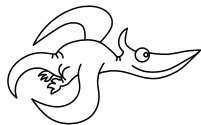


# Úvodem

Organizátoři



Zadání V. série



Termín uploadu: 18. 3. 2019 23.59

Termín odeslání: 17. 3. 2019

## Úloha V.1 ... procházka u silnice

3 body

Matěj jde podél silnice konstantní rychlostí a každých 7 minut potká tramvaj, která jede proti němu. Jednou za 10 minut ho mine tramvaj jedoucí opačným směrem. Tramvaje jezdí v obou směrech se stejnou frekvencí. S jakou?

## Úloha V.2 ... hloubka vniku do koule

3 body

Představte si, že máte podchlazenou plnou kovovou homogenní kouli, kterou vytáhnete z mrazáku, který máte nastavený na opravdu nízkou teplotu. Zajímalo by vás, jak rychle se bude zvyšovat její teplota, když ji umístíte do zahřáté místnosti. Protože by to jinak byl vysokoškolský problém, tak jsme pro vás úlohu zjednodušili. Ptáme se na odhad hloubky vniku (v metrech) „teplé oblasti“ do koule, který můžete získat rozměrovou analýzou. Přičemž známe relevantní parametry koule, konkrétně hustotu  $[\rho] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , měrnou tepelnou kapacitu  $[c] = \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  a její součinitel tepelné vodivosti  $[\lambda] = \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  a zajímá nás závislost na čase  $[t] = \text{s}$ .

## Úloha V.3 ... přepážka

6 bodů

Představme si akvárium tvaru krychle o straně  $a = 1\text{m}$ , které je vertikální přepážkou kolmou na stěny akvária rozděleno na dvě části. Dále uvažujme, že se tato přepážka může volně pohybovat ve směru kolmém na rovinu přepážky, ale ve zbylých dvou směrech se pohybovat nemůže. Také nemůže rotovat. Do jedné části akvária nalijeme  $V_1 = 200\text{ l}$  vody o hustotě  $\rho_v = 1000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a do druhé části nalijeme  $V_2 = 230\text{ l}$  oleje o hustotě  $\rho_o = 900\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Jaká bude rovnovážná pozice přepážky? Jaké budou výšky hladin kapalin v jednotlivých částech akvária v rovnovážném stavu?

*Bonus* Najděte frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy. Předpokládejte, že přepážka má hmotnost  $m = 10\text{ oz}$  a že přesun vody probíhá bez jakéhokoli tření a odporu.

## Úloha V.4 ... rozstřík

8 bodů

Uvažujte volnou kapku vody s poloměrem  $R$ , kterou pomalu nabíjíte elektrickým nábojem. Najděte velikost náboje  $Q$  potřebného na to, aby sa kapka rozstříkla.

**Úloha V.5 ... odskakující hopík**

9 bodů

Tuhou kouli ve vzduchu roztočíme dostatečně velkou úhlovou rychlostí  $\omega$  rovnoběžnou se zemí. Poté hopík pustíme z výšky  $h_0$  na vodorovnou podložku. Od ní se odrazí do výšky  $h_1$  a dopadne nedaleko původního místa dopadu. Určete vzdálenost těchto dvou bodů dopadu, jestliže je třecí koeficient mezi koulí a zemí  $f$  dostatečně malý.

**Úloha V.P ... problémy 1 sekundy**

9 bodů

Navrhněte způsoby jak zpomalit zeměkouli tak, abychom k některým rokům nemuseli přidávat přestupnou sekundu. Spočítejte, kolik by to stálo.

**Úloha V.E ... třiceticentimetrový tón**

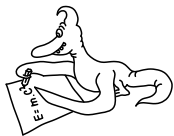
12 bodů

Každý někdy z nudy zkusil brnkat na dlouhé pravítko vystrčené přes okraj lavice. Zvolte vhodný model závislosti frekvence na délce vysunutí za okraj lavice a experimentálně jej ověřte. Popište i další parametry pravítka.

**Úloha V.S ... nebesko-mechanická**

10 bodů

1. Mějme nějaké kosmické těleso s hmotností pěti Sluncí, okolo kterého se nachází sférický symetrický homogenní oblak plynu a prachu s hmotností dvou Sluncí a s průměrem 1 ly. Oblak začne kolabovat do centrálního kosmického tělesa. Zanedbejte vzájemnou interakci částic oblaku (kromě gravitace). Určete, jak dlouho bude trvat, než celý oblak zkolabuje do centrálního tělesa. Úlohu neřešte numericky.
2. V úvodu seriálu jsme řešili diferenciální rovnici pro pohyb částic v centrálním poli, při jejímž řešení jsme použili takzvaný Binetův vzorec. Ukažte, že tento vzorec skutečně řeší zadanou diferenciální rovnici.
3. Sestavte lagrangián pro soustavu Slunce-Země-Měsíc. Předpokládejte, že Slunce je nehybné. Země i Měsíc se pohybují jak pod vlivem Slunce, tak pod vlivem sebe navzájem. Při sestavování lagrangiánu se zamyslete nad tím, jestli používáte správný počet zobecněných souřadnic.



## Řešení IV. série

## Úloha IV.1 ... kostka se vzduchem

3 body; (chybí statistiky)

Mějme dutou kostku s hranou délky  $a = 20$  cm naplněnou vzduchem s teplotou  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , což je zároveň teplota okolí kostky. Vzduch uvnitř kostky ochladíme na  $t_1 = 5^\circ\text{C}$ . Jaká síla bude působit na každou stěnu kostky? Kostka při ochlazení vzduchu v ní nemění svůj objem. Tlak v okolí kostky je  $p_0 = 101,3$  kPa.

Danku štal závěs ve sprše.

Vzduch v kocke můžeme považovat za ideální plyn, teda preň platí stavová rovnica. Keďže sa nemení objem vzduchu v kocke, ide o izochorický dej. Nech  $T$  je termodynamická teplota plynu, potom stavová rovnica platí v tvare

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1}.$$

Odtiaľ vyjadríme tlak plynu po ochlazení

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_2}.$$

Sila  $F$  pôsobiaca na stenu kocky je tlaková sila vyvolaná rozdielom tlakov vnútri a mimo kocky  $\Delta p$ . Platí

$$F = \Delta p S,$$

kde  $S = a^2$  je plocha steny. Teda

$$F = (p_0 - p_1) a^2,$$

$$F = p_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) a^2 \doteq 207 \text{ N}.$$

Keďže je tlak vnútri kocky nižší ako tlak okolia, sila pôsobí v smere do kocky.

*Daniela Pittnerová*  
daniela@fykos.cz

## Úloha IV.2 ... utrhne se

3 body; (chybí statistiky)

Máme (nehmotný) provázek délky  $l$  a na jeho konci kuličku (hmotný bod) s hmotností  $m$ . Víme, že maximální tíha, co unese, je síla  $F = mg$ , kde  $g$  je místní tíhové zrychlení, ale už nic víc. Provázek upevníme a kuličku budeme držet ve stejné výšce, jako je místo upevnění, ve vzdálenosti délky provázku od druhého konce provázku, ale tak, abychom ho nenapínali. Kuličku uvolníme a ta se začne vlivem tíhového zrychlení pohybovat. Pod jakým úhlem provázku vůči svislé rovině se provázek přetrhne?

Karel si říkal, že to nevydrží.

