Úloha V.S ... nebesko-mechanická

10 bodů; průměr 4,07; řešilo 14 studentů

1. *Mějme nějaké kosmické těleso s hmotností pěti Sluncí, okolo kterého se nachází sféricky symetrický homogenní oblak plynu a prachu s hmotností dvou Sluncí a s průměrem 1 ly. Oblak začne kolabovat do centrálního kosmického tělesa. Zanedbejte vzájemnou interakci částic oblaku (kromě gravitace). Určete, jak dlouho bude trvat, než celý oblak zkolabuje do centrálního tělesa. Úlohu neřešte numericky.*
2. *V úvodu seriálu jsme řešili diferenciální rovnici pro pohyb částic v centrálním poli, při jejímž řešení jsme použili takzvaný Binetův vzorec. Ukažte, že tento vzorec skutečně řeší zadanou diferenciální rovnici.*
3. *Sestavte lagrangián pro soustavu Slunce-Země-Měsíc. Předpokládejte, že Slunce je nehybné. Země i Měsíc se pohybují jak pod vlivem Slunce, tak pod vlivem sebe navzájem. Při sestavování lagrangiánu se zamyslete nad tím, jestli používáte správný počet zobecněných souřadnic.*

1. Predstavovať si celú situáciu budeme tak, že máme nejaký malý kúsok hmoty na okraji oblaku. Tento kúsok hmoty je priťahovaný gravitáciou centrálneho telesa, ako aj gravitáciou zvyšku mraku. Keďže mrak je sféricky symetrický a homogénny, má ťažisko vo svojom strede, teda v centrálnom hmotnom telese. Celý oblak vieme teda nahradiť hmotným bodom umiestneným v jeho ťažisku. (K tomuto predpokladu stačí sférická symetria, teda aj ak sa počas pohybu bude homogenita meniť, naša úvaha platí.) Z hľadiska malého kúsku hmoty na okraji oblaku je teda problém rovnaký ako keby sa pohyboval v centrálnom poli jedného hmotného bodu o hmotnosti 7 hmotností Slnka. V tomto prípade môžme preto použiť 3. Keplerov zákon.

   Kúsok hmoty sa teda bude podľa prvého keplerovho zákona pohybovať po elipse s ohniskom v centrálnom telese. Keďže má ale nulovú počiatočnú rýchlosť a pôsobí naň sila smerom do stredu, elipsa sa nám zredukuje na úsečku, ktorej ohniská budú na jej koncoch. Perióda „obehu“ nášho kúska hmoty bude podľa tretieho Keplerovho zákona

   $$T = \sqrt{\frac{4\pi^2\left(0{,}25\,\mathrm{ly}\right)^3}{7GM_\mathrm{S}}}\,,$$

   kde M_S je hmotnosť Slnka. Nesmieme samozrejme zabudnúť, že keďže priemer oblaku je jeden svetelný rok a táto elipsa (zredukovaná na úsečku) má pol svetelného roka, tak potom je jej veľká poloos len štvrtina svetelného roka.

   Polovica takto vypočítanej periódy je potom čas, ktorý zaberie kúsku hmoty dostať sa k centrálnemu telesu. Pre zadané hodnoty tento čas výjde 376 000 rokov.

   Poznámka.

   Vzhľadom na to, že celý oblak má na počiatku obrovský priemer by sa mohlo zdať, že bude hrať rolu konečná rýchlosť šírenia svetla, keďže sa gravitačné účinky šíria práve touto rýchlosťou. Častica na okraji oblaku teda zistí až o rok, že sa častica na druhej strane pohla. Keďže z výpočtu vychádza celkový čas pozorovaného deja v stotisícoch rokov, môžeme oproti tomu 1 rok bezpečne zanedbať a pri riešení neuvažovať. Taktiež netreba uvažovať relativistické javy spôsobené veľkou rýchlosťou pohybu, ktoré budú mať vplyv v posledných fázach kolapsu, ktoré ale tvoria zanedbateľnú časť celého procesu. Z toho istého dôvodu sme pri výpočte zanedbali aj rozmer centrálneho objektu.

2. Pri dôkaze budeme postupovať vcelku priamočiaro. Vezmeme želanú diferenciálnu rovnicu

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)$$

a miesto premennej $r(\varphi)$ dosadíme premennú $u(\varphi)$, kde $r = u^{-1}$ ako bolo uvedené v texte seriálu. Dosadením vyjadríme diferenciálnu rovnicu pomocou novej premennej

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u^{-1}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - V(u) - \frac{l^2}{2m}u^2\right) .$$

Prederivujeme ľavú stranu podľa času. Nesmieme zabudnúť, že u je funkciou φ a to je funkciou t, tj. $u(\varphi(t))$. Dostaneme

$$\left(-\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - V(u) - \frac{l^2}{2m}u^2\right) .$$

Za $\dot{\varphi}$ dosadíme vzťah zákonu zachovania momentu hybnosti $\dot{\varphi}mr^2 = l$ (toto bola prvá triková časť úlohy), vďaka čomu sa nám pokráti u^2 v menovateli a už po umocnení ľavej strany dostaneme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2\frac{l^2}{m^2} = \frac{2}{m}\left(E - V(u) - \frac{l^2}{2m}u^2\right) .$$

