Úloha III.P ... roj meteoritů

10 bodů; průměr 7,45; řešilo 22 studentů

Je možné, aby se kapka deště vypařila dříve, než dopadne na zem? Vymyslete vhodný model odpařování dešťových kapek během jejich pádu a ukažte, za jakých podmínek (mezi relevantní parametry patří například počáteční poloměr, průběh okolní teploty v závislosti na nadmořské výšce) se může kapka zcela odpařit. Můžete přitom předpokládat, že kapka vznikne náhle v určité výšce h_0 s počátečním poloměrem r_0 a v první aproximaci padá suchou atmosférou. A kdy je možné, aby kapka zamrzla? *Mirek čekal na déšť.*

Odpařování dešťových kapek není tak jednoduché, jak se na první (a možná i na druhý) pohled může zdát. Kombinuje se tu totiž několik různých problémů, které jsou samy o sobě jen těžko řešitelné. Předně se jedná o pád tělesa v atmosféře, kde vzorec pro odporovou sílu závisí na tom, jestli je proudění vzduchu laminární, turbulentní či něco mezi tím. Dále řešíme vypařování vody do vzduchu, které samozřejmě závisí na teplotách obou prostředí, tlaku, vzdušné vlhkosti, rychlosti proudění vzduchu a velikosti povrchu kapky. K vypařování je potřeba dodávat kapce teplo, přičemž v úvahu připadají dvě možnosti, vedení a proudění. Přenos tepla prouděním přitom kombinuje vedení tepla s mechanikou kontinua, jednou z dosud stále nevyřešených částí klasické fyziky. Proudění vzduchu se ale podílí i na tvaru kapky, kde dále hraje roli povrchové napětí, které samozřejmě závisí na teplotě.

Nejdůležitější částí této úlohy tak bude najít vhodné aproximace výše uvedených fyzikálních jevů, což nám umožní nahradit složité závislosti jednoduchými. Ze všeho nejdříve budeme předpokládat, že kapka má tvar koule. Ve skutečnosti není vůbec zásadní, jaký je tvar kapky. Dokud objem roste s třetí mocninou nějakého rozměru a povrch s druhou, nezáleží na tom. Přesný tvar hraje roli pouze při určení hodnot několika konstant. Brzy si ukážeme, že chyba, kterou se nahrazením kapky koulí dopustíme, bude zanedbatelná ve srovnání s ostatními aproximacemi, které teprve přijdou.

Pokud neuvedeme jinak, pracujeme s atmosférou s parametry $T_\mathrm{a} = 20\,\mathrm{^\circ C}$ a $p_\mathrm{a} = 10^5\,\mathrm{Pa}$ za bezvětří s nulovou rychlostí vzduchu.

K tématu sice existuje odborná literatura, ale bohužel se nezabývá přesně tím, co bychom potřebovali. Každý z těchto problémů je totiž velmi obecný, navíc obtížnost úlohy vychází z jejich kombinace. Literatura se většinou věnuje konkrétním situacím, které mají praktické využití. Jedním z takových případů je vypařování velmi drobných kapiček z rozprašovačů a sprejů, což se využívá v mnoha odvětvích průmyslu od zalévání a hnojení rostlin přes nanášení barev a laků po vstřikování paliva do spalovacích motorů.

Při řešení úlohy jsme primárně vycházeli z práce[1] a dále ze článků a knih, které daná práce uvádí v seznamu literatury. Přímo dešťovými kapkami se pak zabývá článek,[2] který využíváme především pro srovnání výsledků.

Pohyb kapky v odporovém prostředí

Začneme vzorcem pro Reynoldsovo číslo

$$\mathrm{Re} = \frac{2rv}{\eta_\mathrm{a}}\,,$$

[1] `https://holsoft.nl/idefics/pdf/kinevap.pdf`
[2] `https://tinyurl.com/y9g8scl2`

kde r je v tomto případě poloměr kapky, v je její rychlost a $\eta_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Pa·s je dynamická viskozita vzduchu. Pro malé hodnoty Re je proudění okolo kapky laminární a odporová síla se řídí Stokesovou rovnicí

$$F_S = 6\pi\eta_a r v\,.$$

Pro velké hodnoty Re je proudění turbulentní a musíme použít Newtonův vztah

$$F_N = \frac{1}{2} C \varrho_a S_x v^2\,, \tag{1}$$

kde $\varrho_a = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu, $S_x = \pi r^2$ je plocha průřezu tělesa ve směru pádu a C je součinitel odporu, který má pro kouli hodnotu 0,5.

