vlastne polovica najdlhšej tetivy, ktorú dokážeme v elipse zostrojiť. V našom prípade „elipsy extrémne sploštenej až na úsečku“ je dĺžkou najdlhšej tetivy práve dĺžka tejto úsečky. Veľká poloos je teda rovná jej polovici, to v našom prípade znamená polovici vzdialenosti Zem-Mesiac.

Posledné dôležité čo si treba uvedomiť je, čo budeme dosadzovať za hmotnosť M . Túto formu tretieho Keplerovho zákona sme formulovali pre potenciálové pole budené jedným veľmi hmotným telesom, ktorého rozmery sú vzhľadom na rozmery v úlohe zanedbateľné. V sústave Zem-Mesiac (jedná sa o jednorozmerný problém) je toto pole generované hmotnosťou Zeme a Mesiaca. Oba objekty sa budú pohybovať, akoby ich hmotnosť bola zanedbateľná a v ich ťažisku sedel hmotný bod s hmotnosťou rovnou súčtu ich hmotností.

Teraz ostáva len dosadiť hmotnosti Mesiaca a Zeme a vzdialenosť Zeme od Mesiaca (vezme strednú) a dostaneme, že Mesiacu by spadnúť na Zem trvalo približne 4,9 dňa. V príklade sme samozrejme počítali s nulovými rozmermi telies, v skutočnosti by sa ale samozrejme zrazili trochu skôr. Dá sa ale vidieť, že to, že trasa bola o približne 10 000 km kratšia, nám nevádi, nakoľko v posledných chvíľach pred zrážkou sa pohybovali telesá veľmi rýchlo a väčšinu času trvalo Mesiacu (ale trochu aj Zemi) prejsť prvé časti trajektórie.

Aj keď sa seriál ako celok blíži ku koncu, stále máme pred sebou dve dôležité kapitoly. Prvú z nich stihneme ešte dnes.

Problém dvoch telies

Doteraz sme riešili, čo sa deje, keď sa teleso hýbe v gravitačnom poli toho druhého, nehybného. Na záver sme si spočítali veľmi špecifický prípad dvoch telies, ktoré síce mali „porovnateľnú hmotnosť“, ale hýbali sa po jednej priamke s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Zároveň sme k riešeniu použili kanón vo forme 3. Keplerovho zákona, ktorý z inak náročného príkladu spravil príklad stredoškolský. Teraz sa ale poďme pozrieť na to, ako popísať pohyb dvoch telies pre ľubovoľné počiatočné hodnoty rýchlostí a ľubovoľný pomer rýchlostí.

Celý trik riešenia problému dvoch telies tak, aby to bolo pre nás pohodlné, spočíva ako pri všetkých príkladoch v analytickej mechanike v správnom zavedení súradníc. Naším cieľom bude využiť najpoužívanejší postup matematiky, a síce previesť náš problém na už známy prípad. Máme vyriešené, ako sa správa jedno teleso popísané polohovým vektorom r v silovom poli so sféricky symetrickým potenciálom (závislým len na r a nie na priestorových uhloch).

Ťažisková sústava sa vyznačuje vlasnosťou, že celková hybnosť (v našom prípade oboch) telies v tejto sústave je nulová. Ak poznáme pohybové rovnice jedného z dvoch telies v ich ťažiskovej sústave a hmotnosť druhého telesa, vieme určiť pohybové rovnice druhého telesa. Toto je veľmi zaujímavá vlasnosť, a preto sa pozrieme, ako by vyzeral lagrangián dvoch hmotných bodov v ich ťažiskovej sústave.

Nech majú na začiatku body polohové vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 . Zavedieme si teda polohový vektor \mathbf{r} ako vektor ich vzájomnej polohy (polohy druhého telesa voči prvému) a vektor \mathbf{R} ako polohový vektor ich ťažiska

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\end{aligned}$$

kde prvý vzťah je zrejmý a druhý vyplýva z definície ťažiska, pričom usilovnému čitateľovi, ktorý to hneď nevidí, odporúčam si to overiť.