Po vykrátení konštánt a preusporiadaní členov dostaneme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2}\left(E - V(u)\right) .$$

Teraz prichádza druhá triková časť. Vieme, že na pravej strane chceme dostať deriváciu V a na ľavo chceme mať druhú deriváciu u. Preto nás môže rýchlo napadnúť skúsiť prederivovať celú rovnicu podľa φ. Po prederivovaní dostaneme

$$2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + 2u\frac{\partial u}{\partial\varphi} = -\frac{2m}{l^2}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) .$$

Všimneme si, že derivácie u podľa φ sa vyskytuje v každom člene, preto môžme tento člen z rovnice spolu s dvojkami vykrátiť, vďaka čomu dostaneme nami hľadaný Binetov vzorec

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{\partial V}{\partial u} .$$

3. Určite existuje mnoho spôsobov, ako zvoliť súradnice tak, aby sme dostali správny lagrangián. Dôležité je, aby vo výslednom lagrangiáne vystupoval minimálny potrebný počet zovšeobecnených súradníc. V tomto vzorovom riešení zvolíme také zovšeobecnené súradnice, ktoré sme použili aj pri riešení problému dvoch telies. Tentokrát vlastne riešime takisto len pohyb dvoch telies, ale v nejakom potenciálovom poli budenom tretím telesom (Slnkom), ktoré je nehybné v dôsledku toho, že má rádovo vyššiu hmotnosť, a teda sa vplyvom ostatných dvoch telies zdanlivo nepohybuje. Prvými súradnicami budú R a k nemu prislúchajúca uhlová súradnica φ_R vyjadrujúca polohu ťažiska sústavy Zem-Mesiac voči Slnku.

Druhou bude r a k nemu prislúchajúca uhlová súradnica φ_r udávajúca polohu Zeme, respektíve Mesiaca voči ťažisku sústavy Zem-Mesiac, pričom samotná súradnica r udáva vzdialenosť Zeme a Mesiaca. Kinetická energia takejto sústavy bude potom mať rovnaký tvar ako kinetická energia pri probléme dvoch telies po zavedení obdobných súradníc. (Zmysel tohto príkladu bolo aj to, aby ste využili už predpočítané vzťahy pre problém dvoch telies. Samozrejme sa na to dalo ísť aj ináč.) Preto

$$T = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}_r^2\right) + \frac{1}{2}\left(m_\mathrm{Z} + m_\mathrm{M}\right)\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}_R^2\right) ,$$

kde $\mu = \frac{m_\mathrm{Z} m_\mathrm{M}}{m_\mathrm{Z}+m_\mathrm{M}}$ je redukovaná hmotnosť. Pridanou hodnotou tohto príkladu je spočítať, ako bude vyzerať potenciál. Ten sa bude skladať z dvoch častí. Prvou je potenciálna energia Mesiaca a Zeme, ktorá je rovnako ako v prvom príklade

$$V = -\frac{G m_\mathrm{Z} m_\mathrm{M}}{r} ,$$

kde m_M a m_Z sú hmotnosti Mesiaca a Zeme. Jedná sa o klasický stredoškolský potenciál dvoch hmotných bodov vo vzdialenosti r. Čo sa týka potenciálu Zemi a Mesiaca voči Slnku, vieme si to predstaviť tak, že ich spoločný potenciál bude rovný potenciálu ich ťažiska. Analogicky postupujeme napríklad keď počítame potenciálnu energiu napríklad človeka voči Zemi. Človeka ako súbor hmotných bodov si predstavíme ako jediný hmotný bod umiestnený v jeho ťažisku. Preto bude potenciál Zeme a Mesiaca

$$V = -\frac{G\left(m_\mathrm{Z} + m_\mathrm{M}\right) M_\mathrm{S}}{R} .$$

Je zásadné si ale uvedomiť, že táto analógia nie je celkom správna. Teleso na Zemi môžeme nahtadiť hmotným bodom čisto z dôvodu (takmer) homogénneho gravitačného poľa. V tomto prípade je ťažisko ako výsledné pôsobisko gravitačných síl zhodné s hmotným stredom telesa. V nehomogénnom gravitačnom poli (napríklad v našom centrálnom poli Slnka) sú však ťažisko a hmotný stred v rôznych bodoch. Ak ale uvážime, že vzdialenosť R je o veľa väčšia ako vzdialenosť r, môžeme pole v okolí Zeme aproximovať homogénnym poľom. To nám dáva hľadaný lagrangián sústavy

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}\left(m_\mathrm{Z} + m_\mathrm{M}\right)\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}_R^2\right) + \frac{G m_\mathrm{Z} m_\mathrm{M}}{r} + \frac{G\left(m_\mathrm{Z} + m_\mathrm{M}\right) M_\mathrm{S}}{R} .$$

V prípade bez tejto aproximácie by sme dostali tri potenciálové členy pre tri dvojice objektov. Tento presný lagrangián by nám poskytol napríklad vplyv slapových síl Slnka na sústavu Zem-Mesiac.

Jakub Jambrich
`jakubj@fykos.cz`