Co ale znamenají malé a velké hodnoty Re? To je právě ten problém. Proudění kolem koule je zcela laminární pro $\mathrm{Re} < 0{,}25$, což odpovídá (za normálních podmínek) kapkám s poloměrem do 25 μm. Běžné dešťové kapky ale mají poloměr kolem 1 mm, největší mohou mít i přes 5 mm, ale pak jsou již nestabilní. Naopak turbulentní proudění nastává od Reynoldsova čísla v řádu jednotek tisíců.

Při situaci mezi laminárním a turbulentním prouděním se postupuje tak, že se předpokládá platnost vztahu (1) s tím, že C není konstanta, ale závisí na Re. Pro výpočet Re ale potřebujeme znát rychlost. Bez podrobnějšího důkazu si řekneme, že volně padající kapky brzy dosáhnou své terminální rychlosti, neboli stavu, kde se odporová síla vyrovná tíhové. S touto rychlostí se pak pohybují dál. Tíhová síla $F_g = mg$ je při pohybu terminální rychlostí rovna Newtonově odporové síle, odkud pro terminální rychlost dostáváme

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho_a S_x}} = \sqrt{\frac{8\varrho g r}{3C\varrho_a}}\,. \tag{2}$$

Závislost $C(\mathrm{Re})$ je pouze empirická, ale je možné ji proložit nějakou rozumnou funkcí. Pomocí v_t, kterou označíme jako v_1, bychom spočítali Re_1, odtud bychom zjistili C_1 a z něj znovu spočítali rychlost, tentokrát v_2. Po několika iteracích bychom dospěli do stavu, kdy už by se veličiny příliš neměnily, neboli by platilo $v_i \approx v_{i+1}$.

Tento obecný postup je ale extrémně nepraktický například z toho důvodu, že chceme počítat závislost rychlosti kapky na čase a podobné věci. Proto si vztah $C(\mathrm{Re})$ uvádět nebudeme a místo toho si řekneme, že koeficient C má při $\mathrm{Re} = 100$ hodnotu přibližně 1 a dále s rostoucím Re pozvolna klesá na výše zmíněných 0,5. Hodnota $\mathrm{Re} = 100$ přitom odpovídá kapce s poloměrem zhruba 0,3 mm, pro větší kapky Re už jenom roste.

Můžeme tak říct, že pro všechny velikosti kapek, které nás zajímají, je hodnota konstanty C v intervalu $(0{,}5, 1)$, což není zase takové rozpětí. Zároveň si uvědomme, že s klesajícím poloměrem kapky výrazně klesá její rychlost, čili se zvyšuje čas, po který se může odpařovat. Později si to odvodíme podrobněji, ale nyní budeme předpokládat, že poloměr kapky se bude zmenšovat čím dál, tím rychleji. Dostane-li se tak kapka z počátečního poloměru $r_0 = 1\,\mathrm{mm}$ pod hodnotu 0,3 mm po uražení vzdálenosti x, k úplnému vypaření dojde na vzdálenosti řádově shodné s x.

Vypařování budeme studovat pouze tam, kde je poloměr kapky dostatečně velký. Při výpočtu rychlosti použijeme vztah (2) s aproximací $C \approx 0{,}5$, přičemž všechny parametry schováme do konstanty α. Dostáváme

$$v = \alpha\sqrt{r}\,, \qquad (3)$$
$$\alpha = \sqrt{\frac{8\varrho g}{3C\varrho_\mathrm{a}}}\,.$$

Vypařování vody

Označme teplotu kapky T, potom je k vypaření hmotnosti $-\mathrm{d}m$ potřeba dodat teplo

$$\mathrm{d}Q = -c\,(T_\mathrm{v} - T)\,\mathrm{d}m - l_\mathrm{v}\mathrm{d}m = -K(T)\mathrm{d}m\,, \qquad (4)$$

kde $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ je měrná tepelná kapacita, $T_\mathrm{v} = 100\,^\circ\mathrm{C}$ je teplota varu a $l_\mathrm{v} = 2{,}3\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$ je měrné skupenské teplo vypařování. Ačkoli je T výrazně nižší než T_v, energie jednotlivých molekul vody se řídí něčím podobným Maxwellowu-Boltzmannovu rozdělení. To znamená, že ve vodě stále existují molekuly s dostatečnou energií na to, aby se uvolnily ve formě páry. Tím se ale kapka ochlazuje, čímž podíl těchto částic klesá. Zároveň se kolem kapky vytvoří slupka vzduchu, která je díky tření unášena spolu s kapkou. V této slupce stoupá koncentrace páry, čímž se zvyšuje počet částic, které se mohou vrátit zpět do kapky.