Lagrangián si vyjadríme najprv v premenných r_1 a r_2 , pod ktorými rozumieme veľkosti vektorov \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 . Postupovať stačí intuitívne, bude sa jednať o kinetickú energiu prvého hmotného bodu v súčte s kinetickou energiou druhého hmotného bodu a vzájomnou potenciálnou energiou týchto bodov, ktorá je z Newtonovho gravitačného zákona rovná

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}.$$

Lagrangián bude potom vyzerat

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}.$$

Teraz si vyjadríme nové premenné ako funkcie tých starých. Po pár úpravách dostávame

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Po dosadení našich nových premenných, vzájomnej polohy objektov a polohového vektoru ťažiska dostávame lagrangián v tvare

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|}.$$

Na začiatku sme sa rozhodli použiť vyjadrenie v ťažiskovom systéme, lebo sme dúfali v nejaké zjednodušenie lagrangiánu. Naše želania sa opierali o to, že ťažisková sústava má isté špeciálne vlastnosti a preto by mohol lagrangián v nej vyzerat jednoduchšie. Jednou z týchto vlastností v tomto prípade bude rýchlosť ťažiska $\dot{\mathbf{R}}$ nulová a celý tento člen z lagrangiánu zmizne. Dostávame teda

$$L = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|},$$

čo sa nápadne podobá na pohyb jedného hmotného bodu v centrálnom poli. Už vieme, že tento pohyb sa odohráva v jednej rovine. Preto polohový vektor \mathbf{r} nahradíme jeho súradnicovou reprezentáciou v polárnych súradniciach. Zároveň zavedieme pre zjednodušenie zápisu premennú s názvom redukovaná hmotnosť

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2},$$

ktorú môžeme chápať ako „hmotnosť voči ťažisku“ čo znie mierne zavádzajúco. Zo skúsenosti viem, že niektorým ľuďom príde táto interpretácia užitočná a iným nie (ak patríte medzi nich, tak nato hneď teraz zabudnite). Potom dostane lagrangian tvar

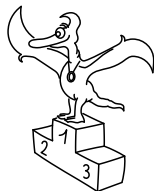
$$L = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r},$$

čo už je štandardný tvar lagrangianu až na konštanty, ktorý vieme riešiť z časti o pohybu hmotnej častice v gravitačnom poli. Podarilo sa nám teda previesť problém dvoch telies na už predtým vyriešený problém, čím ho môžeme taktiež považovať za vyriešený.

Problémom dvoch telies sme zakončili hlavnú časť teoretickej mechaniky. Ak ste to vydržali až sem, ste dobrí. Ak ste to vydržali až sem a máte pocit, že tomu, čo ste doteraz a aj dnes čítali, celkom rozumiete, tak ste veľmi dobrí a vaše vedomosti vzhľadom na vaše oficiálne dosiahnuté vzdelanie sú vysoko nadpriemerné, štatisticky povedané neobvyklé. Toto vám tu teraz píšem, pretože si tú pochvalu zaslúžite a zároveň dúfam, že vás tým možno trochu motivujem neprestať v mimoškolských aktivitách, ktoré robíte.

Rovnako ako vždy v prípade otázok k seriálovým úlohám alebo textu seriálu nám neváhajte napísať mail, zároveň budeme radi za spätnú väzbu. Doteraz vždy prišla s riešením úlohy, tak v tom pokojne pokračujte ďalej touto cestou.

Zároveň vás chceme v závere znova trochu navadiť k ďalšiemu pokračovaniu seriálu, v ktorom si všetko čo sme si doteraz povedali zopakujeme a zároveň si ukážeme takzvaný variačný princíp, čo je niečo, čo mnohí ľudia označujú za najelegantnejšiu formuláciu celej fyziky.



Pořadí řešitelů po IV. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	6	6	6	7	9	10	12	10	66	100	264
1. <i>Eva Feldbabelová</i>	Katolické gymnázium Třebíč	6	6	6	4	9	–	–	–	31	79	165
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	6	6	6	4	9	–	9	–	40	85	164
3. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	6	6	6	3	2	8	11	–	42	68	128
4. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	4	4	1	–	11	–	32	63	100
5. <i>Adam Húšťava</i>	European School Luxembourg II	6	6	–	7	2	–	8	–	29	74	89
6. <i>Vojtěch Votruba</i>	G Jana Keplera, Praha	6	4	6	2	–	–	–	–	18	59	82
7. <i>Benedikt Bareš</i>	G Dobruška	6	–	–	–	–	–	–	–	6	76	73
8. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	2	6	1	–	–	–	–	–	9	41	56
9. <i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	87	55
10. <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	4	2	6	4	–	8	–	–	24	69	41
11. <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	2	–	–	–	–	–	–	–	2	47	37
12.–13. <i>Sára Byšková</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	33
12.–13. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	6	6	6	7	2	–	–	6	33	75	33
14. <i>Adéla Kolembusová</i>	European School Luxembourg II	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	29
15. <i>Filip Zikeš</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	24
16.–17. <i>Zuzana Lisztwanová</i>	G J. Slowackiego, Český Těšín	4	4	–	–	–	–	–	–	8	75	18
16.–17. <i>Petr Šícho</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32	18
18. <i>Meshkat KM</i>	RUMC, Dhaka, Bangladesh	4	4	6	3	–	–	–	–	17	68	17
19. <i>Milan Marek</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	15
20. <i>Kristýna Jenčíková</i>	G nám. E. Beneše, Kladno	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	12
21. <i>Jan Ptáček</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	11
22. <i>Lukáš Veškrna</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	8
23.–24. <i>Natália Kalinová</i>	G, P. Horova, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	7
23.–24. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	7
25.–31. <i>Jiří Antoňů</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6
25.–31. <i>Adam Korbel</i>	G, Strakonice	6	0	–	–	–	–	–	–	6	50	6
25.–31. <i>Tereza Preclíková</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6
25.–31. <i>Radim Skála</i>	G, Hořovice	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	6
25.–31. <i>Matyáš Svoboda</i>	G, Mikulov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6
25.–31. <i>Adam Šebesta</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6
25.–31. <i>Jan Šuráň</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6