Keď sa guľička nachádza v hĺbke  $h$  pod vodorovnou rovinou, z ktorej bola vypustená, zo zákona zachovania mechanickej energie máme

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

Pohyb guličky ale chceme popisovat pomocou uhlu  $\alpha$ , ktorý zvierá povrázok so zvislým smerom. Pre hĺbku  $h$  teda máme

$$h = l \cos \alpha,$$

čo po dosadení a vyjadrení rýchlosti dáva

$$v = \sqrt{2gl \cos \alpha}.$$

Na guličku pôsobí tiažová sila smerom na dol a sila povrázku v smere k závesu. Výslednica týchto síl spôsobuje, že sa gulička pohybuje po kružnicovej trajektórii s polomerom  $l$ , preto platí bilancia zložiek síl v smere povrázku

$$\frac{mv^2}{l} = F_p - F_g \cos \alpha.$$

Povrázok je teda napínaný silou

$$F_p = 2mg \cos \alpha + mg \cos \alpha = 3mg \cos \alpha.$$

Pretrhne sa práve vtedy, keď táto sila prevyší  $mg$ , teda keď pre uhol odtrhnutia  $\alpha_0$  platí

$$\begin{aligned} F_p &= mg, \\ \cos \alpha &= \frac{1}{3}, \\ \alpha &= 70,5^\circ, \end{aligned}$$

teda keď povrázok zvierá so zvislým smerom uhol asi  $70,5^\circ$ .

**Jozef Lipták**

liptak.j@fykos.cz

### Úloha IV.3 ... levitující

6 bodů; (chybí statistiky)

Matěj má rád levitující věci, a tak si pořídil nekonečnou nevodivou nabitou vodorovnou rovinu s plošnou nábojovou hustotou  $\sigma$ . Poté nad ní umístil míček o hmotnosti  $m$  nabitý nábojem  $q$ . Vypočítejte, pro jaké hodnoty  $\sigma$  může míček vůbec nad deskou levitovat. V jaké výšce  $h$  se pak může vznášet? Uvažujte konstantní tíhové zrychlení  $g$ .

*Matěj by chtěl mít superschopnost levitace.*

Nejtěžší částí této úlohy je asi výpočet velikosti odpudivé síly, kterou deska působí na míček. Na to je potřeba vypočíst elektrickou intenzitu ve výšce  $h$  nad deskou. Na to lze jít několika způsoby.

Nejjednodušší je najít si v tabulkách vzoreček pro elektrickou intenzitu  $E$  nekonečné nabitě roviny. Ta je všude nad deskou stejná a její velikost je z tabulek  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$ .

Druhá možnost je aplikování Gaussova zákona, který říká, jak je tok elektrické intenzity libovolnou uzavřenou plochou závislý na náboji uvnitř, neboli

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Vypadá to komplikovaně, ale zvolíme-li správnou plochu, nemusíme ani integrovat. Ze symetrie předpokládáme, že všechny elektrické siločáry jsou kolmé na desku, protože zde nemůže být žádný jiný preferovaný směr. Představme si libovolný Gaussův válec (to je takový válec, jehož podstavy jsou rovnoběžné s deskou a deska prochází jeho středem). Jeho pláštěm tedy nebude procházet žádný tok elektrické intenzity. Zároveň má intenzita na obou podstavách stejnou (konstantní) hodnotu, protože jsou od desky stejně daleko, takže integrál můžeme vypustit. Také víme, že vektor intenzity je vždy kolmý na podstavu, čili skalární součin přejde ve standardní součin. Má-li podstava plochu  $S$ , integrál přejde do tvaru

$$2ES = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Nyní stačí jen dosadit náboj uvnitř  $Q = \sigma S$  a dostaneme stejný vzoreček jako předtím.

Třetí možností (pro ty, co neznají Gaussův zákon ani tabulky, ale zato rádi integrují) je výpočet přímo z Coulombova zákona. Celou rovinu si rozdělíme na malinké čtverečky a dvakrát integrujeme

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{x^2 + y^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} dx dy,$$

kde  $x^2 + y^2 + h^2$  je vzdálenost od míčku a zlomek  $\frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}$  zaručuje, že sčítáme pouze kolmou složku. Samozřejmě nemusíme integrovat v kartézských souřadnicích. Mohli jsme si celou rovinu také rozsekát na soustředné kružnice a integrovat v polárních souřadnicích. Tyto integrační metody však ponecháme jen labužníkům a integrály se nebudeme již dále zabývat, když můžeme použít například Gaussův zákon.

Máme tedy  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$ . Předpokládáme-li, že Matěj provádí experiment ve vzduchu, jehož permitivita je velmi blízká permitivitě vakua, můžeme psát  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

Nyní stačí vyjít z rovnosti tíhové a elektrické síly.

$$\begin{aligned} F_e &= F_g, \\ Eq &= mg, \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} q &= mg, \\ \sigma &= \frac{2mg\epsilon_0}{q}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že elektrická síla vůbec nezávisí na výšce  $h$  nad deskou. Stejně tak pro konstantní tíhové zrychlení tíhová síla nezávisí na výšce. Proto je možné docílit levitace pouze při nábojové hustotě vypočtené výše. Míček ale zase bude levitovat v libovolném místě. Kdyby byla nábojová hustota větší, míček by odletěl do nekonečna a kdyby byla menší, míček by spadnul.

Pokud bychom uvažovali přesnější model s tíhovým zrychlením klesajícím s druhou mocninou vzdálenosti, byla by levitace nestabilní (tzn. při výchylce nahoru by převládla odpudivá elektrická síla a při výchylce dolů by byla větší tíhová přitažlivá síla).

*Matěj Mezera*  
m.mezera@fykos.cz

## Úloha IV.4 ... trampolína

7 bodů; (chybí statistiky)

Dva hmotné body skákały na trampolíně do výšky  $h_0 = 2$  m. Ve chvíli, kdy oba byly v nejnižším možném místě trajektorie (výchylka  $y = 160$  cm), jeden z nich záhadně zmizel. Do jaké nejvyšší výšky byl druhý vymršťen? Kruhová trampolína má obvod  $o = 10$  m a pruží díky  $N = 42$  pružinám s tuhostí  $k = 1720 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Trampolínu modelujeme  $N$  pružinami rozmístěnými rovnoměrně a spojenými ve středu. Hmotnost zmizelého hmotného bodu je  $M = 400$  kg.

Ivo hlídá bratrance.

K řešení úlohy použijeme zákon zachování energie. Nejdříve zjistíme, jak velké množství energie bylo uloženo v pružinách v okamžiku, kdy se nacházely oba body v nejnižší poloze (maximální výchylce trampolíny). Posléze přepočteme energii pružnosti trampolíny na rozdíl v potenciální energii vystřeleného hmotného bodu, z čehož nakonec určíme maximální dosaženou výšku  $h$ .