Pokud by se kapka nacházela v uzavřeném prostoru, časem by se dostala do rovnováhy, ve které by se v každém okamžiku uvolnil a zpětně vstřebal stejný počet molekul vody. Naše situace se liší jednak tím, že kolem kapky proudí vzduch, což způsobuje, že mnohé uvolněné částice opouští okolí kapky natrvalo. Zadruhé pak tím, že do kapky proudí teplo z okolí. Oba jevy se vykompenzují v tom smyslu, že se ustanoví nová rovnováha, ve které se všechno teplo dodané kapce přemění na energii přesně těch částic, které kapku navždy opustí.

Podmínka rovnováhy stanoví pro každý poloměr kapky jinou teplotu T, nicméně máme dobrý důvod předpokládat, že závislost $T(r)$ nebude nijak dramatická. Dokonce půjdeme tak daleko, že ji prohlásíme za konstantní během celého pádu kapky. Potom rovnici (4) vydělíme malým časovým úsekem $\mathrm{d}t$ a dostaneme

$$\dot{m} = -\frac{1}{K}P\,,$$

kde $P = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ je tepelný příkon kapky. Změna hmotnosti souvisí se změnou poloměru podle vztahu

$$\mathrm{d}m = 4\pi r^2\varrho\mathrm{d}r\,,$$

což vede na

$$\dot{r} = -\beta r^{-2}P\,, \qquad (5)$$
$$\beta = \frac{1}{4\pi\varrho K} = \frac{1}{4\pi\varrho\left(c\,(T_\mathrm{v} - T) + l_\mathrm{v}\right)}\,.$$

Tepelná výměna s okolím

Teplota kapky je díky vypařování menší než teplota vzduchu. Chtěli bychom použít rovnici vedení tepla ve tvaru

$$P = \frac{\lambda_\mathrm{a} S}{l} \left(T_\mathrm{a} - T\right) ,$$

kde $S = 4\pi r^2$ je obsah povrchu kapky, $\lambda_\mathrm{a} = 0{,}025\,\mathrm{W{\cdot}K^{-1}{\cdot}m^{-1}}$ je tepelná vodivost vzduchu a l vzdálenost mezi povrchem kapky a bodem s teplotou T_a. Z této rovnice nutně vyplývá, že l nemůže být nulová, protože jinak by se teploty okamžitě vyrovnaly. Jak již jsme zmínili, při při pádu se kolem kapky vytvoří slupka vzduchu, která je spolu s kapkou unášena díky třecí síle. Tím se kapka izoluje od okolí a vznikne teplotní gradient.

Problém tohoto přístupu je v tom, že proudící vzduch s teplotou T tuto slupku neustále narušuje, přičemž vznikají různé víry, které dále urychlují předávání tepla. Zároveň, slupka zřejmě nebude na všech místech okolo kapky stejně tlustá, stejně jako se bude lišit rozložení teploty.

Aproximací už bylo dost, je tedy na čase přejít k odhadům. Uvažujme, že l je jakási efektivní šířka slupky, při které by bylo za ideálních podmínek dosaženo stejného tepelného toku P jako v případě padající kapky se slupkou o skutečné šířce l'. Například, pokud by proudění vzduchu zmenšilo izolační účinnost vrstvy na polovinu, výsledek bude stejný, jako kdyby šířka této vrstvy byla poloviční. Tomu by odpovídala rovnice $l = l'/2$ – slupka s šířkou l' v prostředí s proudícím vzduchem propustí stejný tepelný příkon jako slupka s šířkou $l = l'/2$ v ideálních podmínkách. Stejně tak vrstvu s nehomogenní tloušťkou můžeme modelovat vrstvou s jakousi průměrnou tloušťkou.

Podstatné je, že budeme předpokládat, že vliv výše uvedených jevů nebude záviset na tloušťce vrstvy. Čili pokud turbulentní proudění efektivně zmenší vrstvu l' na $l'/2$, obdobně zmenší vrstvu $2l'$ na l'. Poslední, co musíme zjistit, je tvar závislosti $l(r, v)$, protože všechny ostatní veličiny považujeme za konstantní. Odvážně odhadneme, že by mohlo platit $l = \varepsilon v$, kde ε je nějaká konstanta.

To, že by l neměla přímo záviset na velikosti tělesa, se zdá logické. Je pravda, že by mohla záviset na jeho zakřivení, ale vzhledem k tomu, že r se pohybuje v relativně malém rozmezí možných hodnot, tuto možnost zanedbáme. Důvodem lineární závislosti l na v je pak to, že tření mezi vrstvami vzduchu závisí lineárně na rychlosti.