Kategorie druhých ročníků

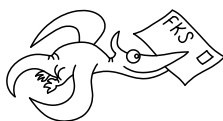
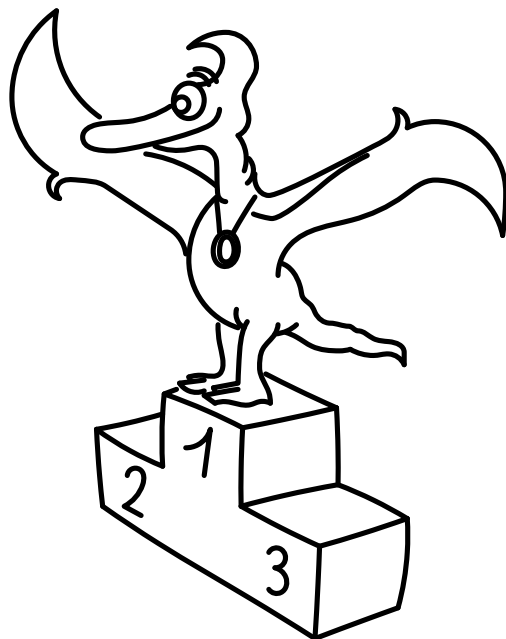
jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	6	6	6	7	9	10	12	10	66	100	264
1. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	6	6	6	7	7	8	12	–	52	81	206
2. <i>Martina Daňková</i>	Klasické a španělské G, Brno	6	6	6	7	–	–	12	–	37	88	155
3. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	6	6	6	2	–	–	9	4	33	66	146
4. <i>Soňa Husáková</i>	G, Českolipská, Praha	4	4	6	2	2	10	12	–	40	71	140
5. <i>Lubor Čech</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	2	–	2	2	5	10	3	28	53	127
6. <i>Adam Mendl</i>	G P. de Coubertina, Tábor	4	6	–	–	–	–	6	5	21	78	117
7. <i>Elena Chocholáková</i>	G L. Svobodu, Humenné	6	6	6	–	–	–	10	–	28	88	113
8. <i>Marco Souza de Joode</i>	G Nad Štolou, Praha	4	2	6	2	–	–	10	3	27	63	111
9. <i>Tomáš Tuleja</i>	G L. Svobodu, Humenné	6	6	6	–	–	–	7	–	25	91	81
10. <i>Jan Klivan</i>	G, Dačice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	64
11. <i>Radek Lacko</i>	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	47
12. <i>Daniel Perout</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	4	–	–	–	–	–	2	12	60	45
13. <i>Martin Polyácko</i>	G Alejová, Košice	6	6	6	–	–	–	–	–	18	75	33
14. <i>Lucia Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	6	6	–	–	–	–	–	–	12	94	30
15. <i>Jarmila Terpáková</i>	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	28
16. <i>Karolína Letochová</i>	G, Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	26
17. <i>Jan Červeňan</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	23
18. <i>Šárka Štěpánková</i>	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	19
19. <i>Matěj Dvořák</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	18
20. <i>Laura Hanousková</i>	G J. Wolкера, Prostějov	4	–	–	1	–	4	–	–	9	31	12
21. <i>Gabriel Ščurka</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	10
22.–23. <i>Daniel Czinege</i>	SPŠ chemická, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	9
22.–23. <i>Kristýna Chlupáčová</i>	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	9
24. <i>Vojtěch Janota</i>	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	7
25. <i>František Krůs</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	6

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	6	7	9	10	12	10	60	100	240
1. Viktor Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	–	7	9	11	11	–	44	92	197
2. Jaroslav Herman	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	6	7	9	5	5	10	48	76	182
3. Jakub Jobus	G Jura Hronca, Bratislava	3	3	6	7	2	10	11	10	52	75	180
4. Martin Schmied	G, Jihlava	3	2	6	4	2	5	7	10	39	74	177
5. Radka Křížová	G J. Heyrovského, Praha	3	3	6	7	9	8	9	10	55	83	157
6. Jaroslav Scheinpflug	G Jírovcova, České Budějovice	3	2	6	2	8	7	8	7	43	68	152
7. David Kománek	G, Špitálská, Praha	3	3	5	7	9	9	10	–	46	78	150
8. Jan Benda	G, Litoměřická, Praha	3	2	6	7	–	10	–	4	32	88	148
9. Jakub Strnad	Klvaňovo G Kyjov	3	3	6	7	8	6	9	–	42	62	124
10. Jiří Zelenka	G Z. Wintra, Rakovník	3	1	–	–	2	6	9	–	21	61	105
11. Martin Vavřík	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	87	95
12. Veronika Hendrychová	G, Turnov	3	1	6	7	2	–	8	–	27	65	76
13. Lukáš Hronek	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	8	8	96	55
14. Jan Divila	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	52
15.–16. Ronald Doboš	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	51
15.–16. Pavla Rudolfová	G, Vídeňská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	51
17. Samuel Jankovčich	G Hubeného, Bratislava	3	3	6	4	5	7	11	10	49	82	49
18.–19. Matěj Holubička	Zemědělská akademie a Gymnázium	1	3	3	2	–	–	–	–	9	54	37
18.–19. Jan Obořil	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	37
20. Jakub Pravda	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	34
21. Kateřina Barotová	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	28
22. Matěj Krátký	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	27
23.–24. Petra Pálkovácsová	G, Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	23
23.–24. Václav Zvoníček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	23
25. Josef Polášek	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	22
26. Rachel Johnson	Richardson High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	21
27. Milan Tichavský	Slezské G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	20
28.–29. Kryštof Jasenský	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	19
28.–29. Jan Vondra	G Týn nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	7	–	7	51	19
30.–31. Minh Khoi Ho	Hanoi - Amsterdam HS, Vietnam	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	16
30.–31. Filip Zukal	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	16
32. Eva Vochozková	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	13
33. Dominika Kodlová	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	11
34. Daniël Krátký	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	10
35.–36. Kateřina Roupová	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	23	9
35.–36. Zuzana Šimáčková	NLCS, London, UK	1	1	–	7	–	–	–	–	9	69	9
37. Erika Žitniaková	Evanjelické G, Banská Bys- trica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	23	5
38.–39. Lucia Krajčoviechová	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	4
38.–39. Martina Pivková	Evanjelické G, Banská Bys- trica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	4
40. Kateřina Vokálová	G, Kolín	2	–	–	–	–	–	–	–	2	67	2

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	6	7	9	10	12	10	60	100	240
1. <i>Martin Vaněk</i>	G, Vysoké Mýto	3	3	6	7	9	11	12	8	59	95	186
2. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	3	2	6	7	6	-	-	7	31	87	138
3. <i>Ivan Hudák</i>	ESŠ, Lip. Mikuláš	3	2	6	7	9	-	-	-	27	93	130
4. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	-	-	82	84
5.-6. <i>Vojtěch Ulman</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	47	80
5.-6. <i>Leonardo Wimmer</i>	Colégio pH, Tijuca, Brazil	-	-	-	-	-	-	-	-	-	82	80
7. <i>Marie Grunová</i>	G, Moravský Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	78
8. <i>Michal Jůza</i>	G, Benešov	3	3	-	3	-	4	9	-	22	58	76
9. <i>Filip Koňářík</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	3	3	6	-	7	-	-	-	19	91	72
10. <i>Kristián Matušík</i>	G, Benešov	3	3	-	-	-	5	8	-	19	47	70
11. <i>Jindřich Jelínek</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	108	65
12. <i>Matej Moško</i>	G Grösslingova, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	59
13. <i>Vojtěch Klimeš</i>	G, Třeboň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	40
14. <i>YUQING XU ARIA</i>	Dulles High School, USA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	38
15. <i>Tomáš Drobil</i>	G, Dačice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	36
16. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	34
17. <i>Tadeáš Wilczek</i>	G F. Živného, Bohumín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	73	32
18. <i>Marek Jankola</i>	G M. Hattalu, Trstená	-	-	-	-	-	-	-	-	-	71	27
19.-20. <i>Andrej Rendek</i>	G, Dubnica n. Váhom	3	3	-	-	-	-	-	-	6	36	24
19.-20. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	24
21. <i>Tereza Prokopová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	85	23
22. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	22
23. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	17
24. <i>Miroslav Horský</i>	G, Českolipská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	52	16
25. <i>Dominik Majkus</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46	13
26. <i>Bibiána Hroncová</i>	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	92	11
27. <i>Jaromír Sladkovský</i>	PORG, Praha	3	1	3	3	-	-	-	-	10	53	10
28.-30. <i>Bernadeta Maříková</i>	G, Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	56	9
28.-30. <i>Štěpán Tichý</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43	9
28.-30. <i>Marie Vaňáková</i>	G Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	9
31.-32. <i>Vratislav Besta</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	6
31.-32. <i>Marek Talíř</i>	G, Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	60	6
33. <i>Marek Božon</i>	G, Karviná	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43	3

**FYKOS***UK, Matematicko-fyzikální fakulta**Ústav teoretické fyziky**V Holešovičkách 2**18000 Praha 8*www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.