Potenciální energie pružnosti  $E_p$  závisí na velikosti deformace, nebo-li na natažení pružin  $\delta x$ , a parametru pružnosti, který je v našem případě charakterizován tuhostí  $k$

$$E_p = \frac{1}{2} N k \delta x^2,$$

kde  $N$  je počet natažených pružin trampolíny. Prodloužení pružin  $\delta x$  určíme pomocí Pythagorovy věty dosazením maximální výchylky  $y$  a poloměru vypočteného z obvodu kruhu  $r = o/2\pi$ , tedy

$$y^2 + r^2 = (r + \delta x)^2.$$

Řešením této kvadratické rovnice je

$$\delta x = \sqrt{r^2 + y^2} - r.$$

Dále potřebujeme zjistit hmotnost vystřeleného bodu  $m$ , kterou vypočteme pomocí rovnosti potenciální energie obou hmotných bodů při výskoku a energie pružnosti  $E_p$

$$\frac{1}{2} N k \delta x^2 = (M + m) g (y + h_0).$$

Vyjádřením  $m$  z poslední rovnice dostáváme

$$m = \frac{N k \delta x^2}{2g (y + h_0)} - M.$$

A nakonec maximální dosaženou výšku  $h$  vystřeleného hmotného bodu získáme řešením rovnice

$$E_p = m g (y + h).$$

Výsledkem je

$$h = \frac{E_p}{m g} - y,$$

kde už jen zbývá dosadit za neznámé veličiny z rovnic výše. Prostým dosazením číselných hodnot pak dostáváme, že hmotný bod vystoupal do výšky  $h = 29,38$  m. Ještě zdůrazněme, že jsme mohli použít tyto jednoduché přepočty na základě ZZE, protože systém se v nejnižším místě trajektorie nacházel v nerovnovázné poloze, kde byla veškerá energie z výskoku uložena v natažených pružinách a hmotné body neměly žádnou kinetickou energii.

Ivo Vinklárek  
ivo@fykos.cz

## Úloha IV.5 ... frisbee

9 bodů; (chybí statistiky)

Tenký homogenní disk obíhá na vodorovné podložce po kružnici s poloměrem  $R$ . Velikost rychlosti těžiště disku je  $v$ . Určete úhel  $\alpha$  mezi rovinou disku a svislým směrem. Tření mezi diskem a podložkou je dostatečné. Poloměr disku je řádově menší než  $R$ .

*Jáchym si nebyl jistý řešením. Snad na to účastníci přijdou.*

Hmotnost disku a jeho poloměr označme po řadě  $m$ ,  $r$ , potom pro jeho moment setrvačnosti kolem osy kolmé na rovinu disku platí

$$J = \frac{1}{2}mr^2.$$

Kolem této osy rotuje s úhlovou frekvencí  $\omega$ . Moment hybnosti vzhledem k této ose je  $L = J\omega$ . Disk se stále dotýká podložky, takže pro rychlost pohybu disku dostáváme

$$v = \omega r = \Omega R,$$

kde  $\Omega$  je úhlová frekvence oběhu disku po kružnici. Za čas  $dt$  se disk otočí o úhel  $d\varphi = \Omega dt$ . Vodorovná složka momentu hybnost  $L_x = L \cos \alpha$  se při tom změni o  $dL_x = d\varphi L_x$ . Na střed disku působí tíhová síla  $F_g = mg$ . Ta je vyrovnávána vztlakovou silou roviny, po které se disk pohybuje. To způsobuje moment síly vzhledem k ose procházející středem disku

$$M_1 = F_g r \sin \alpha.$$

Zároveň na disk působí třecí síla podložky, která je dostředivou silou, pro kterou platí  $F_d = m\Omega^2 R$ . Ta způsobuje moment

$$M_2 = -F_d r \cos \alpha.$$

Nyní už jen stačí použít vztah  $M_1 + M_2 = \dot{L}$  a postupným dosazováním za všechny neznámé dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3v^2}{2Rg}.$$

Můžeme tedy psát výsledek  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3v^2}{2Rg}$ .

**Jáchym Bártík**  
tuaki@fykos.cz

## Úloha IV.P ... V-1 ve vesmíru

10 bodů; (chybí statistiky)

Mezihvězdný prostor není prázdný, nýbrž obsahuje nepatrné množství hmoty. Uvažujte jen vodík, potřebnou hustotu si vyhledejte. Mohla by existovat kosmická loď, jež by „nasávala“ vodík před sebou a využívala energii z něj? Jak rychlá/velká by musela být, aby udržela termojadernou fúzi jen z přijatého vodíku? Jaké jiné překážky realizace je rozumné uvažovat?

*Kryptofašismus -> Červený trpaslík -> pohon -> nápor -> V-1 a hezky se to uzavírá.*

## Úloha IV.E ... papírová izolační

12 bodů; (chybí statistiky)

Změřte, jak moc dokáže papír stínit zvuk. K měření stačí použít např. mobilní telefon jako generátor zvuku a mikrofon v počítači jako detektor (Audacity). Použijte papíry různých druhů a tvarů. Michal přemýšlel, jak se zbavit nepříjemných zvuků, které vydával spolubydlící.

## Teória

## Postup pri experimente

Ako generátor zvuku bol použitý mobilný telefón. Ako detektor zvuku bolo potrebné zvoliť citlivé zariadenie, preto bol použitý hlukomer (viď obrázok 1). Hlukomer meria intenzitu zvuku v debibeloch.

Generátor zvuku a hlukomer boli položené tak, aby vzdialenosť medzi nimi bola konštantná a zároveň nie príliš veľká, aby boli výsledky badateľne rozdielne.

Bolo použitých niekoľko druhov papiera, pričom sa menila veľkosť papiera, materiál, tvar a hrúbka. Každý papier bol vložený medzi generátor zvuku - ktorý generoval vždy rovnakú frekvenciu - a hlukomer. Pre každý papier boli prevedené 3 merania, ktoré sú uvedené v tabuľke.

## Výsledky merania

Generátor zvuku vysiela zvuk s frekvenciou 660 Hz. Vzdialenosť medzi generátorom zvuku a hlukomerom bola 16 mm. Bez tienenia zvuku papierom, hlukomer nameral priemernú intenzitu 90,6 dB. Namerané hodnoty su v tabuľke 1.

Tab. 1: TODO Nějaký popis.

| papier                       | hrubka | obsah  | tlmena | intenzita | tlm int | priemer |
|------------------------------|--------|--------|--------|-----------|---------|---------|
| kriedový papier              | 0,12   | 623,7  | 86,9   | 85,5      | 86,9    | 86,4    |
| 2 kriedové papiere           | 0,215  | 623,7  | 85,4   | 84,8      | 84,9    | 85,0    |
| hladká lepenka 1             | 0,597  | 603,75 | 84,9   | 84,3      | 84,6    | 84,6    |
| hladká lepenka 2             | 0,327  | 621,6  | 85,6   | 85,1      | 84,7    | 85,1    |
| 2 hladké lepenky 2           | 0,589  | 621,6  | 82,5   | 81,2      | 81,2    | 81,6    |
| toaletný papier              | 0,123  | 106,95 | 89,8   | 89,5      | 89,6    | 89,6    |
| 2 toaletné papiere           | 0,197  | 106,95 | 88,4   | 89,3      | 89,4    | 89,0    |
| 3 toaletné papiere           | 0,28   | 106,95 | 88,2   | 88,4      | 89,0    | 88,5    |
| lepenka 1                    | 0,28   | 832,5  | 85,7   | 86,3      | 86,1    | 86,0    |
| lepenka 2                    | 0,538  | 832,5  | 81,8   | 82,3      | 83,7    | 82,6    |
| hladká lepenka 3             | 2,116  | 700,8  | 71,0   | 72,2      | 68,0    | 70,4    |
| hladká lepenka 4             | 0,703  | 275,1  | 85,9   | 84,5      | 85,3    | 85,2    |
| vlnitá lepenka jednovrstvová | 2,408  | 307,2  | 85,3   | 84,7      | 84,3    | 84,8    |
| vlnitá lepenka dvojrvtvová   | 5,54   | 310,5  | 83,9   | 84,3      | 83,1    | 83,8    |



### Diskusia

Z merania môžeme pozorovať, že rôzne papiere (typ, hrúbka, atď.) zvuk výrazne tlmili. Keď porovnáme tmenú intenzitu jednou vrstvou daného materiálu s rovnakým materiálom ale dvojvrstvovým, tak dvojvrstvový materiál tlmil zvuk viac. Môžeme teda povedať, že čím hrubší materiál, tým viac tlmí zvuk, čo dáva zmysel, keďže je tam viac atómov, ktoré stoja zvukovým vlnám v ceste.

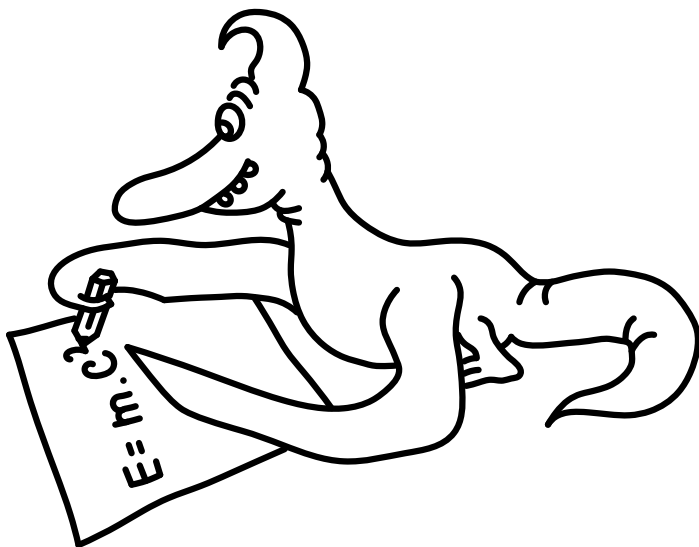
### Záver

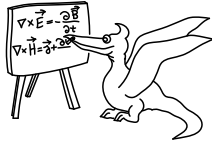
## Úloha IV.S ... lagrangeovská

10 bodů; (chýbí statistiky)

V závere seriálu ste si určite všimli Lagrangián a diferenciálnu rovnicu, ktoré akoby „spadli z neba“. To nie je vôbec náhoda, veľkou časťou tejto seriálovej úlohy bude tieto dve rovnice odvodiť.

1. Ukážte, že ak máme pohyb častice v ľubovoľnom centrálnom poli, teda v poli, kde potenciál závisí len na vzdialenosti, bude sa častica zaručene pohybovať len v rovine.  
Návod: Zostavte Lagrangeove rovnice II. druhu pre túto situáciu, použite pri tom vhodné zovšeobecnené súradnice. Následne bez ujmy na všeobecnosti položte súradnicu  $\vartheta = \pi/2$  a počiatočnú rýchlosť v smere tejto súradnice nulovú. Zamyslite sa a vysvetlite, prečo je takáto voľba v poriadku a nestratíme pri nej žiadne riešenie.
2. Zostavte Lagrangián pre hmotný bod pohybujúci sa v rovine v centrálnom poli. Mali by ste dostať ten istý, ako je uvedený v závere seriálu. Pre tento Lagrangián následne nájdite všetky intergály pohybu a pomocou nich nájdite diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre premennú  $r$ . Pre vašu kontrolu, mala by vám vyjsť rovnako ako na konci seriálu.
3. Zamyslite sa, ako určiť uhlovú vzdialenosť medzi dvoma bodmi na sfére, ak máte zadané ich sférické súradnice. Ukážte to napríklad pre hviezdy Betelgeuze a Sírirus, ktorých súradnice si nájdite. Pomôcka: Táto úloha sa dá jednoducho vyriešiť aj bez znalosti sférickej trigonometrie.





## Seriál: Mechanika

Keď za začiatku 17. storočia Johannes Kepler sformuloval svoje zákony o obehoch planét okolo Slnka, dal svetu doposiaľ najlepší model slnečnej sústavy. Popísal v ňom nielen po akých dráhach sa jednotlivé planéty pohybujú, ale aj ako rýchlo sa pohybujú v konkrétnom čase, respektíve v konkrétnej polohe veči Slnku. Kepler ale nepodal žiadne kvalitatívne vysvetlenie prečo je tomu tak. Jeho zákony vychádzali čisto z naporozovaných dát. Príčinu tohto pohybu - gravitačnú silu, "objavil" a fyzikálne popísal až o polstoročie neskôr Isaac Newton. Ten následne za použitia svojich teórií a rafinovanej starogréckej geometrie dokázal, že Keplerove zákony priamo plynú z Newtonových pohybových zákonov a zákona gravitácie.

Za použitia silnejšieho matematického aparátu a niektorých výsledkov teoretickej mechaniky (ku ktorým sme sa už stihli dopracovať v tomto seriály) sa dajú Keplerove zákony odvodiť vcelku rýchlym spôsobom a dva z nich vo všeobecnejšom a užitočnejšom tvare. Pustime sa teda do toho!

### Keplerove zákony

Prezačiatok si pripomeňme závery z minulej časti seriálu, ktoré ste si mali možnosť overiť a dôkladne sa s nimi zoznámiť v minulej seriálovej úlohe. Máme teda lagrangián telesa pohybujúceho sa v rovine v radiálne (sféricky) symetrickom silovom poli s potenciálom  $V(r)$ .

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Kde kvôli symetrii úlohy je rozumné použitie radiálne symetrických polárnych súradníc.

Ďalej sme z integrálov pohybu tohto lagrangiánu našli diferenciálnu rovnicu pre súradnicu  $r$  v závislosti na celkovej energii  $E$  a momente hybnosti telesa  $l$ .

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right),$$

Riešenie takejto rovnice analyticky je možné, avšak len v prípade "jednoduchého" potenciálu a len ako funkcia  $t(r)$ , ktorej invertovanie je náročné, prípadne nemožné. Dokážeme ale nájsť tvar trajektórie nášho telesa a to za použitia triku - takzvaného Binetovho vzorca. To prečo  $u(\varphi)$  vyhovujúce Binetovmu vzorcu rieši našu rovnicu si môžete za bodovú odmenu rozmyslieť (viď zadanie seriálovej úlohy). Trik spočíva v tom, že vieme nájsť riešenie nie pre funkciu  $r(\varphi)$  ale pre funkciu  $u(\varphi)$ , kde  $u = r^{-1}$ . Postup spočíva jednoducho v tom, že do Binetovho vzorca, ktorý je

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{dV}{du},$$

dosadíme potenciál a dostaneme diferenciálnu rovnicu pre  $u$ , ktorú vyriešime a nazáver určíme funkciu  $r(\varphi)$ . V našom prípade sa jedná o štandardný potenciál gravitačného poľa  $V(r) = -GMm/r$ , kde  $G$  je gravitačná konstanta,  $M$  hmotnosť centralneho telesa a  $m$  hmotnosť

nasho telesa. Tento technický krok necháme na vás, niektorý z vás si precvičia rátanie diferenciálnych rovníc, iný prácu s Wolframom, každý si snáď niečo z toho odnesie. Výsledkom je

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi)},$$

kde  $e$  je integračna konstanta a  $p$  je prevrtena hodnota pravej strany Binetovho vzorca

$$p = \frac{l^2}{GMm^2}.$$

Tento výsledok má veľmi fundamentálny obsah, nakoľko sme dostali všeobecnú rovnicu pre kuželošečky. Pre rôzne rodnoty parametru  $e$  (o ktorom ste už určite mnohokrát počuli, pretože sa jedná o numerickú excentricitu) dostaneme rôzne typy kuželošiek. Rýchlo si vieme overiť aspoň jednu z nich. Ak je  $e = 0$ , potom je  $r(\varphi) = \text{konst}$ , z čoho vyplýva, že sa jedná o množinu bodov z rovnakou vzdialenosťou od počiatku, čo je presne definícia kružnice.

Pre  $e \in (0, 1)$  je to elipsa. To si predstavíť úplne nevieme, ale dá sa vidieť, že v tomto prípade závisí  $r$  na  $\varphi$ . Extrémny prípad nastane, keď  $e = 1$ . Vtedy pre istý uhol  $\varphi$  dostaneme v menovateli nulu, a funkcia bude divergovať - porastie do nekonečna. To je presne prípad kedy sa jedná o parabolu, tj. keď teleso, ktoré má v nekonečne nulovú rýchlosť, priletí k hviezde a znova odletí do "nekonečna", kde "zastane". Pre väčšie hodnoty excentricity sa bude samozrejme jednáť o hyperbolickú dráhu.

Týmto sa nám podarilo dokázať prvý Keplerov zákon tak ako ho formuloval on, teda: Planéty sa pohybujú po elipsách, v ktorých ohnisku sa nachádza Slnko. Zároveň sme ale ukázali, že vieme sformulovať oveľa všeobecnejšie tvrdenie o pohyboch hmotných telies v centrálnom gravitačnom poli a že prípad, ktorým sú planéty v našej slnečnej sústave, je len jedna z možností ako sa nebeské telesá môžu pohybovať. (Dobrym príkladom na pohyb po napríklad hyperbolických dráhach sú kométy, ktoré sa k Slnku dostanú len raz, prípadne telesá mimo slnečnej sústavy ktoré sa náhodou jednorázovo "zatúlajú k nám").

Určite nepočujete prvýkrát, že druhý zákon je len geometrickou interpretáciou zákona zachovania momentu hybnosti. Pripomeňme si pôvodnú keplerovu formuláciu: Spojnice Slnka a planéty opíšu za rovnaké časové intervaly rovnaké plochy.

Chceme vlastne ukázať, že plocha opísaná za nejaký čas (nazvime si túto veličinu plošná rýchlosť) je konštantná. Nech za nejaký krátky časový úsek  $dt$  opíše spojnica planéty a Slnka plochu  $dS$ . Keď je ten čas krátky, planéta vo vzdialenosti  $r$  sa posunie o uhol  $d\varphi$ , ktorý bude malý. Keďže bude uhol malý, môžeme predpokladať, že sa pohol po úsečke o dĺžke  $rd\varphi$ , preto plocha trojuholníka, ktorú sa čas  $dt$  opíše spojnica planéty a Slnka bude

$$dS = \frac{1}{2}r^2d\varphi.$$

Po predelení výrazu časovým úsekom  $dt$  a za predpokladu, že daný časový úsek a následne aj uhol o ktorý sa posunula planéta a plocha ktorú opísala spojnica sú veľmi malé (formálne by sme zráťali limitu, kde tieto premenné idú do nuly) môžeme zlomky  $\frac{dS}{dt}$  a  $\frac{d\varphi}{dt}$  vnímať ako časové derivácie  $S$  a  $\varphi$ . Dostali sme teda vzťah medzi plošnou rýchlosťou a uhlovou rýchlosťou.

Ďalej si stačí spomenúť, že jeden z integrálov pohybu nášho lagrangiánu bol vlastne zákon zachovania momentu hybnosti  $l$  v tvare

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{konst} = l.$$

Vyjadrením uhlovej rýchlosti z tohto vzťahu a dosadením do vzťahu pre plošnú rýchlosť dostaneme

$$\frac{dS}{dt} = \frac{l}{2m}.$$

Vidíme, že plošná rýchlosť je konštantou, čím sme dokázali platnosť druhého Keplerovho zákona. Ak si spomeniete nato, aká je definícia momentu hybnosti, zistíme, že plošná rýchlosť vôbec nezávisí na hmotnosti planéty, ale len na jej polohe a jej rýchlosti.

Teraz sme už len naskok od odvodenia (dôkazu) tretieho Keplerovho zákona. Dostaneme ho jednoducho tak, že preintegrujeme rovnicu pre plošnú rýchlosť skrz celú periódu obehu planéty. Prejdeme to postupne

$$\begin{aligned} dS &= \frac{l}{2m} dt, \\ S &= \frac{l}{2m} T, \end{aligned}$$

kde  $T$  je perióda obehu planéty okolo Slnka. Dosadíme za  $S = \pi ab$ , čo je známy vzorec pre výpočet plochy elipsy. Následne dosadíme známy vzťah pre malú poloos elipsy za znalosti excentricity

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Celú rovnicu umocníme, aby sme ju zbavili odmocnín a dostaneme

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^4}{l^2} (1 - e^2).$$

Výraz je už skoro v tvare ako ho možno poznáte z internetu alebo inej literatúry. Stačí len vhodne nahradiť niektoré konštanty. Ak výraz pre konštantu  $p$  skombinujeme zo vzťahom

$$p = a(1 - e^2),$$

ktorý vieme vypočítavať z vlastností elipsy, dostaneme

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Z čoho je zrejme Keplerovo presne 400 rokov staré tvrdenie: Pomer druhej mocniny periódy a tretej mocniny jej veľkej polosoy je pre všetky planéty konštantá. Nám sa ale podarilo aj zistiť, že tá konštantá, ktorej je to rovné je nejakým násobkom hmotnosti nášho Slnka, prípadne iného telesa (telies) v ktorého/ých gravitačnom poli sa pohybuje. Táto verzia tretieho Keplerovho zákona sa dá použiť na výpočty ktoré by bez neho boli omnoho náročnejšie a využíva nenáročný stredoškolský matematický aparát. Ukážeme si to na nasledujúcom príklade. Ak by sa zrazu Mesiac voči Zemi zastavil (prestal by okolo nej obiehať), ako dlho by trvalo, kým by Mesiac padol na Zem, alebo lepšie povedané, sa zrazil so Zemou?

### Príklad: Armageddon

Chceme teda určiť čas, za ktorý sa zrazia dva telesá o "porovnateľných" hmotnostiach (Zem je približne 81-krát ťažšia ako Mesiac). Riešenie absolventa matfyzu by vyzeralo asi tak, že by si zostavil diferenciálnu rovnicu ktorá by tento pohyb popisovala a následne by ju numericky vyriešil, pretože by zistil, že analyticky to nejde.

My sa ale pozrieme na iný postup, za použitia tretieho Keplerovho zákona. Ak si predstavíme, že Mesiac a Zem by boli hmotné body, a Mesiac by nepadal úplne priamo na Zem ale mal by nejakú infinitezimálne malú počiatočnú rýchlosť kolmú na spojnicu zo zemou, tak by sa pri svojom najväčšom priblížení telesá nezrazili, ale jedno by obiehalo okolo druhého (V tomto myšlienkovom experimente môžeme pohyb Zeme zanedbať a predpokladať, že je tak ťažká, že sa vôbec nebude hýbať) po elipse, ktorá by mala veľmi podlhovastý tvar. Pre takúto elipsu samozrejme bude platiť tretí Keplerov zákon. Pre počiatočnú rýchlosť Mesiaca nulovú sa bude Mesiac pohybovať po priamke. Jeho "Periódou obehu" je potom dvojnásobok času, za ktorý sa zrazí zo Zemou.

Ďalej je dôležité si uvedomiť, čo je "veľká poloos" jeho "dráhy". Vieme, že veľká poloos je vlastne polovica najdlhšej tetivy, ktorú dokážeme v elipse zostriť. V našom prípade "elipsy extrémne sploštenej až na úsečku" je dĺžkou najdlhšej tetivy práve dĺžka tejto úsečky. Veľká poloos je teda rovná jej polovici, to v našom prípade znamená polovici vzdialenosti Zem-Mesiac.

Posledné dôležité čo je si treba uvedomiť, je čo budeme dosadzovať za hmotnosť  $M$ . Túto formu tretieho Keplerovho zákona sme formulovali pre potenciálové pole budené jedným veľmi hmotným telesom, ktorého rozmery sú vzhľadom na rozmery v úlohe zanedbateľné. V sústave Zem-Mesiac (jedná sa o jednorozmerný problém) je toto pole generované hmotnosťou Zeme a Mesiaca. Oba sa budú pohybovať, akoby ich hmotnosť bola zanedbateľná a v ich ťažisku sedel hmotný bod s hmotnosťou rovnou súčtu ich hmotností.

Teraz ostáva len dosadiť hmotnosti Mesiaca a Zeme a vzdialenosť Zeme od Mesiaca (vezme strednú) a dostaneme, že Mesiacu by spadnúť na Zem trvalo približne 4,9 dňa. V príklade sme samozrejme ráтали s nulovými rozmermi telies, v skutočnosti by sa ale samozrejme zrazili trochu skôr, dá sa ale vidieť, že to že trasa bola o približne 10 000 km kratšia nám nevadí, nakoľko v posledných chvíľach pred zrážkov sa pohybovali telesá veľmi rýchlo a väčšinu času trvalo Mesiacu (ale trochu aj Zemi) prejsť prvé časti trajektórie.

Aj keď sa seriál ako celok blíži ku koncu, stále máme pred sebou dva dôležité kapitoly. Prvú z nich stihneme ešte dnes.

## *Problém dvoch telies*

Doteraz sme riešili, čo sa deje, keď sa teleso hýbe v gravitačnom poli toho druhého, nehybného. Nazáver sme si spočítali veľmi špecifický prípad dvoch telies, ktoré síce mali "porovnateľnú hmotnosť", ale hýbali sa po jednej priamke s nulovou počiatočnou rýchlosťou, zároveň sme k riešeniu použili kanón vo forme 3. Keplerovho zákona, ktorý z inak náročného príkladu spravil príklad stredoškolský. Teraz sa ale podme pozrieť nato, ako popísať pohyb dvoch telies pre ľubovoľné počiatočné hodnoty rýchlostí a ľubovoľný pomer rýchlostí.

Celý trik riešenia problému dvoch telies tak, aby to bolo pre nás pohodlné spočíva, tak ako pri všetkých príkladoch v analytickej mechanike, v správnom zavedení súradníc. Naším cieľom bude využiť najpoužívanejší postup matematiky a síce previesť náš problém na už nám známy prípad. Máme vyriešené ako sa správa jedno teleso popísané polohovým vektorom  $r$  v silovom poli zo sféricky symetrickým potenciálom (závislím len na  $r$  a nie na priestorových uhloch).

Ťažisková sústava sa vyznačuje vlasnosťou, že celková hybnosť (v našom prípade oboch telies v tejto sústave je nulová. Ak poznáme pohybové rovnice jedného z dvoch telies v ich ťažiskovej sústave a hmotnosť druhého telesa, vieme teda určiť pohybové rovnice toho druhého telesa. Toto je veľmi zaujímavá vlasnosť a preto sa pozrieme, ako by vyzeral lagrangian dvoch hmotných bodov v ich ťažiskovej sústave.

Nech majú na začiatku body polohové vektory  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$ . Zavedieme si teda polohový vektor  $\mathbf{r}$  ako vektor ich vzájomnej polohy (polohy druhého telesa voči prvému) a vektor  $\mathbf{R}$  ako polohový vektor ich ťažiska

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\end{aligned}$$

kde prvý vzťah je zrejmy a druhý vyplýva z definície ťažiska, pričom usilovnému čitateľovi, ktorý to hneď nevidí odporúčam si to vedľa na papieri hneď overiť.

Lagrangián si vyjadríme najprv v premenných  $r_1$  a  $r_2$ , pod ktorými rozumieme samozrejme veľkosti vektorov  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$ . Postupovať stačí intuitívne, bude sa jednať o kinetickú energiu prvého hmotného bodu v súčte s kinetickou energiou druhého hmotného bodu a vzájomnou potenciálnou energiou týchto bodov, ktorá je z Newtonovho gravitačného zákona rovná

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}.$$

Lagrangián bude potom vyzerat

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}.$$

Teraz si vyjadríme nové premenné ako funkcie tých starých. Po pár úpravách dostávame

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Po dosadení našich nových premenných, vzájomnej polohy objektov a polohového vektoru ťažiska, dostávame lagrangián v tvare

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|}.$$

Na začiatku sme sa rozhodli použiť vyjadrenie v ťažiskovom systéme, lebo sme dúfali v nejaké zjednodušenie lagrangiánu. Naše želania sa opierali o to, že ťažisková sústava má isté špeciálne vlastnosti a preto by mohol lagrangián v nej vyzerat jednoduchšie. Jednou z týchto vlastností, je, že môžeme bez újmy na všeobecnosti predpokladať, že sa voči našej kartézskej sústave nepohybuje. V tom prípade bude rýchlosť ťažiska  $\dot{\mathbf{R}}$  nulová a celý tento člen z lagrangiánu zmizne. Dostávame teda

$$L = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|},$$

čo sa nápadne podobá na pohyb jedného hmotného bodu v centrálnom poli. Už vieme, že tento pohyb sa odohráva v jednej rovine. Preto polohový vektor  $\mathbf{r}$  nahradíme jeho súradnicovou reprezentáciou v polárnych súradniciach. Zároveň zavediem najmä pre zjednodušenie zápisu premennú s názvom redukovaná hmotnosť

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2},$$

ktorú môžem chápať ako "hmotnosť voči ťažsiku" čo znie mierne zavádzajúco, a zo skúsenosti viem, že niektorým ľuďom príde táto interpretácia užitočná a iným nie (ak patríte medzi nich tak nato hneď teraz zabudnite). Potom dostane lagrangián tvar

$$L = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r},$$

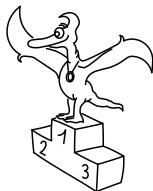
čo už je štandardný tvar lagrangiánu až na konštanty, ktorý vieme riešiť z časti o pohybu hmotnej častice v gravitačnom poli. Podarilo sa nám teda previesť problém dvoch telies na už predtým vyriešený problém, čím ho môžeme taktiež považovať za vyriešený.

Problémom dvoch telies sme zakončili hlavnú časť teoretickej mechaniky. Ak ste to vydržali až sem, tak ste dobrý, ak ste to vydržali až sem a máte pocit, že tomu čo ste doteraz a aj dnes čítali celkom rozumiete, tak ste veľmi veľmi dobrý a vaše vedomosti vzhľadom na vaše oficiálne dosiahnuté vzdelanie sú vysoko nadpriemerné, štatisticky povedané: neobvyklé. Toto vám tu teraz píšeme, pretože si tú pochvalu zaslúžite a zároveň dúfame, že vás tým možno trochu motivujeme neprestať v mimoškolských aktivitách čo robíte.

Rovnako ako vždy v prípade otázok k seriálovým úlohám alebo textu seriálu nám neváhajte napísať mail, zároveň budeme radi za spätnú väzbu doteraz vždy prišla s riešením úlohy, tak v tom pokojne pokračujte ďalej touto cestou.

Zároveň vás chceme v závere znova trochu navadiť k ďalšiemu pokračovaniu seriálu, v ktorom si všetko čo sme si doteraz povedali zopakujeme a zároveň si ukážeme takzvaný variačný princíp, čo je niečo čo mnohí ľudia označujú za najelegantnejšiu formuláciu celej fyziky.





## Pořadí řešitelů po IV. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

| jméno                             | škola                         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P  | E  | S  | IV | %   | Σ   |
|-----------------------------------|-------------------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|
| <i>Student Pilný</i>              | MFF UK                        | 6 | 6 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 10 | 66 | 100 | 264 |
| 1. <i>Eva Feldbabelová</i>        | Katolické gymnázium Třebíč    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 77  | 128 |
| 2. <i>Jiří Kohl</i>               | Biskupské G, Brno             | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 84  | 124 |
| 3. <i>Adam Krška</i>              | G, Mikulov                    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 65  | 86  |
| 4. <i>Benedikt Bareš</i>          | G Dobruška                    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 77  | 69  |
| 5. <i>Vojtěch Votruba</i>         | G Jana Keplera, Praha         | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 56  | 64  |
| 6. <i>Vojtěch Stránský</i>        | G Brno, tř. Jaroše            | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 60  | 62  |
| 7. <i>Adam Hůštava</i>            | European School Luxembourg II | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 80  | 56  |
| 8. <i>Aleš Opl</i>                | Gymnázium Praha 3             | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 87  | 55  |
| 9. <i>Matěj Charousek</i>         | G Na Vítězné pláni, Praha     | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 40  | 43  |
| 10. <i>Barbora Čemanová</i>       | G, Park mládeže, Košice       | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 48  | 35  |
| 11. <i>Adéla Kolembusová</i>      | European School Luxembourg II | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 50  | 29  |
| 12. <i>Sára Byšková</i>           | G Jana Keplera, Praha         | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 60  | 25  |
| 13. <i>Filip Zíkeš</i>            | G P. Bezruče, Frýdek-Místek   | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 71  | 24  |
| 14. <i>Petr Šícho</i>             | G Jana Keplera, Praha         | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 32  | 18  |
| 15. <i>Eliška Durstová</i>        | G, Dvůr Králové n. L.         | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 71  | 17  |
| 16. <i>Milan Marek</i>            | G Neumannova, Žďár n. S.      | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 35  | 15  |
| 17. <i>Jan Ptáček</i>             | G, Špitálská, Praha           | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 58  | 11  |
| 18. <i>Zuzana Lisztwanová</i>     | G J. Słowackiego, Český Těšín | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 83  | 10  |
| 19. <i>Lukáš Veškna</i>           | G Jana Keplera, Praha         | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 38  | 8   |
| 20.–21. <i>Natália Kalinová</i>   | G, P. Horova, Michalovce      | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 50  | 7   |
| 20.–21. <i>Bianka Tomaščíková</i> | G Varšavská, Žilina           | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 54  | 7   |
| 22.–26. <i>Jiří Antoňů</i>        | G, Špitálská, Praha           | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 100 | 6   |
| 22.–26. <i>Tereza Preclíková</i>  | G Dobruška                    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 50  | 6   |
| 22.–26. <i>Matyáš Svoboda</i>     | G, Mikulov                    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 50  | 6   |
| 22.–26. <i>Adam Šebesta</i>       | Masarykovo G, Plzeň           | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 100 | 6   |
| 22.–26. <i>Jan Šuráň</i>          | G, Špitálská, Praha           | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 50  | 6   |

## Kategorie druhých ročníků


| jméno                              | škola                        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P  | E  | S  | IV | %   | $\Sigma$ |
|------------------------------------|------------------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|----------|
| <i>Student Pílný</i>               | MFF UK                       | 6 | 6 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 10 | 66 | 100 | 264      |
| 1. <i>Robert Gemrot</i>            | G Komenského, Havířov        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 80  | 150      |
| 2. <i>Martina Daňková</i>          | Klasické a španělské G, Brno | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 85  | 111      |
| 3. <i>Patrik Kašpárek</i>          | Katolické gymnázium Třebíč   | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 65  | 107      |
| 4. <i>Soňa Husáková</i>            | G, Českolipská, Praha        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 71  | 100      |
| 5. <i>Adam Mendl</i>               | G P. de Coubertina, Tábor    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 83  | 96       |
| 6. <i>Lubor Čech</i>               | G Brno, tř. Kpt. Jaroše      | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 54  | 90       |
| 7. <i>Elena Chocholaková</i>       | G L. Svobodu, Humenné        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 86  | 85       |
| 8. <i>Marco Souza de Jood</i>      | G Nad Štolou, Praha          | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 66  | 84       |
| 9. <i>Jan Klivan</i>               | G, Dačice                    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 63  | 64       |
| 10. <i>Tomáš Tuleja</i>            | G L. Svobodu, Humenné        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 95  | 56       |
| 11. <i>Radek Lacko</i>             | G Komenského, Havířov        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 65  | 40       |
| 12. <i>Daniël Perout</i>           | G Brno, tř. Kpt. Jaroše      | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 62  | 33       |
| 13. <i>Jarmila Terpáková</i>       | G L. Svobodu, Humenné        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 82  | 28       |
| 14. <i>Karolína Letochová</i>      | G, Šternberk                 | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 51  | 26       |
| 15. <i>Jan Červeňan</i>            | G J. Pivečky, Slavičín       | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 52  | 23       |
| 16. <i>Šárka Štěpánková</i>        | G J. Resslera, Chrudim       | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 63  | 19       |
| 17.–18. <i>Matěj Dvořák</i>        | G Jana Keplera, Praha        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 72  | 18       |
| 17.–18. <i>Lucia Gintnerová</i>    | G Sv. Františka, Žilina      | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 90  | 18       |
| 19. <i>Martin Polyácko</i>         | G Alejová, Košice            | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 58  | 15       |
| 20. <i>Gabriel Ščurka</i>          | ŠpMNDaG, Bratislava          | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 53  | 10       |
| 21.–22. <i>Daniël Czinege</i>      | SPŠ chemická, Ostrava        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 47  | 9        |
| 21.–22. <i>Kristýna Chlupáčová</i> | G J. Resslera, Chrudim       | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 50  | 9        |
| 23. <i>Vojtěch Janota</i>          | G, Strakonice                | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 47  | 7        |
| 24. <i>František Krůs</i>          | Masarykovo G, Plzeň          | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 27  | 6        |
| 25. <i>Laura Hanousková</i>        | G J. Wolkera, Prostějov      | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 19  | 3        |

*Kategorie třetích ročníků*

| jméno<br><i>Student Pílný</i>       | škola<br>MFF UK                | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | P  | E  | S  | IV  | %   | Σ   |
|-------------------------------------|--------------------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|
|                                     |                                | 3 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 10 | 60 | 100 | 240 |     |
| 1. <i>Viktor Materna</i>            | G Brno, tř. Kpt. Jaroše        | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 89  | 142 |
| 2. <i>Martin Schmied</i>            | G, Jihlava                     | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 76  | 129 |
| 3. <i>Jaroslav Herman</i>           | G Brno, tř. Kpt. Jaroše        | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 75  | 127 |
| 4. <i>Jakub Jobus</i>               | G Jura Hronca, Bratislava      | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 69  | 118 |
| 5. <i>Jan Benda</i>                 | G, Litoměřická, Praha          | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 90  | 116 |
| 6. <i>Jaroslav Scheinpflug</i>      | G Jírovcova, České Budějovice  | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 68  | 103 |
| 7. <i>Radka Křížová</i>             | G J. Heyrovského, Praha        | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 78  | 102 |
| 8. <i>David Kománek</i>             | G, Špitálská, Praha            | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 76  | 100 |
| 9. <i>Martin Vavřík</i>             | G, Šumperk                     | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 87  | 95  |
| 10. <i>Jiří Zelenka</i>             | G Z. Wintra, Rakovník          | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 63  | 84  |
| 11. <i>Jakub Strnad</i>             | Klvaňovo G Kyjov               | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 55  | 82  |
| 12. <i>Jan Divila</i>               | G, Lesní čtvrť, Zlín           | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 52  | 52  |
| 13.–14. <i>Ronald Doboš</i>         | G Poštová, Košice              | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 85  | 51  |
| 13.–14. <i>Pavla Rudolfová</i>      | G, Vídeňská, Brno              | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 91  | 51  |
| 15. <i>Veronika Hendrychová</i>     | G, Turnov                      | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 64  | 49  |
| 16. <i>Lukáš Hronek</i>             | G, Písek                       | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 100 | 47  |
| 17. <i>Jakub Pravda</i>             | ŠpMNDaG, Bratislava            | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 67  | 34  |
| 18.–19. <i>Kateřina Barotová</i>    | G, Olomouc-Hejčín              | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 60  | 28  |
| 18.–19. <i>Matěj Holubička</i>      | G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice      | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 56  | 28  |
| 20. <i>Matěj Krátký</i>             | PORG, Praha                    | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 71  | 27  |
| 21.–22. <i>Petra Pálkovácssová</i>  | G, Nové Zámky                  | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 38  | 23  |
| 21.–22. <i>Václav Zvoníček</i>      | G Brno, tř. Kpt. Jaroše        | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 72  | 23  |
| 23. <i>Josef Polášek</i>            | G Jana Keplera, Praha          | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 48  | 22  |
| 24. <i>Rachel Johnson</i>           | Richardson High School, USA    | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 42  | 21  |
| 25. <i>Milan Tichavský</i>          | Slezské G, Opava               | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 67  | 20  |
| 26. <i>Kryštof Jasenský</i>         | G, Lesní čtvrť, Zlín           | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 45  | 19  |
| 27.–28. <i>Minh Khoi Ho</i>         | Hanoi - Amsterdam HS, Vietnam  | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 76  | 16  |
| 27.–28. <i>Filip Zukal</i>          | G, Blansko                     | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 27  | 16  |
| 29. <i>Eva Vochozková</i>           | Biskupské G, Brno              | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 62  | 13  |
| 30. <i>Jan Vondra</i>               | G Týn nad Vltavou              | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 48  | 12  |
| 31. <i>Dominika Kodlová</i>         | PORG, Praha                    | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 29  | 11  |
| 32. <i>Daniel Krátký</i>            | G, Trutnov                     | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 59  | 10  |
| 33. <i>Kateřina Roupová</i>         | G, Blansko                     | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 23  | 9   |
| 34. <i>Erika Žitniaková</i>         | Evanjelické G, Banská Bystrica | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 23  | 5   |
| 35.–36. <i>Lucia Krajčoviechová</i> | G Jura Hronca, Bratislava      | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 67  | 4   |
| 35.–36. <i>Martina Pivková</i>      | Evanjelické G, Banská Bystrica | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | -   | 40  | 4   |

Kategorie čtvrtých ročníků

| jméno                             | škola                        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | P  | E  | S  | IV | %   | $\Sigma$ |
|-----------------------------------|------------------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|----------|
| <i>Student Pílný</i>              | MFF UK                       | 3 | 3 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 10 | 60 | 100 | 240      |
| 1. <i>Martin Vaněk</i>            | G, Vysoké Mýto               | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 93  | 127      |
| 2. <i>Kateřina Rosická</i>        | G J. Ortena, Kutná Hora      | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 88  | 107      |
| 3. <i>Ivan Hudák</i>              | ESŠ, Lip. Mikuláš            | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 92  | 94       |
| 4. <i>Jiří Blaha</i>              | G, Uherské Hradiště          | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 82  | 84       |
| 5.-6. <i>Vojtěch Ulman</i>        | G Jaroslava Seiferta, Praha  | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 47  | 75       |
| 5.-6. <i>Leonardo Wimmer</i>      | Colégio pH, Tijuca, Brazil   | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 85  | 75       |
| 7. <i>Marie Grunová</i>           | G, Moravský Krumlov          | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 58  | 74       |
| 8. <i>Jindřich Jelínek</i>        | G, Olomouc-Hejčín            | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 108 | 65       |
| 9. <i>Matej Moško</i>             | G Grösslingova, Bratislava   | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 70  | 59       |
| 10.-11. <i>Michal Jůza</i>        | G, Benešov                   | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 57  | 54       |
| 10.-11. <i>Filip Koňářík</i>      | G F. Palackého, Val. Mez.    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 93  | 54       |
| 12. <i>Kristián Matušík</i>       | G, Benešov                   | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 42  | 51       |
| 13. <i>Vojtěch Klimeš</i>         | G, Třeboň                    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 67  | 40       |
| 14. <i>YUQING XU ARIA</i>         | Dulles High School, USA      | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 63  | 38       |
| 15. <i>Jan Obořil</i>             | Klasické a španělské G, Brno | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 74  | 37       |
| 16. <i>Tomáš Drobil</i>           | G, Dačice                    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 72  | 36       |
| 17. <i>Jindřich Dušek</i>         | G Jana Keplera, Praha        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 57  | 34       |
| 18. <i>Tadeáš Wilczek</i>         | G F. Živného, Bohumín        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 73  | 32       |
| 19. <i>Marek Jankola</i>          | G M. Hattalu, Trstená        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 71  | 27       |
| 20. <i>Jakub Růžička</i>          | G, Nymburk                   | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 63  | 24       |
| 21. <i>Tereza Prokopová</i>       | G Jura Hronca, Bratislava    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 85  | 23       |
| 22. <i>Kateřina Charvátová</i>    | G B. Němcové, HK             | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 79  | 22       |
| 23. <i>Andrej Rendek</i>          | G, Dubnica n. Váhom          | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 30  | 18       |
| 24. <i>Karel Balej</i>            | G a SOŠ, Rokycany            | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 100 | 17       |
| 25. <i>Miroslav Horský</i>        | G, Českolipská, Praha        | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 52  | 16       |
| 26. <i>Domínik Majkus</i>         | G Na Vítězné pláni, Praha    | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 46  | 13       |
| 27. <i>Bibiána Hroncová</i>       | G Poštová, Košice            | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 92  | 11       |
| 28.-30. <i>Bernadeta Maříková</i> | G, Český Krumlov             | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 56  | 9        |
| 28.-30. <i>Štěpán Tichý</i>       | G, Jateční, Ústí nad Labem   | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 43  | 9        |
| 28.-30. <i>Marie Vaňáková</i>     | G Botičská, Praha            | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 50  | 9        |
| 31.-32. <i>Vratislav Besta</i>    | G, Olomouc-Hejčín            | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 33  | 6        |
| 31.-32. <i>Marek Talíř</i>        | G, Český Krumlov             | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 60  | 6        |
| 33. <i>Marek Božon</i>            | G, Karviná                   | - | - | - | - | - | -  | -  | -  | -  | 43  | 3        |

**FYKOS****UK, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.cz>e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)FYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.