Z těchto úvah vyplývá

$$P = \gamma r^2 v^{-1} , \tag{6}$$

$$\gamma = \frac{4\pi\lambda_\mathrm{a}}{\varepsilon} \left(T_\mathrm{a} - T\right) .$$

Výsledný model

V předchozích částech jsme s větší či menší mírou představivosti odvodili rovnice (3), (5) a (6), které teď dáme dohromady a dostaneme skvostný vztah

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{r}}{v} = -\beta\gamma v^{-2} = -\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} r^{-1} ,$$

kde x je vzdálenost, kterou kapka urazila. Rovnici separujeme na tvar

$$r\mathrm{d}r = -\frac{\mu}{2}\mathrm{d}x ,$$

kde μ je vhodně zvolená konstanta

$$\mu = \frac{2\beta\gamma}{\alpha^2} = \frac{3\lambda_\mathrm{a} C \varrho_\mathrm{a} \left(T_\mathrm{a} - T\right)}{4\varepsilon g \varrho^2 \left(c\left(T_\mathrm{v} - T\right) + l_\mathrm{v}\right)} \,.$$

Integrací dostaneme

$$r^2 - r_0^2 = -\mu x \,,$$

odkud si vyjádříme hledanou závislost poloměru kapky na uražené vzdálenosti

$$r(x) = \sqrt{r_0^2 - \mu x} \,.$$

Podle tohoto vzorce klesne poloměr na nulu za

$$x_0 = \frac{r_0^2}{\mu} = \frac{4\varepsilon g \varrho^2 r_0^2 \left(c\left(T_\mathrm{v} - T\right) + l_\mathrm{v}\right)}{3\lambda_\mathrm{a} C \varrho_\mathrm{a} \left(T_\mathrm{a} - T\right)} \,.$$

Jak jsme již zmínili dříve, náš model platí pouze dokud se poloměr příliš nezmenší, čili kapka se ve skutečnosti nevypaří po uražení vzdálenosti x_0. Na druhou stranu, výška, ze které musíme kapku vypustit, aby se stihla před dopadem celá vypařit, bude hodnotě x_0 přinejmenším řádově podobná.

Diskuze

Ve výsledku k výpočtu x_0 nepotřebujeme zase tolik parametrů, jediné neznámé veličiny jsou ε a T. Vzhledem k tomu, že hledáme odpověď na otázku, jestli se může kapka zcela vypařit, zvolme zpočátku velmi optimistické hodnoty. Zřejmě čím menší bude T, tím více tepla bude do kapky proudit a tím rychleji se (paradoxně) vypaří. Na druhou stranu, T určitě nebude pod bodem mrazu vody, protože ze zkušenosti víme, že déšť zase tak studený není. Takže odhadněme $T = 0\,^\circ\mathrm{C}$ a pokračujme dále.

Tloušťka vzduchové vrstvy obalující kapku je řádově srovnatelná s jejím poloměrem. Použitím vztahu (3) dostaneme, že rychlost kapky s poloměrem $r = 1\,\mathrm{mm}$ je zhruba $v \doteq 6{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Minimální šířka vrstvy tak bude něco jako $l \approx 0{,}1\,\mathrm{mm}$, pro kterou vychází $\varepsilon \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$. Ano, je to velmi hrubý odhad, doufejme, že je alespoň řádově správně. Dosazením dostáváme $x_0 \approx 1{,}7\,\mathrm{km}$.

To je srovnatelné s výškou, z jaké padají dešťové kapky. Parametr ε jsme zřejmě podhodnotili, ale zase jsme neuvažovali vliv proudění a další jevy, které by tloušťku vrstvy efektivně zmenšily. Rozdíl teplot je sice příliš veliký, ale opět, snažili jsme se o optimistický odhad.

Na závěr si uvědomme, že x_0 závisí na druhé mocnině r_0, čili každé zmenšení poloměru potřebnou vzdálenost výrazně zkrátí. Pokud by se tak kapky s poloměrem 1 mm nevypařily, těm jen o něco menším by se to už jistě podařilo.

Srovnání s výše uvedeným článkem docházíme k závěru, že naše výsledky jsou řádově správné a že i kapky s poloměrem kolem jednoho milimetru se vypaří při pádu z několika jednotek kilometrů. V případě skutečného deště by situace byla složitější, protože bychom nemohli předpokládat suchou atmosféru. Vodní páry obsažené ve vzduchu by ztěžovaly další vypařování, zatímco drobné vodní kapičky by se nabalovaly na padající kapku, díky čemuž by mohla v čase naopak růst. Náš výsledek je tak skutečně jen dolním odhadem dostatečné výšky pro vypaření kapky.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz